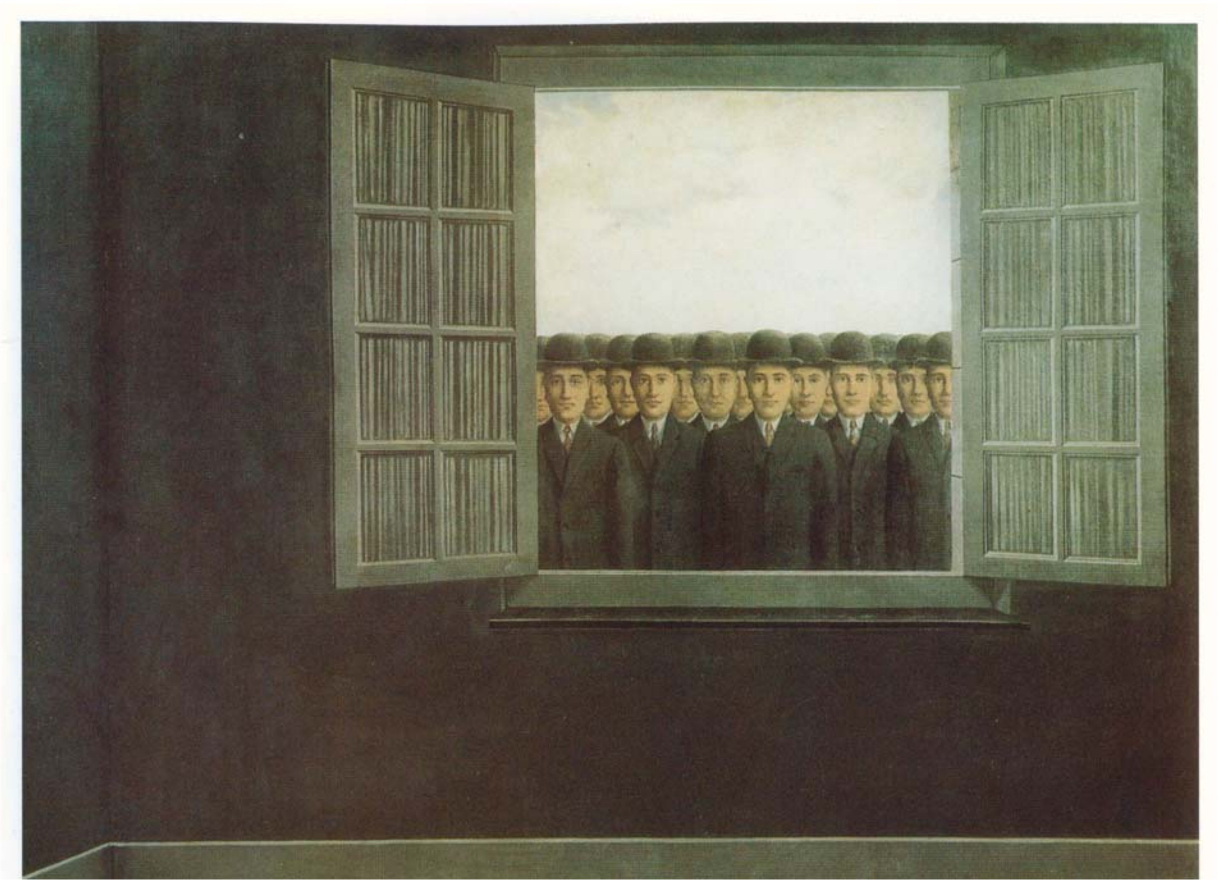
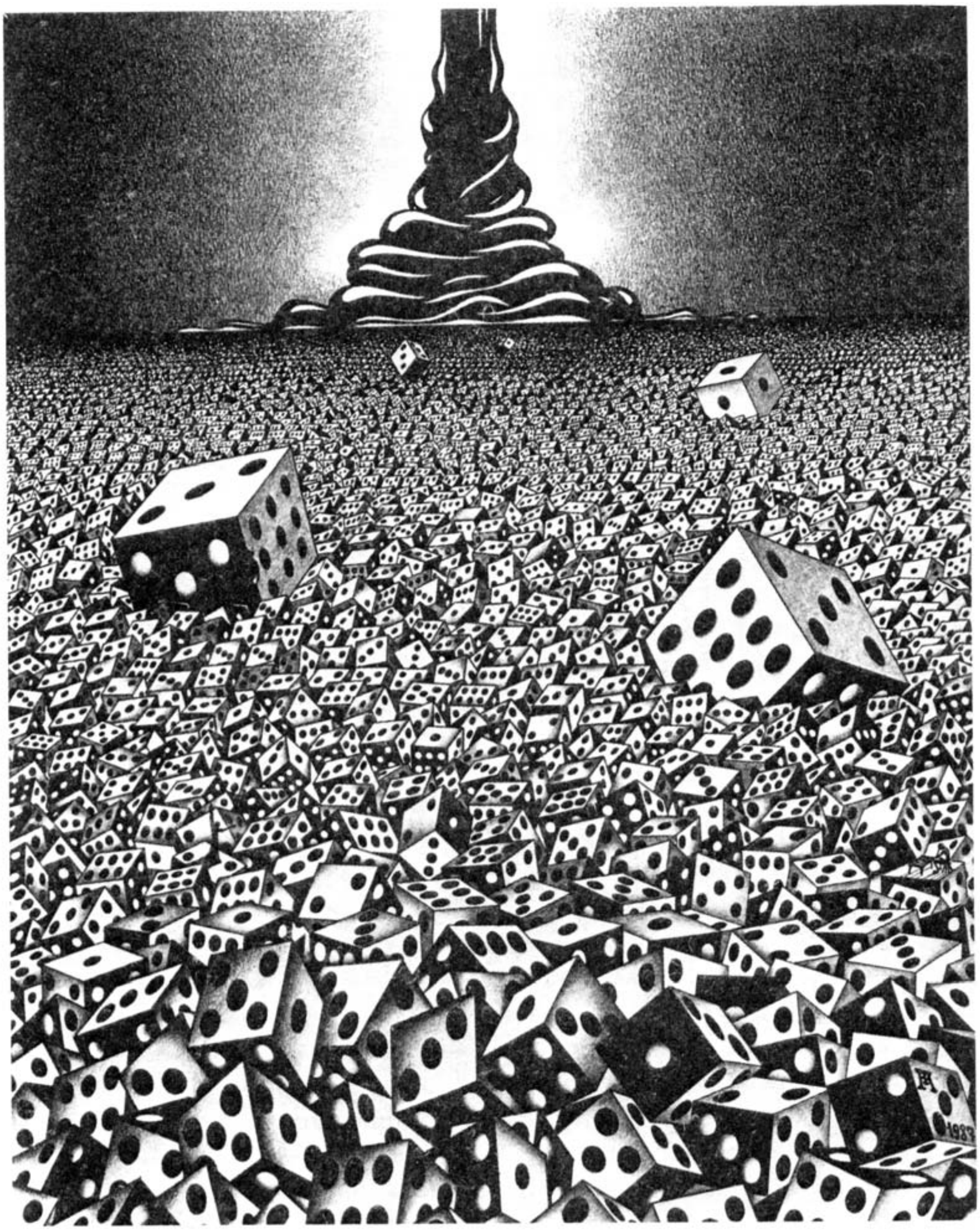
А. Г. МЯКИШЕВ

ЗНАКОМСТВО С ТЕОРИЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ



Москва 2008



На обложке:

Рене Магритт. *Месяц сбора винограда.*

Следующий рисунок:

А.Т. Фоменко. Из книги: *Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире.*

Содержание

Предисловие

Взяв на себя труд (как говорится, по долгу службы) ознакомить учащихся старших классов одной из московских школ с основами теории вероятностей, автор столкнулся при подготовке с рядом проблем. Одной из самых существенных оказалась проблема поиска и отбора подходящей литературы по предмету. Ведь ВУЗовские учебники носят слишком специальный для школьников характер и отличаются подчеркнуто сухой манерой изложения, а многочисленные занимательно-развлекательные книжки по вероятности чересчур популярны и не могут служить учебником.

Поэтому пришлось попробовать выстроить курс, как некое среднее между указанными направлениями.

Поскольку лекции читались уже после краткого курса начал математического анализа, это обстоятельство позволило включить в них классические задачу Бюффона об игле, задачу о взаимной простоте двух случайно взятых натуральных чисел - и некоторые другие красивые и неожиданные вещи, заслуженно именуемые *классическими*, которыми так богата теория вероятностей. Одну из своих основных целей автор как раз и видел в том, чтобы собрать и представить подобные задачи наиболее полным образом - так как школьникам о них едва упоминают, ввиду, якобы, отсутствия надлежащей подготовки, а студентам - за недостатком учебных часов: пройти нужно много всего, и времени просто не остается.

На базе этих лекций, прочитанных в Химическом Лицее (общеобразовательная школа № 1303), и была создана предлагаемая Вашему вниманию книга.

Во избежание недоразумений следует особо подчеркнуть, что данное пособие вовсе не претендует на роль обязательного школьного учебника, так как рассчитано на уровень, превышающий средний. Оно адресовано, в первую очередь, *пытливому* школьнику (т. е. тому, кто уже знает, что иная задача только лишь для одного осмысления - не решения! - требует нескольких часов упорного труда, за который полагается сугубо нематериальное вознаграждение: краткое соприкосновение с *красотой* и *истиной*, а порой даже, как высшая награда, *радость творчества*). Автор также искренне надеется, что его книга сможет оказать некоторую помощь тем учителям, которые имеют желание и возможность работать с увлеченными математикой подростками. Наконец, не исключено, что какую-то пользу из этой книги смогли бы извлечь студенты ВУЗов нематематического профиля, в программы многих из которых, так или иначе, включены элементы теории вероятностей.

В заключении хотелось бы выразить благодарность школьникам Химического Лицея – в разные годы побывавшими пусть невольными, но полноправными соавторами данной работы.

Москва, июнь, 2008 г.

Глава первая
ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

Теория вероятностей как наука родилась в середине 17-го века. Конечно, и ранее было известно, что некоторые случайные явления ведут себя, так сказать, не полностью случайно и таят в себе некоторые закономерности. Согласно историческим источникам, устойчивость частот случайных событий, связанных с рождаемостью и потреблением, подмечена была уже в Древнем Китае и в Древней Греции.

Но только в середине 17-го столетия, благодаря усилиям таких выдающихся личностей, как Паскаль (1623-1662 гг.), Ферма (1601-1665 гг.) и Гюйгенс (1629-1695 гг.), по справедливости называемых создателями теории вероятностей, стало возможным исследовать случайные события математическими методами.

Классическими трудами считаются: "О расчетах в азартных играх" (1657 г.) Гюйгенса, "Искусство догадок" (1708 г.) Я. Бернулли (1654-1705 гг.), "Опыт анализа азартных игр" (1708 г.) Монморта (1678-1719 гг.), "Об измерении случайностей или о вероятностях результатов в азартных играх" (1708 г.) Муавра (1667-1754 гг.).

Упомянем и первые, не очень удачные, попытки: "Книга об игре в кости" (1526 г.) Кардано (1501-1576 гг.) и трактат Галилея (1564-1642 гг.) "Об открытиях, совершенных при игре в кости" (1620 г.).

