

Рис. 3

внутренним. На рисунке 3 показано, как, пользуясь этим алгоритмом, получить девятиугольник, разрезанный на семь многоугольников. Однако дальше действовать так не удастся, потому что стороны, содержащих две вершины, не останутся. Поэтому придется выбрать одну из сторон, содержащих одну вершину, и пристроить новый многоугольник к ней. Тогда l увеличится на 1, а число сторон многоугольника — на $k - 2$. При продолжении этого процесса две стороны, содержащие вершины разбиения, будут сближаться, и в какой-то момент снова возникнет сторона, содержащая две вершины, так что на следующем шаге можно будет обойтись без увеличения l . Для $k \leq 17$ можно выбирать стороны, к которым пристраивается новый многоугольник, так, чтобы эти моменты совпадали с моментами сохранения l в приведенной таблице. В результате для всех этих значений k верхняя и нижняя оценки будут совпадать. Остается ли это верным при всех k , автору неизвестно. Возможно, читатели «Кванта» смогут найти ответ на этот вопрос.

Подведем итоги

Итак, хотя решить поставленную мегазадачу нам не удалось, мы все же смогли продвинуться в этом направлении. Прежде всего, из результата задачи 1 следует, что число k многоугольников, на которые можно разрезать выпуклый n -угольник, должно лежать между 2 и некоторым зависящим от n числом $k_{\max}$. При этом предложенные нами алгоритмы позволяют оценить это число как сверху, так и снизу. Более того, для рассмотренных значений $n \leq 100$ верхняя и нижняя оценки оказались равными, так что для этих значений задача решена полностью.

Приведем несколько возможных направлений дальнейшего исследования мегазадачи.

1. Предложенные алгоритмы не дают явную формулу для нижних и верхних оценок чисел n_k , а только позволяют последовательно вычислять эти оценки. Явная формула позволила бы находить оценки для данного k непосредственно.

2. Вычисляя для малых значений k верхние и нижние оценки, мы обнаружили, что соответствующие значения l во всех случаях совпадают. Это, в свою очередь, обеспечивает и совпадение самих оценок. Если совпадение значений l удастся доказать и для остальных значений k , мегазадача будет полностью решена.

Возможно, читатели смогут продвинуться в указанных направлениях или найти другие пути к окончательному решению мегазадачи.

Еще несколько задач

В заключение приведем еще несколько довольно сложных задач, близких к разобранным. Первые две взяты из статьи О.Ижболдина и Л.Курляндчика «Разрежем на треугольники» («Квант» №5 за 1996 г.), третью автор решал, будучи школьником на Московской математической олимпиаде в 1975 году, четвертая взята из Задачника «Кванта».

Задачи

2. Выпуклый многоугольник разрезан на треугольники. Докажите, что среди этих треугольников найдется хотя бы один, на границе которого нет вершин других треугольников.

3. При каких n выпуклый n -угольник может быть разрезан на треугольники так, чтобы ни у каких двух из этих треугольников не было общей стороны?

4. Существует ли выпуклый многоугольник, который можно разрезать на невыпуклые четырехугольники?

5 (М484). При каких n существует выпуклый n -угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников?

Важная лемма

Д.ШВЕЦОВ

В МАТЕМАТИКЕ ПОД ЛЕММОЙ ОБЫЧНО ПОНИМАЮТ УТВЕРЖДЕНИЕ, ПОЛЕЗНОЕ НЕ САМО ПО СЕБЕ, А НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ДРУГИХ БОЛЕЕ ВАЖНЫХ И КРАСИВЫХ ТЕОРЕМ. В НАШЕЙ СТАТЬЕ РЕЧЬ ПОЙДЕТ ОБ ОДНОЙ ТАКОЙ ЛЕММЕ, ВАЖНОСТЬ КОТОРОЙ ПОСТАРАЕМСЯ ПОКАЗАТЬ.

Теорема о средней линии известна школьникам начиная с

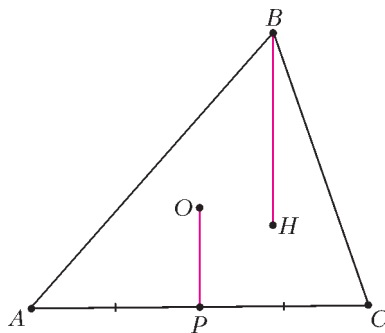


Рис. 1

8-го класса, а вот утверждение, о котором речь пойдет ниже, зачастую ускользает от них.

