А.Полянский Воробьями по пушкам.

> Во всем мире нет ничего более мягкого и податливого, чем вода, но она точит твердое и крепкое. Никто не может ее одолеть, хотя любой может ее потеснить. Податливое побеждает крепкое, мягкое одолевает твердое,— все это знают, но никто не осмеливается действовать так.
>
> Лао Цзы «Дао дэ цзин».
> Из главы 78.

Речь пойдет о трех простых и изящных фактах (мы их будем называть воробьями) из элементарной геометрии, с помощью которых несложно удается решить достаточно много непростых задач.

Меня часто спрашивают: почему воробьи? Просто потому что сами факты выглядят простыми, порой даже смешными. Но они оказываются удивительно сильными, что способны побороть очень сложные задачи, которые при первом взгляде кажутся неприступными крепостями (пушки). Именно отсюда и возникло название данного сюжета: «Воробьями по пушкам». Слабое побеждает сильное!

Надеюсь, что читатель сможет восхититься этой красотой!

Если читатель не заинтересован сразу решать эту подборку, то он может обратиться к статье [4], где разобраны некоторые из приведенных ниже задач.

Первый воробей.

1. Задан неравнобедренный треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что равенство $AC_0 = CA_0$ выполняется тогда и только тогда, когда точки A_0, C_0, B_1, B лежат на одной окружности. Это 1-й воробей.

Замечание к задаче 1. Следует отметить, что если точки C_0 и A_0 «выбегут» за стороны AB и CB, то факты остаются также справедливыми. Следует только оговорить, что если C_0 не будет находиться на луче AB и (или) A_0 не будет находиться на луче CB, то длины отрезков AC_0 и (или) CA_0 будем считать отрицательными.

2. [1] Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC. Описанные окружности треугольников A_0B_0C, AB_0C_0 и A_0BC_0 пересекают второй раз описанную окружность w треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.

3. [2] Пусть на сторонах BA и BC треугольника ABC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, а точки M и M_0 — середины отрезков AC и A_0C_0. Докажите, что если $AC_0 = CA_0$, то прямая MM_0 параллельна биссектрисе $\angle ABC$.

[1] Емельянов Л.А., Всероссийская олимпиада школьников, 2005 год, финал, 11.3

[2] Емельянов Л.А., 21 Турнир Городов, 1999 год, сложный вариант, 10–11 класс, задача 4

4. [3] Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания вневписанных окружностей со сторонами BC, CA и AB треугольника ABC. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $A_0B_0C_0$ лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

Второй воробей.

5. Задан треугольник ABC, на его сторонах AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно, I — центр вписанной окружности в ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через I тогда и только тогда, когда $AC_0 + CA_0 = AC$. Это 2-й воробей.

Замечание к задаче 5. Во-первых, справедливо замечание к задаче 1. Во-вторых, эту задачу также полезно понимать так:

5'. На прямых AB и BC выбраны точки C_0 и A_0 соответственно. Обозначим через J точку являющуюся серединой дуги AC (без точки B) окружности описанной около треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника A_0BC_0, проходит через точку J тогда и только тогда, когда $BA_0 + BC_0 = BA + BC$ (или $AA_0 = -CC_0$).

6. [4] На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Точки E и F симметричны точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

7. [5] Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть I_A, I_B и I_C – центры окружностей, вписанных в треугольники AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр описанной окружности около треугольника $I_AI_BI_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

8. [6] Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. Пусть O_A, O_B и O_C – центры окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C. Докажите, что центр вписанной окружности в треугольник $O_AO_BO_C$, совпадает с центром вписанной окружности треугольника ABC.

9. [7] Пусть на стороне AC выбрана точка D. Обозначим через I_A и I_C центры вписанных окружностей в треугольники ABD и CBD, а через B_0' точку касания вписанной окружности со стороной AC. Докажите, что угол $I_AB_0'I_C$ — прямой.

10. [8] На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1. Пусть K — середина A_1C_1, а I — центр вписанной окружности в треугольник ABC. Оказалось, что четырехугольник A_1BC_1I вписанный. Докажите, что угол AKC тупой.