Исходя из одних названий вышеупомянутых работ, легко заподозрить, что истоки теории вероятностей лежат в мутном озере азартных игр. Это действительно так. Дело в том, что азартные игры (слово "азарт" происходит от арабского "alzar" - игральная кость) по природе своей тесно связаны со случайным: здесь естественно возникают вопросы вероятностного характера, причем многие эмпирические проблемы допускают несложное теоретическое обоснование и, обратно, всякие теоретические предположения легко проверить экспериментально.

Надо думать, тогдашний обыватель вообще расценивал теорию вероятностей, проецируя на нее свое отношение к азартным играм, как вещь поверхностную, несерьезную и отчасти даже жульническую. Несмотря на колоссальные успехи теории вероятностей и почти повсеместное ее применение в различных отраслях человеческой деятельности, подобные мнения встречаются и в наши дни. А ведь еще Гюйгенс пророчески указывал: "*... я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы интересной и очень глубокой теории...*" ("О расчетах в азартных играх").

Предмет, нуждавшийся в вероятностном подходе, и притом внешне совершенно не схожий с азартной игрой, нашелся быстро: уже в 1662 г. некто Граунт из Лондона впервые составил таблицы вероятности смерти среди населения как функции возраста. Чуть позже в Голландии были проделаны аналогичные расчеты. Их использовали для вычисления пожизненной ренты. С той поры страховые компании шагают в ногу с теорией вероятностей - иначе недолго и прогореть.

В 18-19-ых столетиях теория вероятностей продолжает развиваться. После появления грандиозных "Начал натуральной философии" (1687 г.) Ньютона (1642-1727 гг.) бурный рост переживает небесная механика. Астрономы получили могучий инструмент исследований - математический анализ, созданный совокупными стараниями Паскаля, Ферма, Барроу (1630-1677 гг.), Ньютона и Лейбница (1646-1717 гг.). Задачи небесной механики потребовали умения уменьшать влияние ошибок измерения. Этими вопросами занимался еще Галилей, а новый прием, названный методом наименьших квадратов, подробно был исследован Гауссом (1777-1855 гг.) в работе "Теория движения небесных тел" (1802 г.). Гаусс и указал на вероятностный характер этого метода. А Лаплас (1749-1827 гг.) в своем основном труде по вероятности "Аналитическая теория вероятностей" (1812 г. - с посвящением Наполеону) отвел всю четвертую главу теме исчисления ошибок. Таким образом вероятность начала применяться в физике.

И 17-ый и 18-ый века отмечены величайшими событиями в истории человечества. Прогресс естественных наук приобрел невиданный со времен греков размах. Это же можно сказать и о философской мысли, достаточно перечислить такие имена, как Гоббс (1588-1679 гг.), Бэкон (1561-1626 гг.), Декарт (1598-1650 гг.), Локк (1632-1704 гг.), Лейбниц, Спиноза (1632-1677 гг.), Кант (1724-1804 гг.), Юм (1711-1776 гг.) и Руссо (1712-1778 гг.). Произошли социальные катаклизмы, повлекшие за собой перемены в общественной жизни: революция в Англии в конце 17-го века, революции во Франции и в Америке в конце 18-го. Мир менялся. Как хорошо выразился японский физик Юкава (предсказавший существование мезонов), "*...мне кажется, что во времена быстрых перемен, когда не известно, каким завтра станет общество, естественно появиться такому образу мыслей, как теория вероятностей*. "

В 19-ом веке сфера приложения теории вероятностей еще расширилась: оказалось, что без ее помощи невозможно удовлетворительно построить молекулярно-кинетическую теорию газов. Газ состоит из огромного множества молекул и применять уравнения Ньютона в данной ситуации - вполне безнадежное дело ввиду громадного их количества.[1] Посредством же вероятностных методов удается рассчитать поведение частиц “в среднем”. Так создавались новые направления в физике: кинетическая теория и статистическая механика. Огромный вклад в становление этих наук внесли Клаузиус (1822-1888 гг.), Максвелл (1831-1879 гг.), Гиббс (1839-1903 гг.) и Больцман (1844-1906 гг.). Именно Максвеллу принадлежит фраза: “ *Истинная логика нашего мира - это подсчет вероятностей*. “ Однако в те годы мало кто из ученых разделял эту точку зрения. Многим казалось, что статистический подход лишь отражает слабость человеческих возможностей. В блестящей форме эти соображения (в пользу детерминизма природных явлений) высказал Лаплас: “*...мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной как следствие ее предыдущего состояния и как причину последующего. Ум, которому были бы известны для какого-либо определенного момента все силы, одушевляющие природу, и относительное положение всех ее составных частей, если бы он вдобавок оказался достаточно обширным, чтобы подчинить эти данные анализу, обнял бы в одной формуле движения величайших тел вселенной наравне с движением мельчайших атомов: не осталось бы ничего, что было бы для него недостоверно, и будущее, так же как и прошедшее, предстало бы перед его взором*. “ (“Опыт философии теории вероятностей.”) Мысль выражена очень образно и ярко! И недаром данный фрагмент и по сей день кочует из одной научно-филосовской книжки в другую.

Этот *лапласов демон* несколько угнетает воображение, ибо сама возможность его существования приводит к печальным для свободы воли последствиям. Но в 20-ом веке квантовая механика развенчала демона, о чем речь еще впереди. Пока же поговорим об основаниях теории вероятностей.

Каждая ветвь математики (на всякий случай оговоримся, что мы не касаемся самоновейших ее разделов), так или иначе, обязана своим происхождением тем или иным свойствам действительности. Если вы на листе бумаги отметите две точки, то навряд ли тот факт, что через них можно провести только одну прямую, вызовет сомнения. Измерив углы произвольного треугольника и сложив их величины, вы наверняка получите число, близкое к 180. Измерив ниткой длину окружности и разделив затем на длину диаметра, получите около 3,14. Такие вот наблюдения и привели к возникновению геометрии.

В основе теории вероятностей лежит следующий *объективный закон природы:*

---

[1] Впрочем, компьютеры считают все быстрее – и может быть, когда-нибудь и с этим справятся

Пусть многократно проводится некий эксперимент, допускающий несколько различных исходов, но проводимый всякий раз в одних и тех же условиях; выделим какой-нибудь исход и подсчитаем, сколько раз он осуществился в серии испытаний. Затем разделим это число на количество всех испытаний - т. е., найдем частоту появления данного исхода. Оказывается, с ростом количества экспериментов, частота приближается к некоторому числу $p \in [0,1]$.[2]

Закон этот подвергался практической проверке. Например, в 18-ом веке ученый Бюффон не поленился и подкинул монетку 4040 раз; орел выпал в 2048 случаях и частота составила 0,508. В 19-ом веке еще более трудолюбивый Пирсон бросал монету 24000 раз кряду; из них на долю орлов пришлось 12012 и частота составила 0,5005.

До 19-го века, как правило, математические теории развивались по следующей схеме: начиная с некоторой черты, заключения выводились по законам логики и вытекали одно из другого; но разбираться в основаниях, в фундаменте теории - охотников не находилось. Положение в целом складывалось в духе незабвенного К. Пруткова: "*Не смотри, что в ранце дыра - иди вперед и кричи "ура"*. " Нередко дыр попросту не замечали, а если и замечали - пытались латать их посредством туманных мистических домыслов. Так, в 1702 г. Лейбниц писал: "*Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище Божественного Духа, почти что сочетание бытия с небытием.*"

В 19-ом веке наступил перелом. Гаусс пришел к геометрической интерпретации комплексного числа. Он же, и, независимо друг от друга, Лобачевский (1793-1856 гг.) и Бояи (1802-1860 гг.), обдумав постулат о параллельных (знаменитый 5-ый постулат Евклида, эквивалентный утверждению о том, что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести всего одну прямую, параллельную данной), выдвинули идею неевклидовой геометрии, впоследствии развитой Риманом (1826-1866 гг.), Пуанкаре (1845-1912 гг.) и Клейном (1849-1925 гг.). Коши (1784-1857 гг.) и Вейерштрасс (1815-1897 гг.) формализовали понятие предела, непрерывности и производной. Благодаря Кантору (1845-1918 гг.), Дедекинду (1831-1916 гг.) и Пеано (1858-1932 гг.) была построена аксиоматическая теория действительных чисел.

Так возникали и формировались современные концепции математики: любая ее область должна быть построена аксиоматически, абстрагирована от реального происхождения и представлять из себя логически непротиворечивую теорию, в которой ос-

---

[2] Другое дело, что такие вещи (однообразные) наверное, существуют лишь в мире физики. Люди, к примеру, всегда разные. Однако, если считать, что в общих чертах похожие, можно делать кое-какие веро-

новные понятия нельзя и не нужно определять и вносить в них какое-либо содержание извне.

Всякая математическая теория начинается со списка аксиом, задающих отношения между неопределяемыми для данной теории понятиями. Затем из этих аксиом и неопределяемых понятий по правилам логики выводятся различные утверждения и конструируются новые понятия. К самим аксиомам предъявляют ряд естественных требований, таких как непротиворечивость (чтобы было невозможно вывести из аксиом одновременно как само утверждение, так и его отрицание), независимость (чтобы ни одна аксиома не являлась следствием остальных) и т. д.

Оказалось, знаменитые "Начала" Евклида не удовлетворяют этим суровым меркам. Уже Гаусс указывал, что у Евклида не обоснованы понятия равенства фигур, "лежать между" и проч. За построение геометрии в свете современных воззрений взялся Гильберт (1862-1943 гг.) и успешно справился с этой задачей. ("Основания геометрии", 1899 г.)

Основными неопределяемыми понятиями в аксиоматике Гильберта выступают точка, прямая и плоскость. (Сам Евклид пытался дать и этим понятиям определения - но это были определения скорее в житейском, нежели математическом, плане. Точка, например, это то, что не имеет частей и т. д.) Однажды Гильберт сказал, что " *содержание евклидовой геометрии не претерпит никаких изменений, если вместо слов "точка", "прямая", "плоскость" - употребить термины "стул", "стол" и "пивная кружка"* ". (Откуда, в частности, следует, что, по-видимому, великий математик не чурался маленьких жизненных радостей.)

Пользуясь известной аналогией, можно сказать, что аксиомы - нечто вроде правил игры в шахматы, а неопределяемые понятия - шахматные фигуры. Часто случается, что одна из фигур загадочным образом куда-то исчезает; допустим, пропал конь - тогда вы ставите на доску взамен первое, что попадется под руку - хотя бы катушку с нитками. Катушка не похожа на коня, но ей вменили в обязанность перемещаться по доске буквой "Г" - и потому суть игры осталась прежней.

В 1900 г. Гильберт, выступая на втором международном конгрессе математиков, изложил список из 23 проблем, которые, по его мнению, должны были определить ход развития математики 20-го века (умение ставить вопросы - величайший дар, которым Гильберт обладал вполне; нередко хорошо поставленный вопрос направляет науку в

ятностные прогнозы.

новое и плодотворное русло). Одна из проблем Гильберта заключалась в обосновании теории вероятностей.