Важная лемма. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , H — его ортоцентр, P — середина стороны AC (рис. 1). Тогда $BH = 2OP$.

Доказательство. Дополним рисунок 1, а

именно отметим точки K, L, M — середины отрезков AB, BH, CH соответственно (рис. 2).

Заметим, что $OK \perp AB$, так как O — точка пересечения серединных перпендикуляров (центр описанной окружности), но и $CH \perp AB$, поэтому $CH \parallel OK$. Аналогично убеждаемся, что $OP \parallel BH$. Далее, KP — средняя линия треугольника ABC , поэтому $KP \parallel BC$ и $KP = \frac{1}{2}BC$. А LM — средняя линия треугольника BHC , следовательно, $LM \parallel BC$ и $LM = \frac{1}{2}BC$. Получаем, что у треугольников KOP и MHL стороны попарно параллельны, следовательно, их углы попарно равны (почему?). Но $KP = \frac{1}{2}BC = LM$, т.е. $\triangle KOP = \triangle LMH$. Поэтому $OP = LH = \frac{1}{2}BH$, чем и завершается доказательство.

Оказывается, что данная конструкция изобилует параллелограммами и средними линиями. В обозначениях рисунка 2 докажите такие утверждения.

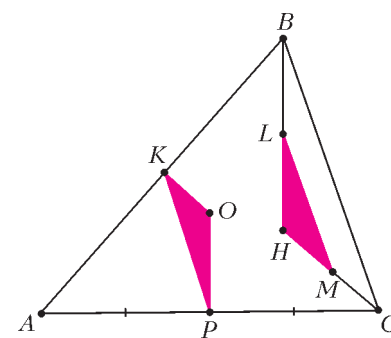


Рис. 2

Упражнения

1. Отрезок PL равен радиусу описанной окружности треугольника ABC .
2. Точка, симметричная точке O относительно середины медианы BP , лежит на высоте треугольника ABC .
3. Пусть биссектриса угла B пересекает отрезок PL в точке N . Тогда
 - а) $NL = BL$;
 - б) $\angle HNB = 90^\circ$.
4. Прямая PL перпендикулярна касательной, проведенной к описанной окружности треугольника ABC в точке B .

Более того, важная лемма позволяет довольно просто доказать такую известную теорему.

Теорема 1. Ортоцентр H , центр описанной окружности O и точка пересечения медиан M лежат на одной прямой (прямой Эйлера).

Доказательство. Пусть прямая OH пересекает медиану BP в точке G (рис. 3). Заметим, что треугольники OPG и HVG подобны по двум углам. Поэтому $\frac{BG}{GP} = \frac{BH}{OP}$. По важной лемме получаем, что $\frac{BH}{OP} = 2 \Rightarrow \frac{BG}{GP} = 2$. Таким образом, получаем, что точка G лежит на медиане BP и делит ее в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому точка G является точкой пересечения медиан треугольника ABC .

Прямая Эйлера тесно связана с другой жемчужиной элементарной геометрии.

Теорема 2. Середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.

Эту окружность называют окружностью девяти точек либо окружностью Эйлера.

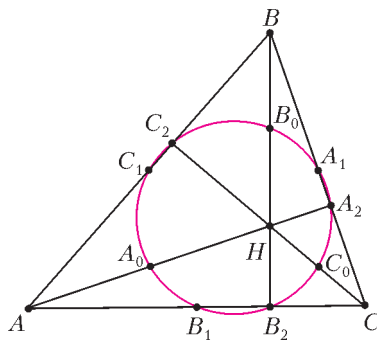


Рис. 4

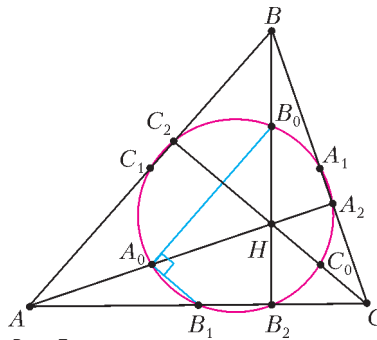


Рис. 5

На первый взгляд кажется, что такое утверждение должно доказываться очень трудно, но оказывается, что это не совсем так. Пусть A_0 , A_1 , A_2 – середины отрезков AH , BC и основания высоты из вершины A . Аналогично определим точки B_0 , B_1 , B_2 и C_0 , C_1 , C_2 (рис. 4). Покажем, что все указанные девять точек лежат на окружности с диаметром B_0B_1 . Заметим, что $\angle B_0B_2B_1 = 90^\circ$, поэтому точка B_2 лежит на этой окружности. В треугольнике AHC отрезок A_0B_1 является средней линией, поэтому $A_0B_1 \parallel CH$ (рис. 5). В треугольнике AHB A_0B_0 – средняя линия, поэтому $A_0B_0 \parallel AB$. С другой стороны, $CH \perp AB$,