11. [9] Точки O и I являются центрами описанной и вписанной окружностей в треугольнике ABC соответственно. На сторонах BC, CA и AB выбраны такие точки D, E и F, что $BD + BF = CA$ и $CD + CE = AB$. Окружности описанные около треугольников BFD и CDE пересекаются в точках P и D. Докажите, что $OP = OI$.

Первый+второй воробей.

[3] Полянский А.А., IMO 2013, задача 3

[4] Емельянова Т.Л, Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, региональный этап, 9.7

[5] Полянский А.А., Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, финал, 9.6

[6] Полянский А.А., Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, финал, 11.6

[7] Шарыгин И.Ф, фольклор

[8] Полянский А.А., 34 Турнир Городов, 2012 год, сложный тур, 10–11 классы, задача 4

[9] IMO Shortlist 2013, G6

12. [10] Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности треугольника ABC, M — середина стороны AC. Докажите, что центры I_A и I_C вписанных окружностей в треугольники AMB и CMB, точки B и B_1 лежат на одной окружности.

13. [11] Дан неравнобедренный треугольник ABC ($AB < BC$), B_1 — середина дуги ABC описанной окружности w треугольника ABC, I — центр вписанной окружности в ABC, M — середина стороны AC. Докажите, что $\angle IB_1B = \angle IMA$.

14. [12] Точки E и F — середины большой дуги A и малой дуги AC описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC ($AB < BC$). Пусть G — проекция E на BC. Докажите, что описанная окружность около треугольника ABG проходит через середину отрезка BF.

Третий воробей.

15. [13] Точки X и Y движутся с постоянными скоростями (не обязательно равными) по двум прямым, пересекающимся в точке O. Докажите, что окружность, описанная около треугольника XYO, проходит через 2 фиксированные точки O и Z, где Z является центром поворотной гомотетии, переводящий местоположения точек X в местоположения точек Y. Это 3-й воробей.

Замечание. Первые два воробья являются частными случаями 3-го.

16. [14] Дан треугольник ABC и окружность с центром O, проходящая через вершины A и C и повторно пересекающая отрезки AB и BC в различных точках K и N соответственно. Окружности, описанные около треугольников ABC и KBN, имеют ровно две общие точки B и M. Докажите, что угол OMB — прямой.

17. [15] В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

18. * [16] (усиление задачи 2) Точки A_1, B_1, C_1 выбраны на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC соответственно. Описанные окружности треугольников C_1AB_1, A_1BC_1, B_1CA_1 пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_2, B_2, C_2 соответственно (эти точки отличны от вершин треугольника ABC). Точки A_3, B_3, C_3 симметричны A_1, B_1, C_1 относительно соответствующих середин сторон. Докажите, что треугольники $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ подобны.

19. [17] На высотах (но не на продолжениях высот) остроугольного треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1, отличные от точки пересечения высот H, такие, что сумма площадей треугольников ABC_1, BCA_1, CAB_1 равна площади треугольника ABC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через H.

Приложение одной задачи.

[10] Кунгожин М.А., Всероссийская олимпиада школьников, 2011 год, финал, 11.8

[11] Бадзян А.В., Всероссийская олимпиада школьников, 2005 год, зональный этап, 9.4 и 10.3

[12] Ивлев Ф.А., Всероссийская олимпиада школьников, 2012 год, окружной этап, 11.4

[13] см. задачу 19.28 в [5]

[14] Шарыгин И.Ф., IMO 1985, задача 5, Берлов С.Л., Всероссийская олимпиада школьников, 1997 год, финал, 9.7 и 10.6 (в последних двух задачах чуть другое расположение точек)

[15] Берлов С.Л., Всероссийская олимпиада школьников, финал, 2000 год, 10.3

[16] Емельянов Л.А., IMO Shortlist 2006, G6, см. [3]

[17] Берлов С.Л, Всероссийская олимпиада школьников, 2001 год, финал, 10.7

20. [18] (обобщение задачи 13) Пусть на дуге BC (не содержащей точки A) описанной окружности w треугольника ABC выбрана точка E, а на стороне AC — точка F. Докажите, что через луч EF — биссектриса угла AEC тогда и только тогда, когда $\angle IEB = \angle IFA$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

21. [19] (теорема Веррьера) Если полувписанная окружность касается описанной окружности треугольника ABC внутренним образом в точке B', а сторон AB и BC в точках C_0 и A_0. Докажите, что середина отрезка A_0C_0 — центр I вписанной окружности треугольника ABC.