И правда, теория вероятностей, в отличие от множества других областей математики, не вписалась в рамки аксиоматического подхода. В результате большинство математиков считали ее “полуестественной” наукой - чем-то промежуточным между физикой и философией. Обоснования вероятности застряли в 17-ом веке: “ *Вероятность есть степень уверенности и относится к достоверности как часть к целому.* “ (Я. Бернулли. “Наука предположений”) Или: “ *Вероятность события есть отношение числа благоприятствующих случаев к числу всех возможных случаев.* “ (Лаплас. “Аналитическая теория вероятностей”) Первое определение - целиком философское, второе же описывает то, что называют нынче “классической схемой”. Но с помощью классической схемы нельзя обосновать понятие недискретной случайной величины, без которого не обойдешься в статистической механике или в теории оценок погрешностей.

Разумеется, физики вовсю оперировали этими случайными величинами, не сомневаясь в правомерности своих действий - ведь на протяжении свыше полутора веков они приводили к отменным результатам. Но с математической точки зрения - на месте оснований теории вероятностей зияла громадная прореха.

И двух лет не минуло со дня памятного выступления Гильберта, как французский математик Лебег (1875-1941 гг.) изготовил поистине золотой ключик, идеально подобранный для оснований теории вероятностей - чего тогда, впрочем, никто не заподозрил. Лебег расширил понятия площади и объема, т.е. меры множества и предложил новую теорию, открывшую пути к интегрированию “очень” разрывных функций.

В 1919 г. Мизес (1883-1953 гг.) попытался обосновать теорию вероятностей, используя частотный подход, но столкнулся с немалыми трудностями: определив вероятность через частоту, нельзя понять, чему все-таки равна вероятность события - получить бесконечную последовательность испытаний всю целиком мы не можем и приходится говорить о значении вероятности с некоторой точностью, а точность, в свою очередь, связана с вероятностью; образуется порочный круг. По существу, Мизес хотел формализовать физический подход к вероятности, но реализовать эти идеи полностью ему так и не удалось.

И лишь в 1933 г. Колмогоров в книге “Основные понятия теории вероятности” построил долгожданную аксиоматику, по удачному выражению Реньи “ *включив теорию вероятностей в кровеносную систему современной математики* “.

По Колмогорову, ***вероятность есть*** σ ***- аддитивная нормированная мера на*** σ ***- алгебре событий.***

Конечно, такое определение может напугать человека непосвященного. Поэтому мы его сейчас попробуем немного расшифровать. Если и после этого ситуация не прояснится - опять-таки, бояться не следует. Во-первых, всякое новое фундаментальное понятие, будучи даже подкреплено изрядным количеством примеров (а в данном случае примеров не будет), требует времени для его осмысления. Во-вторых, оно не связано с дальнейшим содержанием книги и приводится здесь просто для полноты картины.

Итак, в аксиоматике Колмогорова ***события*** - это система $\{A\}$ подмножеств некоторого непустого множества Ω, называемого ***вероятностным пространством***, которая включает само Ω, $\varnothing$ и замкнута относительно операций объединения, пересечения и дополнения, взятых не более чем счетное число раз. ***Вероятность*** же есть любое отображение **P**: $\{A\} \to R^{+}$ семейства событий во множество неотрицательных вещественных чисел, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$

2. $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ для любого счетного (или конечного) набора попарно непересекающихся событий.

При таком построении теории вероятностей выяснилось, что математическое ожидание произвольной случайной величины можно трактовать как некоторый интеграл Лебега - в свое время вам разъяснят все это подробнейшим образом, если вы поступите в соответствующий ВУЗ.

Открытие Колмогорова придало мощный импульс дальнейшему развитию теории вероятностей; в частности, отметим в этой связи возникновение теории случайных процессов, где изучаются случайные величины, зависящие от времени. Простейший случайный процесс, для которого будущее состояние зависит только от настоящего - называется марковской цепью, в честь русского ученого Маркова (1856-1902 гг.).

Аксиомы Колмогорова явились чрезвычайно кстати еще и вот по какой причине. К концу 20-ых годов завершилась, в общем, революция в физике. Она потребовала решительного пересмотра всех прежде сложившихся взглядов на природу. Оказалось, некоторые явления можно объяснить, только предполагая, что в своей основе законы природы носят принципиально вероятностный характер.

Началось все с того, что в 1900 г. Планк (1858-1947 гг.) выдвинул необычную гипотезу, объяснявшую проблему теплового излучения. Согласно классической физике всякое нагретое тело (к примеру, человеческое при температуре 36,6 градусов Цельсия) должно бы было сверкать, испуская из себя энергию до тех пор, пока не остынет до абсолютного нуля. Теория в этом пункте значительно расходилась с практикой. Планк предположил, что атомы, вопреки электродинамике Максвелла, излучают энергию отдельными порциями, квантами. Своим открытием Планк совершил как бы научный подвиг в квадрате: ему, убежденному приверженцу классической физики, пришлось, в известном смысле, наступить на горло собственной песне.

Дальнейшие события развивались лавинообразно. Одна парадоксальная идея[3] сменяла другую, и в результате к концу 20-ых 20-го века годов усилиями, в первую очередь, Гейзенберга (1901-1976 гг.), Дирака (1902-1984 гг.), Шредингера (1887-1961 гг.), Борна
(1882-1970 гг.) и Паули (1900-1958 гг.) выкристаллизовалась квантовая механика.

Демон Лапласа отвергался новой наукой самым решительным образом. Раньше вероятностные законы применялись к системам из очень большого числа очень маленьких частиц, поскольку точное описание траектории и скорости каждой частицы было нереальным ввиду громадного количества уравнений, дающих это точное описание. По правилам квантовой механики в микромире нельзя дать точного описания даже для поведения одной частицы - можно лишь говорить о *вероятности* ее нахождения в той или иной точке пространства с той или иной скоростью. Неверно представлять электрон в виде материальной точки - правильнее будет вообразить себе некое облако, сгущающееся в тех областях, где вероятность обнаружить электрон велика.

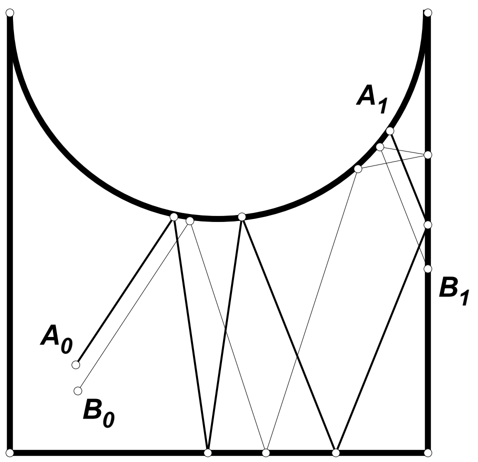
Похоже, природа в одинаковых условиях способна вести себя по-разному. Например, в совокупности атомов радия, находящихся в одном состоянии, какой-то из атомов распадется раньше, какой-то проживет дольше. В целом радиоактивность будет уменьшаться по экспоненте, но какой именно из атомов распадется раньше, какой - позже, предсказать невозможно. Как сказал Дирак, “ *бывают случаи, когда мы вынуждены признать, что природа делает выбор и не можем предсказать, каким он будет* “.

---

[3] Как бы они там не сменяли друг друга, мы все еще не можем постичь суть вещей. И, наверное, никогда и не сможем. Думается, это все к лучшему.

Многие ученые не могли смириться с таким положением дел. Рассказывают, что известный физик Эренфест обучил своего цейлонского попугая произносить по-немецки: “ *Но, господа, ведь это не физика.* “ Этого попугая он предлагал в качестве председателя в дискуссиях о новой квантовой механике в Геттингене. Среди несмирившихся был и великий Эйнштейн. Это ему принадлежит фраза: “ *Но ведь не гадает же Господь Бог “орел - решка” каждый раз, когда нужно решить, куда должен двигаться электрон?* “ Даже некоторые из творцов квантовой механики - Дирак и Шредингер - надеялись, что рано или поздно появится теория, способная вернуть утраченный детерминизм. Но пока все попытки создать подобную теорию не увенчались успехом, и наиболее полное и точное описание природы на сегодняшний день - вероятностное.

В 50-ых годах установили, что и в детерминированных системах, т.е. в системах, где с большой точностью действуют законы Ньютона, возможны ситуации, когда применять эти законы нецелесообразно. Такие системы получили название *систем с динамическим хаосом*, а простым примером служит бильярд, содержащий искривленные стенки, т.н. *бильярд Синая*.

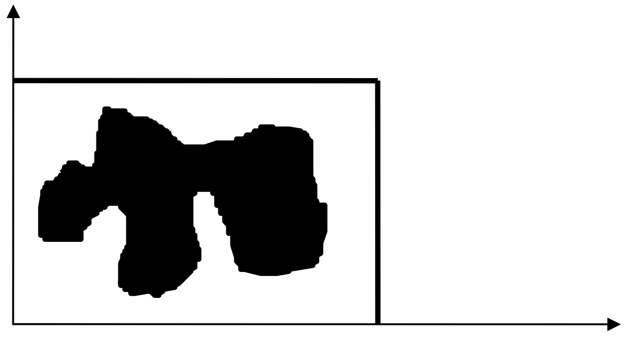


В этом необычном бильярде (но в котором, однако, действует все тот же закон «*угол падения равен углу отражения*») траектории двух соседних шариков, имеющих одинаковую начальную скорость, очень быстро и очень сильно расходятся - сколь бы ни были близки шарики в начальный момент времени. Стало быть, незначительные погрешности в определении начального положения шарика приводят, при решении соответствующих уравнений, к траекториям, заметно не совпадающим с истинной. Здесь законы Ньютона хотя и действуют, но применять их бесполезно: небольшие изменения в настоящем приводят к громадным изменениям в будущем. Сколько-нибудь разумный прогноз должен носить вероятностный характер.

Мы долго говорили о физике и у читателя могло создаться обманчивое представление: теория вероятностей в наше время применяется *исключительно* в физике. На самом же деле трудно указать область, в которой теория вероятностей *не* применяется. Куда ни кинь взгляд, она везде: и в медицине, и в химии, и в биологии (классический пример - менделевская теория наследственности), и в очень сейчас популярном компьютерном прогнозировании различных экономических, социологических и политических моделей общества.

Счастливая мысль соединить идеи теории вероятностей с возможностями ЭВМ принадлежит Уламу, Ферми и Нейману. Именно эти ученые в конце 40-ых годов разработали и применили т.н. *метод Монте-Карло* для решения сложных вычислительных задач ядерной физики. Это - численный метод, основанный на моделировании случайных величин. При решении вычислительных задач часто удается построить вероятностную модель, в которую входит искомая неизвестная величина. Затем наблюдают исходы многократных случайных экспериментов (они генерируются на компьютере), после чего приближенно оценивают значение неизвестного.

Поясним суть метода на простом примере. Предположим, что нужно найти площадь «кляксы», ограниченную “загогулиной”, изображенной на рисунке. Введем прямоугольную систему координат и поместим фигуру в прямоугольник, стороны которого известны. Затем станем кидать в прямоугольник точки, так, чтобы точка могла попасть в любую область прямоугольника с одинаковым успехом.



Тогда логично предположить, что вероятность попадания точки в фигуру есть отношение площади фигуры к площади прямоугольника (последняя - известна). С другой стороны, отношение числа попаданий в фигуру к числу всех бросков будет стремиться к этой вероятности при увеличении числа бросков. Существуют специальные программы, моделирующие равномерное распределение точки в прямоугольнике. Поэтому нет необходимости заниматься этим вручную - машина бросит столько точек, сколько потребуется, чтобы обеспечить заданную точность.