следовательно, и параллельные им прямые будут взаимно перпендикулярны, т.е. $\angle B_1A_0B_0 = 90^\circ$, а значит, точка A_0 также лежит на окружности с диаметром B_0B_1 .

Похожим образом доказывается, что $\angle B_1C_1B_0 = 90^\circ$ (рис. 6). Действительно, C_1B_1 – средняя линия для треугольника ABC , поэтому $C_1B_1 \parallel CB$, а C_1B_0 – средняя линия для треугольника AHB , откуда заключаем, что $C_1B_0 \parallel AH$. Но $AH \perp BC$, следовательно, и $C_1B_1 \perp C_1B_0$, т.е. $\angle B_1C_1B_0 = 90^\circ$, и, значит, точка C_1 лежит на окружности с диаметром B_0B_1 .

Теперь докажем, что и $\angle B_1C_2B_0 = 90^\circ$ (рис. 7). Заметим, что C_2B_1 – медиана прямоугольного треугольника AC_2C , проведенная к гипотенузе, поэтому $\angle B_1C_2C = \angle C_2CB_1$. Обозначим эти углы через α . Тогда из прямоугольного треугольника CB_2H найдем, что $\angle B_2HC = 90^\circ - \alpha$, но $\angle C_2HB_0 = \angle B_2HC$ как вертикальные, т.е. $\angle C_2HB_0 = 90^\circ - \alpha$. С другой стороны, C_2B_0 – медиана прямоугольного треугольника HC_2B , проведенная к гипотенузе BH , поэтому $\angle B_0C_2H = \angle C_2HB_0 = 90^\circ - \alpha$. Следовательно, $\angle B_1C_2B_0 = 90^\circ$.

Для оставшихся трех точек C_0 , A_1 , A_2 можно провести аналогичные рассуждения. Таким образом, мы показали, что все девять точек лежат на окружности с диаметром B_0B_1 , т.е. *центром окружности девяти точек является середина отрезка B_0B_1* .

Пусть прямая OH пересекает отрезок B_0B_1 в точке O_9 (рис. 8). Заметим, что, согласно важной лемме, $OB_1 = HB_0$. С другой стороны, $\angle O_9B_1 = \angle B_0O_9H$ (как вертикальные) и $\angle O_9OB_1 = \angle O_9HB_0$ (как накрест лежащие углы). Следовательно, $\triangle O_9B_1 = \triangle H O_9 B_0 \Rightarrow B_0O_9 = B_1O_9$. Другими словами, мы доказали, что *центр окружности девяти точек лежит на прямой Эйлера и является серединой отрезка, соединяющего ортоцентр и центр описанной окружности*.

Теперь посмотрим на другие любопытные следствия из важной леммы.

Задача 1. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H_c – ортоцентр треугольника ABD , H_b – ортоцентр треугольника ACD . Докажите, что $BC = H_bH_c$ (рис. 9).

На первый взгляд кажется, что задача не имеет отношения к важной лемме, но стоит отметить центр окружности (точка