22. Пользуясь условием из предыдущей задачи, докажите, что прямая $B'I$ проходит через середину дуги ABC описанной окружности.

23. [20] На дуге AC описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку B, выбрана точка E. Докажите, что центры I_a и I_c вписанных окружностей в треугольники AEB и CEB, точка E и точка T_b касания полувписанной (соответствующей вершине B) и описанной окружностей лежат на одной окружности.

24. [21] Трапеция $ABCD$ вписана в окружность w ($AD||BC$). Окружности, вписанные в треугольники ABC и ABD, касаются оснований трапеции BC и AD в точках P и Q соответственно. Точки X и Y — середины дуг BC и AD окружности w, не содержащих точек A и B соответственно. Докажите, что прямые XP и YQ пересекаются на окружности w.

Теорема Микеля и третий воробей.

25. [22] (теорема Микеля) Даны четыре прямые l_1, l_2, l_3, l_4 общего положения. Обозначим через w_1 окружность описанную около треугольника образованного l_2, l_3, l_4. Аналогично определяем w_2, w_3, w_4. Докажите, что эти окружности проходят через одну точку.

Замечание к теореме Микеля и третьему воробью. Эти два факта вместе говорят следующее:

«Тараканы» X, Y движутся равномерно и непрерывно по прямым l_x, l_y, пересекающимся в точке O. В первоначальный момент они находились в точках X_0, Y_0, через некоторое время они оказались в точках X_1, Y_1, а еще спустя некоторое время в точках X_2, Y_2. Тогда точка Микеля для прямых l_x, l_y, X_0Y_0, X_1Y_1 и для прямых l_x, l_y, X_0Y_0, X_2Y_2 одна и та же! На самом деле, это точка Микеля для пятерки прямых. Именно об этом следующая задача.

26. [23] Дан четырехугольник $ABCD$ такой, что $BC = AD$ и BC не параллельна AD. На сторонах BC и AD выбраны такие точки E и F, что $BE = DF$. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF — в точке Q, прямые EF и AC — в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PQR (при изменении положений точек E и F), проходят через одну точку, отличную от P.

27. [24] Треугольник ABC ($AB > BC$) вписан в окружность w. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Прямые MN и AC пересекаются в точке K. Пусть P — центр вписанной окружности треугольника AMK, а Q — центр вневписанной окружности треугольника CNK, касающейся стороны CN. Докажите, что середина дуги ABC окружности w равноудалена от точек P и Q.

---

[18] Все задачи в этом разделе решаются с использованием данной задачи

[19] См. в [2] главу V, пункт 39

[20] Национальная математическая олимпиада Ирана, 1997 год, 4-й тур, задача 4.

[21] Заславский А.А., Протасов В.Ю., Устная олимпиада по геометрии, 2013 год, 10.6

[22] Решается не через воробьев. См. в [2] главу I, пункт 47, а также задачу 2.88 в [5]

[23] IMO 2005, задача 5

[24] Кунгожин М.А., Всероссийская олимпиада школьников, финал, 2014 год, 10.4 и 11.4

Список литературы

[1] А. Акопян, *Геометрия в картинках*, Москва, 2012

[2] Д. Ефремов, *Новая геометрия треугольника*, Одесса, 1902

[3] L.A. Emelyanov, P.A. Kogevnikov, Isotomic similarity, *J. of clas. geom.*, **1**(2012), pp. 17–22

[4] А. Полянский “Воробъями по пушкам”, *Квант*, 2012, N2

[5] В.В. Прасолов, *Задачи по геометрия*, Москва, МЦМНО, 2006

[6] http://problems.ru

Благодарности.

Хочется сказать большое спасибо за поддержку всем тем, кто так или иначе содействовал написанию этого сюжета. Особая благодарность Медеубеку Кунгожину, молодому автору шедевров элементарной геометрии, чья задача номер **12** породила этот сюжет, а также Арсению Акопяну, автору книги *Геометрия в картинках*, именно в ней были найдены многие задачи этой подборки!