Названием своим метод, по-видимому, обязан тому, что рулетка - один из простейших механизмов получения случайных чисел, а город Монте-Карло славится своими игорными домами. Но помочь выиграть в рулетку метод Монте-Карло не в состоянии.

И последнее. Конечно, теория вероятностей имеет колоссальное прикладное значение. И все-таки, в первую очередь, это - красивая и самостоятельная область математики, которой просто интересно заниматься самой по себе. Так пусть же *звоном путеводной ноты* (выражение В. Набокова) в путешествии по страницам этой книги станет следующий фрагмент из "Приключений мистера Томпкинса" Георгия Гамова:

- А не способствует ли развитие науки достижению практических целей, увеличивая благосостояние людей и делая их жизнь более удобной?

- Разумеется, способствует, но это лишь второстепенная цель. Не думаете же вы, что основное назначение музыки состоит в том, чтобы учить горнистов будить по утрам солдат, сзывать их на завтраки, обеды и ужины или призывать их на битву? Говорят: "Любопытство сгубило кошку". Я говорю: "Любознательность рождает ученого".

Глава вторая
ЗАКОНЫ КОМБИНАТОРИКИ

По-видимому, сколько существует человек, столько же и существуют азартные игры; людей всегда привлекала возможность, по словам Достоевского, *" выиграть поскорее и побольше."* Вот отрывок из произведения Тацита " О происхождении германцев и местоположении Германии (написан в 1-ом веке от Р.Х.) : " *Играют германцы и в кости, и, что поразительно, будучи трезвыми и смотря на это занятие как на важное дело, причем с таким увлечением и при выигрыше, и при проигрыше, что, потеряв все свое достояние и бросая в последний раз кости, назначают ставкою свою свободу и свое тело. Проигравший добровольно отдает себя в рабство и, сколь бы моложе и сильнее выигравшего он ни был, безропотно позволяет связать себя и выставить на продажу. Такова их стойкость в превратностях этого рода, тогда как ими самими она именуется честностью."*

Или вспомним, как карточный шулер Утешительный в замечательной пьесе Гоголя “Игроки” соблазняет якобы наивного провинциала (в действительности тоже жулика) “ засесть в банчик “ :

Утешительный: Господа, нужно его теперь же посвятить во все гусарские обычаи. Пьет он, как видно, уже сносно, но ведь это вздор. Нужно, чтобы он был картежник во всей силе! Играешь в банк?

Глов: Играл бы, смерть бы хотелось, да денег нет.

Утешительный: Экой вздор: нет денег! Было бы только с чем сесть, а там деньги будут - сейчас выиграешь.

Глов: Да ведь и сесть-то не с чем.

Утешительный: Да мы тебе поверим в долг. Ведь у тебя есть доверенность на получение денег из приказа. Мы подождем, а как тебе выдадут, ты нам тотчас и заплатишь. Да, впрочем, что я говорю? Как будто ты уж непременно проиграешь. Ты можешь выиграть несколько тысяч чистоганом.

Глов: А как проиграю?

Утешительный: Стыдись, что ж ты за гусар после этого? Натурально, одно из двух: либо выиграешь, либо проиграешь. Да в этом-то и дело, в риске-то и есть главная добродетель. А не рискнуть, пожалуй, всякий может.

Глов: Черт побери, если так, играю!

В этом диалоге мастерски вскрыта психологическая подоплека действий, вовлекающих человека в игру.

Особенно широко азартные игры (карты, кости, лотереи) распространились в 16-17-ом веках. Ставкой могло послужить решительно все: от предметов амуниции и вплоть до бриллиантовых и золотых украшений, а в отдельных случаях зажиточные бездельники ставили ни карту поместья, дворцы и замки. Раскроем бессмертных “Трех мушкетеров” А. Дюма (описываемые события относятся к 1625 г.) : “*... Атос отправился на поиски англичанина и нашел его в конюшне: тот с вожделением разглядывал седла. Случай был удобный. Атос предложил свои условия: два седла против одной лошади или ста пистолей - на выбор. Англичанин быстро подсчитал: два седла стоили вместе триста пистолей. Он охотно согласился... Д’Артаньян, дрожа, бросил кости - выпало три очка; его бледность испугала Атоса, и он ограничился тем, что сказал:*

- Неважный ход, приятель... Вы, сударь, получите лошадей с полной сбруей.

Торжествующий англичанин даже не потрудился смешать кости; его уверенность в победе была так велика, что он бросил их на стол не глядя. Д'Артаньян отвернулся, чтобы скрыть досаду.

- Вот так штука, - как всегда спокойно проговорил Атос. - Какой необыкновенный ход! Я видел его всего четыре раза за всю мою жизнь: два очка! "

Атос, конечно, с полным основанием назвал выпадение двух единиц необыкновенным ходом. Ведь, как нетрудно подсчитать (хотя бы перебрав все варианты), при бросании двух игральных костей возможны 36 различных исходов (комбинации типа 1:2 и 2:1 следует различать), и среди них комбинация 1:1 встречается лишь однажды.

Как видим, вполне естественно возникли вопросы: сколькими способами можно выбросить то или иное число очков при игре в кости; сколькими способами можно получить тот или иной расклад в карточной игре - недаром ведь тот же Утешительный, передергивая, приговаривал: " *Какое странное течение карт... Вот любопытно для вычислений!* "

При решении такого рода проблем обнаружились некоторые закономерности, с помощью которых стало возможным во многих случаях сократить выкладки, сводя задачу к уже известным и ранее решенным.

Эти закономерности легли в основу *комбинаторики* - области математики, изучающей вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных каким-либо условиям, можно составить из заданных объектов.

Комбинаторикой занимались такие знаменитые ученые, как Тарталья (1500-1557 гг.), Галилей, Кардано, Ферма, Паскаль, Я. Бернулли, Лейбниц и Эйлер (1707-1783 гг.). Однако вплоть до нашего века комбинаторика, в общем, воспринималась как неисчерпаемый кладезь всевозможных головоломок - и только. Но в 50-ые годы 20-го века методы комбинаторики внезапно получили многочисленные приложения. По мере все более глубокого проникновения в тайны мироздания все более отчетливо вырисовывался тот факт, что окружающий нас мир во многом устроен дискретно: элементарные частицы и связанные с ними квантовые числа, молекулы описываются дискретными моделями. Открытие генетического кода повлекло за собою использование комбинаторики в биологии; большое количество комбинаторных задач возникло в теории информации, в линейном программировании и в теории групп. И т.д. и т.п.

Правила сложения и умножения.

Формула включений и исключений.

В одном из рассказов у Аверченко описан тупой педагог Бельмесов, который умеет и любит ошеломить простодушного ученика вопросом из разряда “дурацких” (Среди “дурацких” вопросов встречаются, между прочим, прелюбопытные - например, что произойдет, если всесокрушающее пушечное ядро попадет в абсолютно несокрушимый столб. Коварный этот вопрос уходит, оказывается, корнями в глубокое прошлое. Некогда, разгневавшись за что-то на фиван, Дионис наслал на них чудовищную лисицу, опустошавшую окрестности Кадма. Было предопределено судьбою, что ни одно существо, выступившее против нее, не сможет ее настигнуть. Ежемесячно ненасытная лисица получала в дань кого-нибудь из фиванских юношей, во избежание пущих бесчинств. Наконец, отыскали собаку родом с острова Крит, и не простую, а с секретом: волею рока было предопределено ей настигнуть всякого, за кем погонится. И вот, когда настала кульминация - всенастигающая собака кинулась следом за неприступной лисицей - мудрый Зевс, вмешавшись в это безобразие, тотчас обратил обоих в камень.). На экзамене между Бельмесовым и экзаменуемым происходит следующий диалог:

- Кувшинников, Иван, - сказал Бельмесов. - А подойди к нам сюда, Иван Кувшинников... Вот так. Сколько будет пятью шесть, Кувшинников, а?

- Тридцать.

- Правильно, молодец. Ну, а сколько будет, если помножить пять деревьев на шесть лошадей?

Поставленный в совершенный тупик “дурацким” вопросом Бельмесова, Иван Кувшинников в замешательстве отвечает, что получится тридцать лошадей. Следует трагический финал. Натешившись всласть (“*а куда же девались деревья? куда же ты их дел? с кашей съел или лодку сделал* “), Бельмесов отпускает Ивана с двойкой.

Меж тем, будь Кувшинников малость сообразительней, он мог бы дать вполне удовлетворительный ответ.

Рассмотрим пять деревьев и шесть лошадей. Нужно узнать (зачем, неважно), сколькими способами можно привязать лошадь к дереву. Очевидно, на каждую лошадь приходится пять вариантов выбора дерева, а всего лошадей - шесть. Получаем $6 \cdot 5$ - тридцать способов или тридцать пар вида (лошадь; дерево). Итак, мы без больших усилий перемножили лошадей и деревья и заодно пришли к *правилу произведения*:

Если объект A ***можно выбрать*** n ***способами и если после каждого такого выбора объект*** B ***можно выбрать*** m ***способами, то выбор пары*** (x, y)

Во введении к этой главе обсуждался вопрос, сколько исходов имеет эксперимент, состоящий в бросании двух игральных костей. Решим его, не прибегая к прямому пересчету всех исходов, а воспользуемся правилом произведения: первая кость может упасть на любую из шести граней, и вторая - тоже. Получим $6 \cdot 6$=36 исходов.

Правило произведения легко обобщить на произвольное количество объектов.

Если имеется k объектов A_1, A_2,... , A_k и объект A_1 состоит из n_1 элементов, A_2 - из n_2 элементов и т.д. , ... , A_k состоит из

Действительно, первый элемент выбирается n_1 способами. Каждый из выбранных элементов можно соединить с любым элементом из A_2, что дает $n_1 \cdot n_2$ пар. Каждую пару можно соединить с любым элементом из A_3, что дает $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ троек. И т.д.

Найдем число всех делителей произвольного натурального числа *n* с помощью обобщенного правила произведений. (Число делителей в теории чисел обозначается $\tau(n)$; ясно, что $\tau(1)=1$). Согласно основной теореме арифметики любое $n(n>1)$ можно однозначно представить (с точностью до порядка сомножителей) в виде $n = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot\mathrm{K}\cdot p_k^{n_k}$, где $p_1, p_2, ..., p_k$ - некоторые попарно различные простые числа. Тогда все делители образуют множество чисел вида $p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot\mathrm{K}\cdot p_k^{t_k}$, где $0 \le t_i \le n_i$, т.е. каждому делителю можно поставить во взаимно-однозначное соответствие последовательность длины $k-(t_1, t_2, ..., t_k)$. t_1 можно выбрать n_1+1 способами, $t_2 - n_2+1$ - и т.д. По обобщенному правилу произведения всего получится $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot...(n_k+1)$ последовательностей, т.е. $\tau(n) = (n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot...\cdot(n_k+1)$. Заметим, что тем самым одновременно доказано, что $\tau\left(p_1^{n_1} \cdot\mathrm{K}\cdot p_k^{n_k}\right) = \tau\left(p_1^{n_1}\right)\cdot\mathrm{K}\cdot\tau\left(p_k^{n_k}\right)$. Последнее означает *мультипликативность* функции $\tau(n)$.