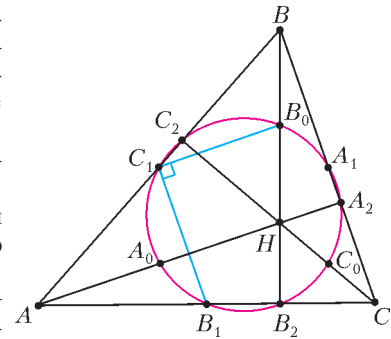


Рис. 6

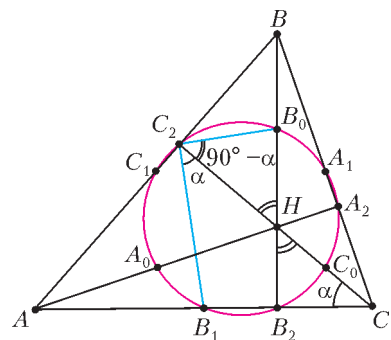


Рис. 7

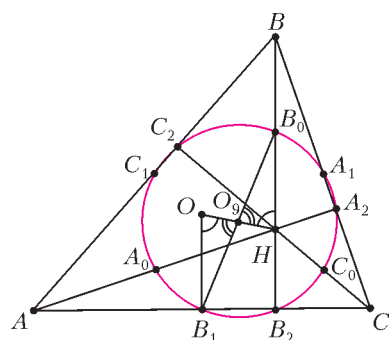


Рис. 8

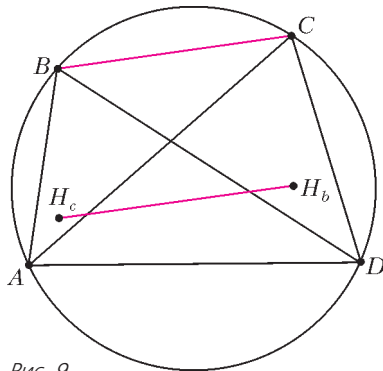


Рис. 9

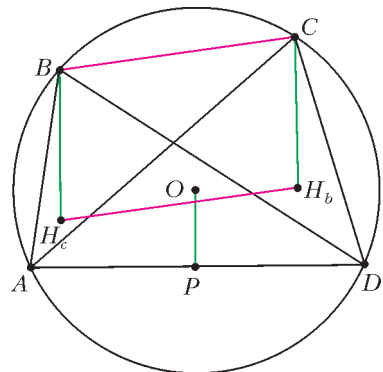


Рис. 10

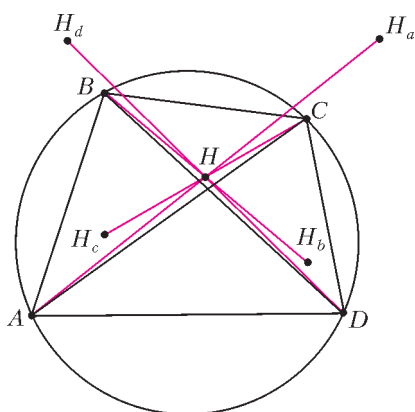


Рис. 11

Таким образом, ортоцентр четырехугольника $ABCD$ является серединой каждого из отрезков AH_a , BH_b , CH_c и DH_d .

Пусть L — середина стороны BC вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 12). Проведем прямую LH (H — ортоцентр четырехугольника). Как мы выяснили выше, H — середина отрезка CH_c , т.е. LH —

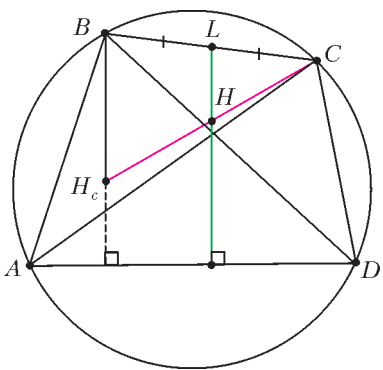


Рис. 12

О) и середину стороны AD (точка P), как сразу же все становится почти очевидным (рис. 10).

В самом деле, по важной лемме для треугольника ABD заключаем, что $BH_c = 2OP$. А из треугольника ACD опять же по важной лемме найдем, что $CH_b = 2OP$. Следовательно, $BH_c = CH_b$, но ведь $BH_c \perp AD$ и $CH_b \perp AD$, т.е. четырехугольник BCH_bH_c — параллелограмм, откуда и следует нужное нам утверждение.

Теперь определим еще и точки H_a , H_d . Тогда оказывается, что прямые AH_a , BH_b , CH_c , DH_d пересекаются в одной точке (рис. 11).

Эта теорема доказывается на удивление просто. В решении задачи 1 мы доказали, что BCH_bH_c — параллелограмм, поэтому отрезки BH_b и CH_c точкой пересечения делятся пополам. Такими же рассуждениями убеждаемся, что любая пара из наших отрезков делится точкой пересечения пополам, поэтому все четыре отрезка имеют общую середину.