Другое фундаментальное правило комбинаторики - *правило сложения.* Звучит оно банально:

Если два множества A и B не имеют общих элементов, то количество элементов их объединения есть сумма количеств элементов

(Разумеется, речь идет о конечных множествах.) Условимся количество элементов множества X обозначать $|X|$, объединение множеств - значком сложения (+), пересечение - значком умножения $(\cdot)$ Тогда *правило сло-*

жения запишется в виде $|A+B|=|A|+|B|,$ если $A\cdot B=\varnothing$. Обобщая на k попарно-непересекающихся множеств $A_1, A_2, ..., A_k$ получим:

$$|A_1+A_2+...+A_k|=|A_1|+|A_2|+...+|A_k|, \text{ если } A_i\cdot A_j=\varnothing, i\neq j.$$

В теории чисел важную роль играет функция Эйлера $\varphi(n)$ - количество чисел, не превосходящих данного n и взаимно-простых с ним (т.е. не имеющих с n общих делителей, отличных от единицы). Найдем посредством правила сложения $\varphi\left(p^k\right)$, где p - некоторое простое число. Обозначим множество натуральных чисел от 1 до p^k - Ω, через A - подмножество Ω, состоящее из всех чисел, взаимно-простых с p^k, а через $\overline{A}$ - его дополнение в Ω. Ясно, что $|A|=\varphi\left(p^k\right), A+\overline{A}=\Omega, A\cdot\overline{A}=\varnothing$ и по правилу сложения, $|\Omega|=|A|+|\overline{A}|.$ Но $|\Omega|=p^k$. Следовательно, $|A|=p^k-|\overline{A}|.$ Определить же $|\overline{A}|$ - просто. $\overline{A}$ состоит из всех чисел вида $n\cdot p$, где $n=1,2,...,n_{\max}$. $n_{\max}$ получим из условия $n\cdot p\le p^k$. Тогда $n_{\max}=p^{k-1}, \varphi\left(p^k\right)=p^k-p^{k-1}$.

Правило сложения допускает дальнейшие обобщения. Предположим теперь, что множества A и B пересекаются. Как вычислить $|A+B|$? Так как в сумму A и B дважды входят элементы, принадлежащие A и B одновременно, то
$|A+B|=|A|+|B|-|A\cdot B|$.

Из этой формулы легко вывести, что $\varphi\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right)=\varphi\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\varphi\left(p_2^{k_2}\right)$, где p_1 и p_2 - различные простые числа:

Пусть $\Omega=\left\{1,2,...,p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right\}, A=\left\{n\cdot p_1 \middle| n\cdot p_1\le p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right\}$,

$B=\left\{m\cdot p_2 \middle| m\cdot p_2\le p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right\}$. Тогда $A+B$ **-** все числа, не взаимно-простые с $p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}$ и $\varphi\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right)=|\Omega|-|A+B|.$ Из обобщенного правила сложения следует, что

$\varphi\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right)=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}-|A|-|B|+|A\cdot B|$. Но $|A|=p_1^{k_1-1}\cdot p_2^{k_2}$ (из неравенства

$n\cdot p_1 \le p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}$) и, аналогично, $|B| = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2-1}$. Множество $A\cdot B$ состоит из чисел $l\cdot p_1\cdot p_2$, таких, что $l\cdot p_1\cdot p_2 \le p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}$ и, значит, $|A\cdot B| = p_1^{k_1-1}\cdot p_2^{k_2-1}$. Отсюда

$$\varphi\left(p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\right) = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2} + p_1^{k_1-1}\cdot p_2^{k_2-1} - p_1^{k_1-1}\cdot p_2^{k_2} - p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2-1} =$$

$$= p_2^{k_2}\left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right) - p_2^{k_2-1}\left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)$$

$$= \varphi\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\varphi\left(p_2^{k_2}\right).$$

Выведем правило сложения для трех произвольных множеств:

$$|A+B+C| = |(A+B)+C| = |A+B| + |C| - |(A+B)\cdot C| = |A| + |B| - |A\cdot B| + |C| - |A\cdot C + B\cdot C| =$$

$$|A| + |B| + |C| - |A\cdot B| - |A\cdot C| - |B\cdot C| + |A\cdot B\cdot C|$$

Теперь можно сообразить, что в общем случае получится :

$$\left|\sum_{1\le i\le k} A_i\right| = \sum_{1\le i\le k}|A_i| - \quad 1:$$

$$+\ldots\ (-1)^{k+1}\left|A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_k\right|$$

. Это соотношение действительно справедливо и носит название *формулы включений и исключений.* Попробуйте доказать ее по индукции, и вывести затем с ее помощью мультипликативность функции Эйлера.

Правила сложения и умножения - фундаментальные в комбинаторике. Подавляющее большинство комбинаторных задач в конечном счете сводится к применению этих правил.

Перестановки, размещения и сочетания.

Перестановки.

Пусть имеется n различных предметов, которые можно по-разному помещать на n различных местах. Любое такое распределение предметов

Найдем это число:

На первое место предмет можно выбрать n способами, на второе - $n-1$ способами (т.к. один предмет уже выбран) и т.д. Применяя правило умножения, получим

$P_n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$

По определению полагают $P_0 = 0! = 1$. Итак,

$$P_n = n!$$

Сколько различных слов можно составить из пяти различных букв?

(Под словом будем понимать любую последовательность из этих букв длины пять, так что каждая буква входит в последовательность ровно один раз.)

Ответ: $P_5 = 5! = 120$ слов.

А вот задача поинтересней: сколькими способами n человек можно усадить за круглый стол?

Если бы их нужно было рассадить на лавке, в ряд, то мы могли бы немедленно выписать ответ: $n!$ Чем же отличается размещение в ряд от размещения по окружности?

Рассмотрим какое-нибудь размещение в ряд, на отрезке:
$i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n$. Ясно, что если на отрезке мы сдвинем всех на одно место вправо, а последнего отправим на место первого, то на окружности порядок сохранится. Продолжая сдвигать таким образом на одно место, видим, что из каждой расстановки на окружности можно получить n различных расстановок на отрезке. Поэтому искомое число способов - $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

Перестановки с повторениями.

Только что мы рассматривали перестановки из n различных предметов. Что изменится, если среди предметов встречаются одинаковые? Понятно, количество различных перестановок должно уменьшиться. Как именно?

Пусть среди n предметов имеются одинаковые. Объединив их по группам, получим разбиение всех предметов на k непересекающихся групп. Число предметов в i-ой группе обозначим n_i. Тогда $\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$ Если бы все предметы были различны, то имели бы $n!$ перестановок. В каждой группе одинаковые предметы можно переставлять $n_i!$ способами. Применив правило произведения, получим для количества ***перестановок с повторениями***:

$$\boxed{P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Например, выясним, сколько различных слов можно образовать из слова **АЛАЛЫКА** (согласно Далю, *картавый, нечисто произносящий буквы человек*). $n_1 = 3$ (количество букв А), $n_2 = 2$ (количество Л), $n_3 = n_4 = 1$ (Ы и К).

Тогда $P(3,2,1,1) = \frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420.$

Размещения.

Будем составлять из n различных предметов всевозможные последовательности длины k, причем все элементы, входящие в последователь-

$A_n^0 = 1,$ т.к. выбрать из n предметов 0 можно одним-единственным способом: *ничего* не выбирая (или же выбирая *ничего*). Выведем формулу для A_n^k.

На первое место элемент можно выбрать n способами, на второе - $n-1$ способами и т.д., наконец, на k-ое - $(n-k+1)$ способами. По правилу произведения

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Итак,

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Рассмотрим задачку на размещения без повторений:

В чемпионате страны по футболу принимают участие 12 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотые, серебряные и бронзовые медали?

Здесь из 12 команд нужно выбрать 3, причем существенно, в каком порядке. Искомое число способов, таким образом, есть $A_{12}^3 = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320$.

Размещения с повторениями.

Теперь рассмотрим несколько иную ситуацию.

Предметов по-прежнему n, и по-прежнему из них составляют последовательности длины k. Но сейчас предположим, что элементы, входящие в последовательность, могут быть и одинаковы (следить за порядком продолжаем). Такие последовательности называют размещениями с повторениями. Их количество обозначают символом $\overline{A_n^k}$. (Здесь k - любое натуральное число и может превосходить n.)

Из правила произведения моментально следует, что

$$\boxed{\overline{A_n^k} = n^k}$$

Пример:

Сейф открывается, если набрана определенная комбинация из четырех цифр. Определить число возможных комбинаций.

Так как всего цифр - десять, то получим $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000$.

Еще пример:

Найти количество всевозможных подмножеств данного конечного множества M.

Пусть $|M| = n.$ Пронумеруем элементы, входящие в M : $M = \{m_1, m_2, ..., m_n\}.$ Далее, каждому подмножеству множества M поставим в соответствие последовательность из нулей и единиц длины n по следующему правилу: если элемент с номером i входит в подмножество, то на i-ом месте ставим единицу, если же нет - нуль. Очевидно, получим взаимо-однозначное отображение всех подмножеств на множество всех последовательностей длины n, состоящих из нулей и единиц. Так, пустому множеству будет соответствовать последовательность из одних нулей, а всему множеству - последовательность из одних единиц и т.д. Задача свелась к определению количества таких последовательностей. А оно, нетрудно заметить, представляет из себя ничто иное, как $\overline{A_2^n} = 2^n = 2^{|M|}$.

Сочетания.

Часто встречаются случаи, когда (в отличие от размещений) не важно, в каком порядке расположены элементы, и нужно учитывать лишь состав последовательностей. В этих случаях принято говорить о *сочетаниях*. Определение таково:

Сочетаниями называют последовательности длины k, в которых элементы, образующие эти последовательности, различны и выбираются

Числа $C_n^k \left(k = 0,1,...,n\right)$ иногда называют биномиальными коэффициентами (см. следующий раздел).

Если мы выберем любую последовательность длины k, то из нее можно получить $k!$ последовательностей, отличающихся друг от друга порядком, но с одним и тем же составом. Это рассуждение показывает, что $k! \cdot C_n^k = A_n^k$. Значит, $C_n^k = \dfrac{A_n^k}{k!} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}}$$

Так как $P(k, n-k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, то $P(k, n-k) = C_n^k$.

В этом можно убедиться непосредственно, не обращаясь к формулам. Поставим каждому сочетанию длины k в однозначное соответствие последовательность длины n из $n-k$ нулей и k единиц. Именно, перенумеровав все предметы цифрами от 1 до n, будем в последовательности длины n на i-ом месте ставить единицу, если i-ый предмет входит в сочетание и нуль - если нет. Всего таких последовательностей - $P(k, n-k)$ штук.

Покажем, как пользоваться сочетаниями при решении задач, снова на “футбольном” примере.

12 команд разыгрывают первенство страны. На сей раз нас будут интересовать замыкающие: согласно правилам, две команды, занявшие последние места, “вылетают”, т.е. переходят из высшей лиги в первую. Сколько здесь существует возможных вариантов?

Поскольку разница между последним и предпоследним местом в данном случае несет разве что моральное утешение, ответ следующий:

$C_{12}^2 = 6 \cdot 11 = 66.$

Известно множество свойств сочетаний. Докажем два основных.

1. Свойство симметрии

Нетрудно подметить, что $C_n^k = C_n^{n-k}$. Дело в том, что каждой выборке k элементов из n однозначно соответствует выборка $n-k$ элементов из n. Это - все *оставшиеся* элементы после выборки длины k. Менее изящно, но не менее научно, тот же результат получим, применив формулы для числа сочетаний .

Поэтому, разместив числа $C_n^k\,(k = 0,1,\ldots,n)$ в строчку, наблюдаем симметрию в записи относительно середины строки. Ниже выписаны C_4^k, C_5^k.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

2. Треугольник Паскаля

Рассмотрим бесконечный треугольник, образованный биномиальными коэффициентами:

$$C_0^0$$

$$C_1^0 C_1^1$$

$$C_2^0 C_2^1 C_2^2$$

$$C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3$$

$$C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4$$

....

или, подставив числа:

1

1   1

1   2   1

1   3   3   1

1   4   6   4   1

Боковые стороны состоят из единиц. Прослеживается и закономерность, связующая предыдущую и последующие строки:

$$1$$

$$1_{\text{O +N}}1$$

$$1_{\text{O +N}}2_{\text{O +N}}1$$

$$1_{\text{O +N}}3_{\text{O +N}}3_{\text{O +N}}1$$

$$1_{\text{O +N}}4_{\text{O +N}}6_{\text{O +N}}4_{\text{O +N}}1$$

....

Она состоит в том, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \left(n \ge 1; 0 \le k \le n\right)$.

Действительно,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}; C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k)!}; \; C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!\cdot(n-k-1)!};$$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\cdot(n-k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = C_n^k;$$

Интереснее, конечно, вывести эту закономерность чисто комбинаторными рассуждениями:

Пусть k-сочетания образуются из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$ и всего их C_n^k штук. Разобьем все сочетания на два непересекающихся класса:

содержащие a_1 и не содержащие. В первом классе a_1 обязательно входит в сочетания, значит, все сочетания этого вида можно получить, выбирая из $n-1$ оставшихся элементов $k-1$ штук, т.е. C_{n-1}^{k-1} способами. Во второй класс входят k-сочетания из $n-1$ элементов. Их всего C_{n-1}^k.

Следствие:

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + ... + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m \left(n \geq 1; m \geq 0\right).$$

В самом деле, $C_{n+m}^m = C_{n+m-1}^m + C_{n+m-1}^{m-1}$.

Поскольку $C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m-2}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-2}$, то $C_{n+m}^m = C_{n+m-1}^m + C_{n+m-2}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-2}$ и т.д. - последовательно расщепляя одно из слагаемых на два, докажем наше утверждение. Заменив n на $n+1$, m на $m-1$, придем к выражению:

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + ... + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n+m}^{m-1}.$$

Или, используя, симметрию:

$$C_n^n + C_{n+1}^n + ... + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}.$$

Это свойство позволяет получить формулы суммы для первых m натуральных чисел, их квадратов и более высоких степеней (подчеркнем - *получить*; могучий метод математической индукции способен лишь *доказывать* уже готовые соотношения).

Именно, положив $n=1$, получим

$$C_1^1 + C_2^1 + ... + C_m^1 = C_{m+1}^2; \Rightarrow 1 + 2 + ... + m = \frac{m\cdot(m+1)}{2};$$

Если же $n=2$, то

$$C_2^2 + C_3^2 + ... + C_{m+1}^2 = C_{m+2}^3; \Rightarrow 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + m\cdot(m-1) =$$

$$= \frac{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}{3} = 1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+...+m(m+1); \Rightarrow$$

$$1^2+2^2+...+m^2+1+2+...+m = \frac{m\cdot(m+1)\cdot(m+2)}{3}; \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} i^2 = \frac{m(m+1)(m+2)}{3} - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Треугольник, составленный из биномиальных коэффициентов, называют *треугольником Паскаля*, ибо и сам треугольник и некоторые его свойства подробно рассмотрены в работе Паскаля “ Трактат об арифметике треугольника “ (1654 г.). Правда, историки математики установили, что треугольник этот был известен уже в Древней Индии, а в 16-ом веке его переоткрыл Штифель (1487-1567 гг.), но Паскаль, конечно, действовал совершенно независимо от предшественников.

Блез Паскаль, человек необычайного ума и колоссальных способностей, за время своей не слишком продолжительной жизни успел открыть и изобрести великое множество вещей, имеющих не только теоретическое, но и практическое значение. Так, помимо треугольника Паскаля, теории вероятностей, теоремы о “мистическом шестивершиннике” (теорема о том, что точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в коническое сечение, лежат на одной прямой – название теоремы авторское, т.е. самого Паскаля), закона Паскаля в гидростатике, он изобрел тачку, буквально собственноручно сконструировал первую простейшую вычислительную машину (позволявшую выполнять арифметические операции над пятизначными числами; созданный чуть позже арифмометр Лейбница умел, вдобавок, извлекать квадратные корни). Паскаль разработал также принцип действия гидравлического пресса. Он выдвинул идею регулярного городского транспорта, предложив пустить по фиксированным маршрутам общедоступные кареты. В литературе он навсегда обессмертил свое имя, подарив человечеству сборник афоризмов и размышлений (знаменитые “Мысли”).

Сочетания с повторениями.

Нам осталось обсудить вопрос о

количестве выборок по k элементов из n, отличающихся только составом, в случае, когда элементы в выборке могут и повторяться. Сами вы-

(Здесь k может быть и больше n.)

Всякая такая выборка состоит из элементов 1-го, 2-го и т.д, ... , n -го типа. Обозначим через x_1 количество элементов 1-го типа в выборке, ... , x_n $-n$ -го, причем

$\sum_{i=1}^{n} x_i = k.$ Каждой выборке поставим во взаимно-однозначное соответствие последовательность из нулей и единиц: сначала выпишем x_1 единиц (если их нет, т.е. элементы первого типа не попали в выборку, не пишем ничего), затем поставим нулик (граница между первым и вторым типом), после чего выпишем x_2 единиц, поставим нулик и т.д. Получим последовательность из k единиц и $n-1$ нулей. Ясно, что разным выборкам отвечают разные последовательности, и любой последовательности отвечает своя выборка, т.е. выборок столько же, сколько и последовательностей. А последовательностей столько же, сколько возможно всего различных расстановок k единиц на $n+k-1$ мест. Каждая такая расстановка, в свой черед, есть просто выборка k мест из $n+k-1$, и порядок не важен. Получаем,
что

$$\boxed{\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k}$$

Заодно мы установили и *количество всевозможных решений уравнения* $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ *в целых неотрицательных числах - оно совпадает с* $\overline{C_n^k}$.

Часто удается свести к этой задаче задачи с другими ограничениями путем линейной замены переменных. Допустим, что нужно найти количество целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + .. x_n = k$ при условии $x_1 \geq m.$ Совершим замену $x_1 = y_1 + m, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$ и получим уравнение $y_1 + y_2 + ... + y_n = k - m,$ где все y_i уже неотрицательны. Число же решений, очевидно, совпадает с числом решений исходного уравнения и равно $\overline{C_n^{k-m}} = C_{n+k-m-1}^{k-m} = C_{n+k-m-1}^{n-1}.$ (В последнем равенстве использовалась симметрия биномиальных коэффициентов.) Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что результат не изменится, если мы рассмотрим задачу о числе неотрицательных решений уравнения $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ при условии, что элементы первых m типов должны обязательно встречаться, т.е. что $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq m.$

Потребуем теперь, чтобы $x_1 \le m$ и снова поищем количество неотрицательных решений того же уравнения. Ответом будет разность между числом всех неотрицательных решений и таких, что $x_i \ge m+1$, т.е. $\overline{C_n^k} - \overline{C_n^{k-m-1}}$.

Конкретный пример:

В магазине продаются пять сортов ароматизированного чая: апельсиновый, банановый, вишневый, клубничный и дынный. Покупаются три пачки.

а) Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколькими способами, если все сорта разные?

в) Сколькими способами, если апельсиновый должен войти в набор (возможно, не один раз)?

г) Сколькими способами, если больше одной пачки бананового не может войти в набор?

Решения не требуют особых комментарий:

а)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_i \ge 0, 1 \le i \le 5 \end{cases}$$

Количество решений: $\overline{C_5^3} = C_7^3 = 35.$

б)

$C_5^3 = 10$

в)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 3 \\ x_1 \ge 1, x_i \ge 0, 2 \le i \le 5 \end{cases} \text{ - } y_1 = x_1 - 1, y_2 = x_2, \ldots, y_5 = x_5$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_i = 2 \\ x_1 \ge 1, x_i \ge 0, 2 \le i \le 5 \end{cases}$$

Количество решений: $\overline{C_5^2} = C_6^2 = 15.$

г)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} x_i = 3 \\ x_1 \le 1, x_i \ge 0, 2 \le i \le 5 \end{cases}$$

Количество решений: $\overline{C_5^3} - \overline{C_5^1} = 35 - 5 = 30$

Бином Ньютона.

Начнем с двух цитат из популярных литературных произведений.

1.

- Вы когда умрете?

Тут уж буфетчик возмутился.

- Это никому неизвестно и никого не касается, - ответил он.

- Ну да, неизвестно, - послышался все тот же дрянной голос из кабинета, - подумаешь, бином Ньютона!

(М. Булгаков. “Мастер и Маргарита”.)

2.

- Вы, я думаю, ничего не слышали о профессоре Мориарти? О, у него необычная биография! Он происходит из хорошей семьи, получил блестящее образование и от природы наделен феноменальными математическими способностями. Когда ему исполнился 21 *год, он написал трактат о биноме Ньютона, завоевавший ему европейскую известность.*

(А. Конан-Дойл. “Последнее дело Холмса”.)

Эти отрывки наводят на подозрения, что в глазах некоторых людей гуманитарных профессий бином Ньютона представляется некоей высочайшей вершиной математической мысли, абсолютно недосягаемой для простых смертных.

На самом деле все не так страшно. Выпишем первые несколько строк треугольника Паскаля и рядом - известные алгебраические тождества.

1 $\quad (x+y)^0 = 1$

1 1 $\quad (x+y)^1 = 1\cdot x + 1\cdot y$

1 2 1 $\quad (x+y)^2 = 1\cdot x^2 + 2\cdot x\cdot y + 1\cdot y^2$

1 3 3 1 $\quad (x+y)^3 = 1\cdot x^3 + 3\cdot x^2\cdot y + 3\cdot x\cdot y^2 + 1\cdot y^3$

Теперь трудно не прийти к мысли, что и вообще для всех натуральных n справедливо равенство:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^{n-k}\cdot y^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k}.$$

Эту формулу принято называть *биномом Ньютона*, а коэффициенты при $x^k \cdot y^{n-k}\left(C_n^k\right)$ - *биномиальными.*

Обоснуем это соотношение:

$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n}$. Понятно, что раскрывая скобки и выписывая сомножители в порядке их появления, будем получать всевозможные последовательности длины n, состоящие из букв x,y. (Например, для $n=3$: $(x+y)^3 = xxx + xxy$ $+ xyx + xyy + yyy + yyx + yxx + yxy$).

Подсчитаем, сколько встретится последовательностей, содержащих k $(0 \le k \le n)$ раз букву x, и, соответственно, $n-k$ раз букву y - это и будет коэффициент при $x^k \cdot y^{n-k}$. Такие задачи обсуждались в разделе о перестановках: этих последовательностей будет $P(k;n-k) = C_n^k$.