Точку H пересечения прямых будем называть **ортоцентром** че-

тырехугольника. Таким образом, ортоцентр четырехугольника $ABCD$ является серединой каждого из отрезков AH_a , BH_b , CH_c и DH_d . Пусть L — середина стороны BC вписанного четырехугольника $ABCD$ (рис. 12). Проведем прямую LH (H — ортоцентр четырехугольника). Как мы выяснили выше, H — середина отрезка CH_c , т.е. LH — средняя линия для треугольника BCH_c , откуда $LH \parallel BH_c$, но $BH_c \perp AD$, поэтому $LH \perp AD$. Другими словами, перпендикуляр, опущенный из середины L стороны BC на противоположную сторону AD , проходит через ортоцентр H этого четырехугольника. Разумеется, аналогичное утверждение верно и для

середин других сторон. Получаем, что все такие прямые пересекаются в одной точке — ортоцентре четырехугольника (рис. 13).

Это утверждение называют **теоремой Монжа**.

Медиану четырехугольника определим как отрезок, соединяющий середины противоположных сторон. В треугольнике три медианы пересекаются в одной точке, а для четырехугольника имеется такой аналог.

Задача 2. Пусть K , L , M , N , E , F — середины отрезков AB , BC , CD , AD , AC и BD соответственно. Тогда отрезки KM , LN , EF пересекаются в одной точке (рис. 14).

Доказательство опять-таки использует среднюю линию треугольника. Заметим, что KE — средняя линия для треугольника ABC , поэтому

$$KE = \frac{1}{2} BC \text{ и } KE \parallel BC.$$

Аналогично из треугольника BCD найдем, что $FM = \frac{1}{2} BC$ и $FM \parallel BC$.

Таким образом, получаем, что четырехугольник $KFME$ — параллелограмм. Следовательно, отрезки KM и EF имеют общую середину. Аналогично можно показать, что середины отрезков EF и LN совпадают. Итак, мы показали, что три отрезка KM , LN , EF имеют общую середину G , т.е. они пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Точку G будем называть **центроидом** четырехугольника.

Теперь все готово для доказательства следующей замечательной теоремы.

Теорема 3 (прямая Эйлера вписанного четырехугольника). *Центроид G , центр описанной окружности O и ортоцентр H вписанного четырехугольника лежат на одной прямой (рис. 15).*

Доказательство очень сходно с доказательством теоремы Монжа. В самом деле, пусть N , L — середины сторон AD , BC соответственно, а H_c — ортоцентр треугольника ABD (рис. 16). Как мы выяснили при доказательстве теоремы

Монжа, $LH = \frac{1}{2} BH_c$ и

$LH \parallel BH_c$. С другой стороны, по важной лемме для треугольника ABD получаем, что $BH_c = \frac{1}{2} ON$, но ведь $ON \parallel BH_c$. Следовательно, четырехугольник $OLHN$ — параллелограмм, поэтому прямая OH содержит середину NL . Но чуть выше мы выяснили, что центроид G четырех-

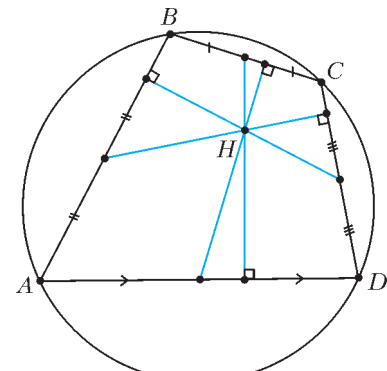


Рис. 13

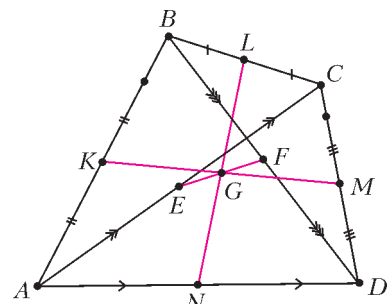


Рис. 14

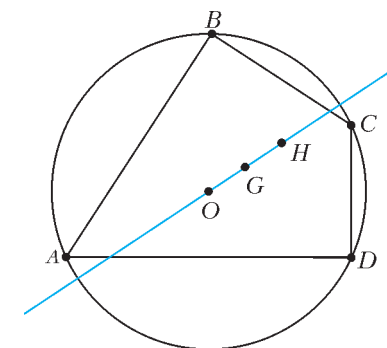


Рис. 15

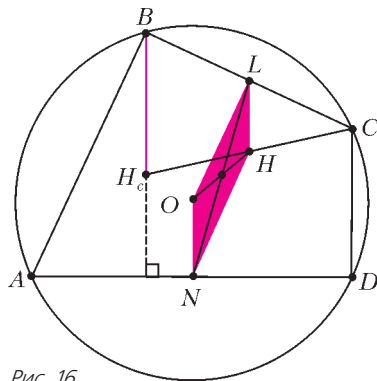


Рис. 16

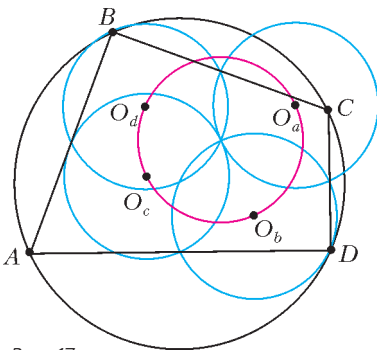


Рис. 17

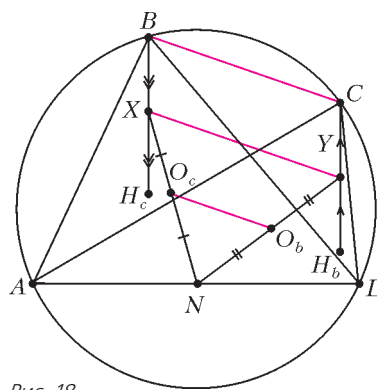


Рис. 18

единяющий середины противоположных сторон параллелограмма, поэтому $XY \parallel BC$. С другой стороны, в треугольнике XNY отрезок O_bO_c является средней линией, поэтому $O_cO_b \parallel XY$. Следовательно, $O_cO_b \parallel BC$, аналогичные рассуждения верны и для других пар сторон четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$, т.е. получаем, что у этих четырехугольников стороны попарно параллельны, следовательно, и углы между соответствующими сторонами равны. Но раз в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$, тогда и $\angle O_b + \angle O_d = 180^\circ$ (рис. 19). Откуда и следует вписанность четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$.

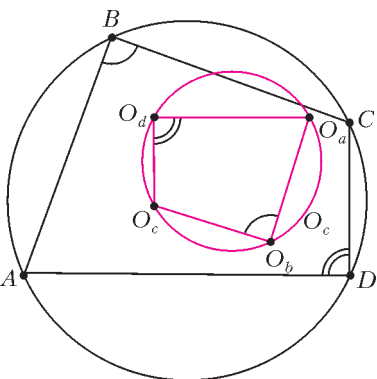


Рис. 19

угольника является серединой отрезка LN (см. рис. 15)! Откуда и следует, что точки O , G , H лежат на одной прямой. Более того, мы показали, что точка G — середина отрезка OH .

Мы обобщили прямую Эйлера, а можно ли как-то обобщить окружность девяти точек? Оказывается, что для вписанного четырехугольника $ABCD$ верен такой факт.

Теорема 4 (окружность Эйлера вписанного четырехугольника). Центры O_d , O_a , O_b , O_c окружностей девяти точек треугольников ABC , BCD , CDA , DAB соответственно лежат на одной окружности (рис. 17).

Пусть H_c , H_b — ортоцентры треугольников ABD , ACD соответственно, а X , Y — середины отрезков BH_c , CH_b соответственно. Как мы выяснили выше в доказательстве окружности девяти точек для треугольника, O_c , O_b — середины отрезков XN , YN соответственно, где N — середина стороны AD (рис. 18).

Мы знаем, что BCH_bH_c — параллелограмм, тогда получаем, что XY — отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, поэтому $XY \parallel BC$. С другой стороны, в треугольнике XNY отрезок O_bO_c является средней линией, поэтому $O_cO_b \parallel XY$. Следовательно, $O_cO_b \parallel BC$, аналогичные рассуждения верны и для других пар сторон четырехугольников $ABCD$ и $O_aO_bO_cO_d$, т.е. получаем, что у этих четырехугольников стороны попарно параллельны, следовательно, и углы между соответствующими сторонами равны. Но раз в четырехугольнике $ABCD$ $\angle B + \angle D = 180^\circ$, тогда и $\angle O_b + \angle O_d = 180^\circ$ (рис. 19). Откуда и следует вписанность четырехугольника $O_aO_bO_cO_d$.

Оказывается, что эти четыре окружности девяти точек пересекаются в одной точке (см. рис. 17). Согласно упражнению 1 получаем, что $XN = R = YN$, где R — радиус окружности, описанной вокруг четырехугольника $ABCD$, т.е. треугольник XNY — равнобедренный (рис. 20).