Другой способ доказательства использует метод математической индукции и свойство $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ (при индуктивном переходе).

Совсем иной метод доказательства состоит в применении производной: Рассмотрим функцию $f(x) = (x+1)^n$. Очевидно, раскрыв скобки, получим некоторый многочлен n-ой степени с единичными старшим и свободным коэффициентами:

$(x+1)^n = x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \ldots + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + 1$

Тогда

$f'(x) = n\cdot(x+1)^{n-1} = n\cdot x^{n-1} + \ldots + 2\cdot a_2\cdot x + a_1$

Полагая $x=0$, получим $a_1 = n = C_n^1 = C_n^{n-1}$.

Далее, $f''(x) = n\cdot(n-1)\cdot(x+1)^{n-2} = (n-1)\cdot n\cdot x^{n-2} + \ldots + 2\cdot a_2$ и при $x=0$ имеем $a_2 = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2} = C_n^2 = C_n^{n-2}$ и т.д., откуда следует, что $(x+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k$.

Иногда биномом называют именно это разложение. Получить из него формулу для $(x+y)^n$ несложно:

$(x+y)^n = y^n\cdot\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^n = y^n\left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\cdot x^k\cdot y^{n-k}$ В действительности, эти разложения были известны еще арабскому математику и поэту Омару Хайяму (1048-1131 гг.). Ньютон же распространил их на случай произвольных показателей: при $|x|<1$ ряд $1+\alpha x + \dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$ сходится к $(x+1)^\alpha$.

Из формулы бинома мгновенно вытекают два любопытных свойства сочетаний:

1. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$

2. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n \cdot C_n^n = 0$, т.е. сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов на нечетных и равна, согласно предыдущему свойству, 2^{n-1}.

Для доказательства достаточно расписать по биному выражения $2^n = (1+1)^n; 0 = (1-1)^n$.

Упражнения.

2.1

Три колокола начинают бить одновременно. Интервалы между ударами колоколов соответственно составляют $\frac{4}{3}$ секунды, $\frac{5}{3}$ секунды и 2 секунды. Совпавшие во времени удары воспринимаются за один. Сколько ударов будет услышано за 1 минуту? (Включая первый и последний.) *(Соросовская олимпиада, 1997 г.)*

2.2

а) Сколькими способами можно разместить на шахматной доске размером $n \times n$ клеток n одинаковых ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? Клетки доски пронумерованы парами (i, j). (Это условие существенно, так как если учитывать всевозможные симметрии, задача превращается в сложную - во всяком случае, автору решение не известно.)

б) Тот же вопрос, если все ладьи разноцветные.

2.3

На полке нужно расставить три пятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний стояли бы подряд:

а) в порядке возрастания нумерации томов;

б) не обязательно в порядке возрастания.

Сколькими способами это можно осуществить?

2.4

Множество S состоит из всех сумм вида $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, где $x_i \in \{0;1;\dots;n-1\}$ (одинаковые значения сумм входят в это множество, как разные элементы). Найти $|S|$ и $|S_i|$ $(0 \le i \le n-1)$ - где S_i - все элементы S, дающие при делении на n остаток i.

2.5

Имеются два конечных множества C и B. Указать количество всех отображений $f:C \to B$.

2.6

Сколькими способами можно разбить натуральное число n на слагаемые с учетом их порядка?

2.7

На выпускном вечере присутствуют m девушек и n юношей. Сколькими способами можно выбрать из них k пар для танцев?

2.8

Группа из n учеников пишет выпускной экзамен по математике, по окончании которого в департамент по образованию должна быть отправлена депеша с итогами: сколько получено двоек, троек и т.д. Найти возможное количество сводок.

2.9

В Государственной Думе представители m различных фракций усаживаются в ряд из n пронумерованных кресел. Так как все фракции - противоборствующие, желательно, чтобы между депутатами пустовало бы по-крайней мере одно кресло. Сколькими способами можно этого добиться?

2.10

Пользуясь свойствами сочетаний, получить формулу для $\sum_{k=1}^{m} k^3$.

2.11

Найти коэффициент при x^{-5} в разложении $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8$.

2.12

Доказать, не используя формулу бинома:

а) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

б) $\sum_{k=0}^{n} \left(-1\right)^k \cdot C_n^k = 0$.

2.13

Доказать, что:

а) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot 2^k\cdot C_n^k=1$.

б) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k=n\cdot 2^{n-1}$.

в) $\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=C_{2n}^n$.

2.14

$p;q$ - такие числа, что $p+q=1$. Доказать, что:

а) $\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=1$.

б) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=n\cdot p$.

2.15

Найти НОД $\left(C_{2n}^1;C_{2n}^3;...;C_{2n}^{2n-1}\right)$.

Ответы и решения.

2.1

Стандартная задача на формулу включений и исключений. Первый колокол за минуту сделает 60:$\frac{4}{3}$+1=46 ударов. Второй и третий соответственно 37;31 удар. Удары первого и второго совпадут 10 раз, первого и третьего - 16 второго и третьего – 7 раз. Удары всех трех колоколов совпадут 4 раза. По формуле включений и исключений получим всего 46+37+31-16-7+4=85 ударов.

2.2

а) При таком расположении на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит по одной ладье. Зафиксируем одну из расстановок: a_1 - номер вертикали занятого поля по 1-ой горизонтали, a_2 - по 2-ой и т.д. Тогда $\left(a_1;...;a_n\right)$ есть некоторая перестановка чисел $1,...,n$. Поэтому ответ - $n!$

б) Из каждого расположения одноцветных ладей получится $n!$ расположений для разноцветных. Ответ: $(n!)^2$.

2.3

“ Склеим “ пятитомник в одну книгу.

а) 3!=6

б) $3!(5!)^3$- так как в каждом пятитомнике тома можно переставлять 5! способами.

2.4

Очевидно, $|S| = n^m$. Все элементы этого множества образуются из сумм $\sum_{i=1}^{m-1} x_i$ путем прибавления к их результату чисел $0,1,...,n-1$. Но если к фиксированному числу прибавить все остатки от деления на n по одному разу, то получится n чисел с разными остатками. Значит, все S_i содержат одинаковое число элементов, и, следовательно, $|S_i| = n^{m-1}$.

2.5

Так как любой элемент множества C можно отобразить в любой элемент множества B (т.е. “выбрать” $|B|$ способами), то всего существует $|B|^{|C|} = \overline{A_{|C|}^{|B|}}$ различных отображений.

2.6

Представим число n в виде n равноудаленых точек на прямой; в каждый из промежутков между точками можно поместить или не поместить галочку. Между двумя галочками заключено какое-то количество точек. Его можно трактовать как одно из слагаемых в упорядоченном разбиении числа n. Отсутствие галочек соответствует разбиению $n = n$. Всего промежутков $n-1$ и в каждый можно помещать или не помещать галочку. Значит, всех упорядоченных разбиений $\overline{A_2^{n-1}} = 2^{n-1}$.

2.7

$C_n^k \cdot A_m^k = C_m^k \cdot A_n^k$

Внимание! Типичная ошибка: ответ $A_n^k \cdot A_m^k$ неверен! Разберитесь, почему, выбирая сначала девушек, порядок нужно учитывать, а затем выбирая юношей - уже нет.

2.8

$\overline{C_4^n}$

2.9

Рассадим депутатов одним из всех устраивающих способов. Обозначим количество пустующих кресел между i-ым и $(i-1)$-ым депутатом через $x_i, i = 2,3,...,m.$ Пусть x_1 - расстояние (в креслах) между началом ряда и 1-ым депутатом, а x_{m+1} - между концом ряда и последним депутатом. Таким образом, нужно найти количество решений системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m + x_{m+1} = n - m \\ \quad x_1 \geq 0; x_{m+1} \geq 0 \\ \quad x_i \geq 1; 2 \leq i \leq m \end{cases}$$

и умножить его на $m!$ (переставив депутатов в любом “хорошем” размещении, снова получим “хорошее” размещение). В итоге получим

$$m! \cdot \overline{C_{m+1}^{n-2m+1}} = m! \cdot C_{n-m+1}^{n-2m+1} = m! \cdot C_{n-m+1}^{m} = A_{n-m+1}^{m}$$

2.10

Применим свойство $C_n^n + C_{n+1}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}; n = 3$

$$\Rightarrow \frac{1(1+1)(1+2)}{6} + \ldots + \frac{k(k+1)(k+2)}{6} + \ldots + \frac{m(m+1)(m+2)}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24};$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6} = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{24};$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2$; (Мы воспользовались уже известными формулами для вычисления $\sum_{k=1}^{m} k; \sum_{k=1}^{m} k^2$)

2.11

Определим, при каких k x входит в разложение в -5 степени . Нужно решить уравнение $\left(x^{1/2}\right)^k \cdot \left(x^{-1}\right)^{8-k} = x^{-5}$, откуда получим, что $k = 2$. Искомый коэффициент -

$C_8^2 \cdot (-2)^6 = 1792$

2.12

а) Рассмотрим множество всех последовательностей длины n из нулей и единиц. Его можно получить объединением подмножеств, содержащих 0, 1, 2 и т.д. единиц.

б) Рассмотрим множество всех последовательностей длины n из нулей и единиц, содержащих четное число единиц. Таких последовательностей - 2^{n-1}, т.к. их все можно получить, выбирая на первые $n-1$ мест нули и единицы произвольно (и тогда на последнем месте всегда будет стоять однозначно определенное число). С другой стороны, они образуются объединением множеств, содержащих 0, 2, 4 и т.д. единиц. Аналогично обстоит дело с последовательностями из нечетного числа единиц.

2.13

а) $(2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 2^k\cdot(-1)^{n-k}$

б) Возьмем производную от обеих частей равенства

$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot x^k$.

Получим $n\cdot(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k\cdot x^{k-1}$. Осталось подставить в это тождество $x=1$

в) Разобьем $2n$ предметов на две группы по n предметов. Тогда n предметов из $2n$ можно выбрать так: сначала выбрать 0 предметов из 1-ой группы и n из второй ($C_n^0\cdot C_n^n=\left(C_n^0\right)^2$ способами); далее - 1 из 1-ой группы и $n-1$ из второй ($C_n^1\cdot C_n^{n-1}=\left(C_n^1\right)^2$ способами) и т.д.

2.14

а) $(p+q)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$

б) $\sum_{k=1}^{n}k\cdot C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=np\cdot\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot q^{n-k}$ (так как $k\cdot C_n^k=n\cdot C_{n-1}^{k-1}$)

$=np\cdot\sum_{t=0}^{n-1}C_{n-1}^t\cdot p^t\cdot q^{(n-1)-t}$ ($k-1=t$) $=np\cdot(p+q)^{n-1}$

2.15

Пусть НОД$\left(C_{2n}^1;C_{2n}^3;...;C_{2n}^{2n-1}\right)=d$. Тогда d - число вида 2^t, т.к. d - делитель $C_{2n}^1+C_{2n}^3+....+C_{2n}^{2n-1}=2^{2n-1}$.