С другой стороны, как мы выяснили выше, ортоцентр H четырехугольника $ABCD$ является центром (точкой пересечения диагоналей) параллелограмма BCH_bH_c . Нетрудно видеть, что отрезок XY проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма BCH_bH_c , т.е. через точку H , при этом $XH = HY$. Таким образом, NH является медианой в равнобедренном треугольнике XNY , поэтому $\angle XHN = 90^\circ$. Следовательно, точка H лежит на окружности с диаметром XN , т.е. на окружности девяти точек треугольника ABD . Аналогично можно показать, что точка H лежит и на трех оставшихся окружностях девяти точек. Итак, мы доказали, что окружности девяти точек пересекаются в ортоцентре четырехугольника.

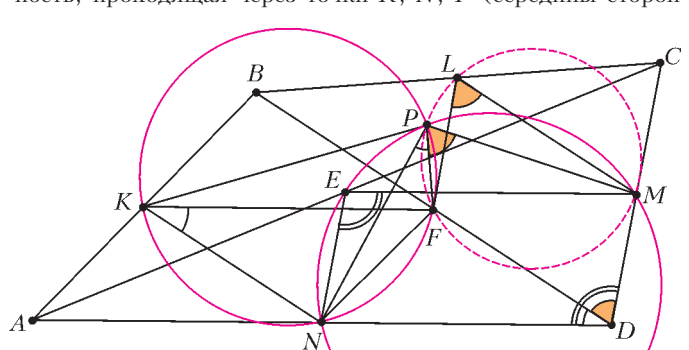
Но оказывается, что окружности девяти точек треугольников ABC , BCD , CDA , DAB пересекаются в одной точке для любого четырехугольника $ABCD$, а не только для вписанного!

Теорема 5. Окружности девяти точек треугольников ABC , BCD , CDA , DAB пересекаются в одной точке.¹

Пусть K , L , M , N , E , F — середины отрезков AB , BC , CD , DA , AC и BD соответственно (рис. 21). Тогда окружность девяти точек для треугольника ABD — это просто окружность, проходящая через точки K , N , F (середины сторон

этого треугольника), аналогично окружность девяти точек для треугольника ACD — окружность, описанная вокруг треугольника NEM . Пусть эти две окружности пересекаются в точке P . Заметим, что четырехугольник $KFDN$ — параллелограмм (почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, так как опираются на одну дугу NF . Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остается заметить, что четырехугольник $LMDP$ также является па-

раделом (почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, так как опираются на одну дугу NF . Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остается заметить, что четырехугольник $LMDP$ также является па-



раделом (почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, так как опираются на одну дугу NF . Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остается заметить, что четырехугольник $LMDP$ также является па-

Рис. 20

раделом (почему?), поэтому $\angle NKF = \angle NDF$. С другой стороны, $\angle NKF = \angle NPF$, так как опираются на одну дугу NF . Получаем, что $\angle NDF = \angle NPF$. Такими же рассуждениями приходим к равенству $\angle NDM = \angle NPM$. Остается заметить, что четырехугольник $LMDP$ также является па-

¹ В 2003 году это утверждение предлагалось доказать участникам математической олимпиады Санкт-Петербурга.

параллелограммом (почему?), поэтому $\angle FLM = \angle FDM$. Из полученных равенств приходим к такой цепочке:

$$\begin{aligned}\angle FPM &= \angle NPM - \angle NPF = \angle NDM - \angle NKF = \\ &= \angle NDM - \angle NDF = \angle FDM = \angle FLM.\end{aligned}$$

Но равенство $\angle FPM = \angle FLM$ означает, что точки F, P, L, M лежат на одной окружности, т.е. точка P лежит на окружности девяти точек треугольника BCD . Аналогично доказывается, что точка P лежит и на окружности девяти точек треугольника ABC . Таким образом, наше утверждение доказано.

Полученную точку P называют *точкой Понселе* четырехугольника $ABCD$.

После этого возникает вопрос: а можно ли обобщить прямую Эйлера на случай невписанного четырехугольника? При определении ортоцентра четырехугольника мы использовали важную лемму, т.е. то, что четырехугольник вписан, да и какой аналог центру описанной окружности можно придумать для произвольного четырехугольника? Но оказывается, что есть такое утверждение.

Теорема 6 (А. Г. Мякишев). Пусть R – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, G – центроид четырехугольника, O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников ARD и BRC , ARB и CRD . Тогда G – середина OH .²

Как мы отмечали выше, центроид G четырехугольника совпадает с серединой отрезка FE , E и F – середины диагоналей AC и BD соответственно (рис. 22).

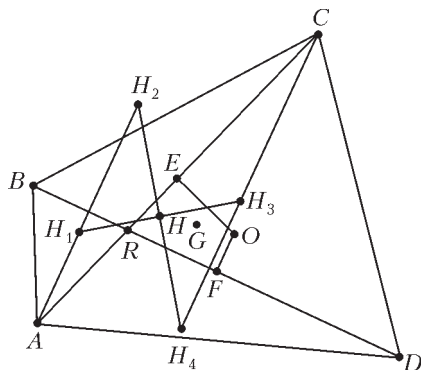


Рис. 22

Далее, пусть H_1, H_2, H_3, H_4 – ортоцентры треугольников ARB, DRA, CRD, BRC соответственно. Четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$ является параллелограммом, так как его противоположные стороны попарно параллельны. Поэтому точка H совпадает с серединой отрезка H_2H_4 . Теперь заметим, что отрезки H_2H_4 и AC заключены между параллельными прямыми AH_2 и CH_4 , следовательно, прямая HE , проходящая через середины этих отрезков, параллельна прямым AH_2 и CH_4 (это следует из теоремы о средней линии). Таким образом, получаем, что $HE \parallel CH_4$, но $CH_4 \parallel OF$ (почему?), следовательно, $HE \parallel OF$. Аналогично убеждаемся, что и $HF \parallel EO$. Итак, получаем, что четырехугольник $HEOF$ – параллелограмм, а раз точка G – середина одной его диагонали EF , то она является серединой и другой его диагонали HO , что и завершает доказательство.

Задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC точка H_1 симметрична ортоцентру H относительно вершины C , а точка C_1 симметрична точке C относительно середины стороны AB . Докажите, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC , является серединой отрезка H_1C_1 .

2. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Описанные окружности треугольников ABC, BC_1A_1 повторно пересекаются в точке P . Докажите, что прямая PH проходит через середину отрезка AC .

3. Прямая l – касательная к окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC , проведенная в точке B . Точка K – проекция ортоцентра треугольника на прямую l , а точка L – середина стороны AC . Докажите, что треугольник BKL равнобедренный.

4. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по точке H пересечения его высот, центру O описанной окружности и прямой l , на которой лежит одна из его сторон.

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5$ – вписанный выпуклый пятиугольник, H_1 – ортоцентр треугольника $A_2A_4A_5$, M_1 – середина стороны A_3A_4 , l_1 – прямая, проходящая через точки H_1 и M_1 . Аналогично определим прямые l_2, l_3, l_4, l_5 . Докажите, что все эти прямые l_i пересекаются в одной точке.

6. Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точки M и N – середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой MN с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине A равно AH .

7. Пусть A_1 – точка, симметричная точке A относительно прямой BC . Тогда прямая, проходящая через A и центр описанной окружности треугольника A_1BC , проходит через O_9 – центр окружности 9-ти точек треугольника ABC . Докажите это.

8. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC и проходящая через ортоцентр H , пересекает BC в точке D , а прямая, параллельная стороне BC и проходящая через ортоцентр, пересекает прямую BC в точке E . Точки D' и E' – основания перпендикуляров, опущенных из точек D и E на BC . Докажите, что прямая $D'E'$ пересекает описанную окружность в точках B', C' , которые диаметрально противоположны точкам B и C .

9. Даны четыре точки A, B, C, D . Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC . Точки A_2, B_2, C_2, D_2 – ортоцентры треугольников $B_1C_1D, C_1D_1A_1, D_1A_1B, A_1B_1C$ и т.д. Докажите, что все окружности, проходящие через середины сторон таких треугольников, пересекаются в одной точке.

10. Пусть ω_a – окружность, проходящая через середины сторон AB, AD и диагонали AC четырехугольника $ABCD$. Аналогично определяются окружности $\omega_b, \omega_c, \omega_d$. Докажите, что окружности $\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d$ пересекаются в одной точке.

11. Дан остроугольный треугольник ABC и точка P , не совпадающая с точкой пересечения его высот. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAB, PAC, PBC и ABC , а также окружность, проходящая через проекции точки P на стороны треугольника ABC , пересекаются в одной точке.

Автор благодарен В.Ю.Протасову, а также ученикам школы №179 г. Москвы Зайцевой Юлии, Михайлову Ивану и Некрасовой Татьяне.

² Эта задача предлагалась в 2005 году участникам финального тура геометрической олимпиады имени И.Ф.Шарыгина.