Покажем, что

$d=2^{k+1}$, где 2^k - наибольшая степень числа 2, на которую делится n. Действительно, $n=2^k\cdot q$, q - некоторое нечетное число. Тогда $C_{2n}^1=2n=2^{k+1}\cdot q$, откуда следует, что $d\le k+1$. Но все числа вида C_{2n}^r $(1\le r\le 2n-1; r$ - нечетно) делятся на 2^{k+1}, что завершает доказательство:

$$C_{2n}^r=\frac{(2n)!}{(2n-r)!\cdot r!}=\frac{2n}{r}\cdot C_{2n-1}^{r-1}=2^{k+1}\cdot\frac{q\cdot C_{2n-1}^{r-1}}{r}$$

Глава третья

ДИСКРЕТНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Ознакомившись с основными законами комбинаторики, перейдем непосредственно к теории вероятностей.

В этой главе будет описан метод построения математической модели реальных ситуаций, возникающих в тех случаях, когда возможно говорить об опыте или эксперименте, влекущим за собою конечное или счетное число различных исходов.

Определение и примеры.

Хорошее определение в математике обязано быть содержательным: оно охватывает достаточно широкий класс объектов и позволяет проводить количественные оценки тех или иных связей между ними посредством математического аппарата. Из истории известно, что стоящее определение обыкновенно формируется *аналитически*, от частного к общему. Какие-то конкретные и с виду разрозненные задачи постепенно приводили, (довольно иногда долгим) путем проб и ошибок, что называется, “ к общему знаменателю “. В учебной литературе, как правило, распространен другой, *синтетический*, подход: сначала выписывают определение, а потом на некотором количестве примеров пытаются прояснить его суть, что не всегда, и в том главный недостаток метода, удается сделать. Зато таким образом экономятся время и место. Последуем общепринятым стандартам и мы.

Дискретным вероятностным пространством называется конечное или счетное множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ ***вмес***

Заметим, что в случае счетного Ω $\sum_{\omega_i} P(\omega_i)$ есть сумма бесконечного ряда, но поскольку он состоит из неотрицательных членов, т.е. сходится абсолютно, с ним можно обращаться во многом как с обычной конечной суммой. В частности, как угодно можно переставлять слагаемые и суммировать любые подпоследовательности, получая в результате число, не большее всей суммы. Поэтому мы при доказательстве того или иного свойства будем для простоты рассматривать конечные пространства.

Если мы моделируем опыт, допускающий конечное число исходов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ ***, причем нет никаких основа-***

Частным случаем дискретного вероятностного пространства является т.н. *классическая схема*:

Так как $P(\omega_i) = \dfrac{1}{n} > 0; \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = n \cdot \dfrac{1}{n} = 1$, то классическая схема есть просто частный случай более общего определения.

Примеры:

1. Монеты.

Если эксперимент заключается в однократном подбрасывании монеты, то в результате имеем два исхода: 0 (герб) или 1 (решка). Предположим, далее, что монета “правильная”, т.е. нет оснований выделить какой-нибудь исход из двух возможных. Тогда вероятностное пространство, отвечающее данному эксперименту, таково: $\Omega = \{0;1\}; P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$.

Подбросим теперь n правильных монет одновременно (или, что тоже самое, n раз подбросим одну и ту же монету). В этом случае элементарными исходами послужат всевозможные последовательности из нулей и единиц длины n (которых всего 2^n). Так как монеты правильные, вероятности зададим так: $P(\omega_i) = \frac{1}{2^n}$ для всех значений $i = 1,2,3,...,2^n$.

Как поступить, если нужно смоделировать поведение конкретной монеты и неизвестно, правильная она или нет? Разумно, видимо, будет подбросить монетку одну-другую сотню, а то и тысячу, раз и подсчитать отношение числа выпавших гербов к общему числу бросаний. Получим некоторое число $p \in [0;1]$. Тогда $\Omega = \{1;0\}$; $P(0) = p; P(1) = q = 1 - p$.

Теперь рассмотрим опыт, ведущий к появлению счетного пространства. Будем бросать монету до выпадения первой решки. Тогда Ω образуется из счетного числа элементов: $\{(1);(0,1);(0,0,1);...\}$.

Положим $P(\omega_i) = \frac{1}{2^i}$ и убедимся, что $\sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1$.

Имеем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$. По известной формуле, $S = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1$.

2. Игральные кости.

При однократном бросании правильной кости (как и прежде, понимаем под этим равные шансы осуществиться у всех исходов) Ω состоит из шести элементов, которые обозначим цифрами от 1 до 6 .

$$\left|\Omega\right| = 6; \omega_i = i; P(\omega_i) = \frac{1}{\left|\Omega\right|} = \frac{1}{6}; 1 \le i \le 6.$$

Иное описание необходимо, когда игра ведется неправильной, утяжеленной костью. (В оные времена разные нечестные люди, избиравшие азартные игры своим ремеслом, нередко пользовались такими, со смещенным при помощи неприметного добавления свинца центром тяжести, костями.) Здесь функция вероятности на тех же самых элементарных событиях должна быть задана по-другому, к примеру, так:

$$P(6) = \frac{1}{4}; \quad P(i) = \frac{3}{20}, 1 \le i \le 5.$$

Обычно при игре в кости соперники по очереди бросают пару костей и побеждает набравший больше очков. Построим модель этой ситуации, в предположении, что кости могут быть и неправильными. Для первой кости рассмотрим

$$\Omega_1 = \{1;...;6\}; P(i) = p_i \ge 0; \sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

Аналогично, для второй кости

$$\Omega_2 = \{1;...;6\}; P(j) = q_j \ge 0; \sum_{j=1}^{6} q_j = 1.$$

Теперь построим пространство Ω из всех пар (i, j) (его удобно обозначить $\Omega_1 \times \Omega_2$) и пусть по определению $P(i, j) = p_i \cdot q_j;\ 1 \le i, j \le 6.$ Необходимо проверить, что

$$\sum_{1 \le i, j \le 6} p_i \cdot q_j = 1.$$

Но

$$\sum_{1 \le i, j \le 6} p_i \cdot q_j = \sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{6} p_i \cdot q_j \right) = \sum_{i=1}^{6} p_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{6} q_j \right) = \sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

3. Выборки.

Приведем четыре типа часто встречающихся разновидностей классической схемы с общим названием “выборки”.

Представим себе некую емкость (в теории вероятностей принят специальный термин “урна”), заполненную пронумерованными от 1 до n шарами. Делать это возможно двумя принципиально разными способами: или возвращая каждый раз шар в урну или не возвращая никогда. В первом случае имеем т.н. *выборку с возвращением*, во втором - *выборку без возвращений.* Осуществив ее k раз подряд, получим последовательность из k шаров (или чисел). Число k называют *объемом выборки*, а исходное количество шаров в урне n - *объемом генеральной совокупности*. В зависимости от обстоятельств (от условий конкретной задачи) можно учитывать порядок в выборке или же не учитывать, наблюдая только состав.

Получаем четыре варианта классической схемы, полагая все исходы равновероятными.

выборки из n по k			
без возвращений		с возвращениями	
порядок важен	порядок не важен	порядок важен	порядок не важен
$\lvert\Omega\rvert = A_n^k$	$\lvert\Omega\rvert = C_n^k$	$\lvert\Omega\rvert = \overline{A_n^k}$	$\lvert\Omega\rvert = \overline{C_n^k}$

В физике рассматривают системы из k частиц, каждая из которых может находиться в одном из n состояний. Если частица может находиться в любом состоянии и важно, в каком порядке частицы распределяются по состояниям, то получим выборку с возвращениями, порядок важен, т.е. $\lvert\Omega\rvert = \overline{A_n^k}$. Это распределение называется в физике статистикой Максвелла-Больцмана и хорошо описывает поведение молекул идеального газа. Если же порядок не важен($\lvert\Omega\rvert = \overline{C_n^k}$), то модель называется статистикой Бозе-Эйнштейна; ей подчиняются, к примеру, фотоны. Для электрона ни та, ни другая модель не годятся - как выяснилось, эти частицы не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии (принцип Паули). Здесь $|\Omega| = C_n^k$, а модель называют статистикой Ферми-Дирака.

События и их вероятности.

Рассмотрим произвольное дискретное пространство $(\Omega; P)$***. Событием назовем любое подмножество*** $A \subset \Omega$ ***, а его вероятностью***

Т.е. в классической схеме для вычисления вероятности события A нужно подсчитать, сколько элементарных событий входит в A (иногда говорят: *благоприятствует* наступлению A) и разделить это число на количество всех исходов.

События можно складывать, умножать и вычитать: по определению, $A + B = A \cup B; A \cdot B = A \cap B; A - B = A \setminus B.$

Перечислим основные свойства вероятностей событий, немедленно вытекающие из определения.

1. Если вероятность некоторого события 1, то его называют *достоверным*, а если 0 - то *невозможным*. По определению, $\varnothing$ - невозможное событие, а Ω - достоверное.

2. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$,

так как в сумме $\sum\limits_{\omega \in A} P(\omega) + \sum\limits_{\omega \in B} P(\omega)$ дважды встречаются слагаемые вида $P(\omega), \omega \in A \cdot B$.

Отсюда можно вывести следствия:

а) $P(A+B) \le P(A) + P(B)$,

поскольку $P(A \cdot B) \ge 0$.

б) $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ -

доказывается по индукции.

в) если $A \cdot B = \varnothing$ (такие события именуют *несовместными*), то

$P(A+B) = P(A) + P(B).$

г) для n попарно несовместных событий $(A_i \cdot A_j = \varnothing, i \ne j)$ индукцией получим

$P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$. Это свойство предельным переходом можно обобщить на счетное число событий.

3. *Дополнительным* к событию A называют событие $\overline{A} = \Omega - A$. Справедливо соотношение:

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$,

т.к. $\overline{A} + A = \Omega; A \cdot \overline{A} = \varnothing; P(\Omega) = 1$.

В некоторых задачах иногда проще вместо вероятности некоторого события найти сначала вероятность дополнительного к нему.

4. Пусть $A \subset B$ (говорят: A *влечет* за собой B). Тогда:

$P(B - A) = P(B) - P(A); P(A) \le P(B)$.

В самом деле, $A \subset B \Rightarrow B = (B - A) + A, (B - A) \cdot A = \varnothing$

Перейдем к примерам.

1.

Правильная монета бросается три раза. Какова вероятность, что выпадет больше одного герба?

$|\Omega| = 2^3 = 8$. Интересующему нас событию A благоприятствуют элементарные события $\{(0,0,0); (0,0,1); (0,1,0); (1,0,0)\}$.

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. К тому же результату придем, рассмотрев событие

$\overline{A} = A_0 + A_1; A_0 \cdot A_1 = \varnothing$, где A_0 - выпало нуль гербов, A_1 - один герб. Ясно, что $P(A_0) = \frac{1}{8}; P(A_1) = \frac{3}{8}$ и, наконец, $P(A) = P(A_0) + P(A_1)$. Естественно, тривиальную задачу без труда можно решить разными способами.

2.

В предыдущем разделе разбирался эксперимент, заключающийся в бросании двух игральных костей. Было показано, что построенная нами модель действительно является вероятностным пространством. Но насколько она хороша? Найдем вероятность того, что при бросании двух костей на первой выпадет i очков. Это событие должно, по-видимому, иметь ту же вероятность, что и при бросании одной кости. Поэтому, если наша модель даст ответ, отличный от p_i , ее придется признать никуда не годной. Но подсчеты показывают, что все в порядке: событие A_i(i очков на первой кости) состоит из шести элементарных и $P(A_i) = \sum_{j=1}^{6} P(i, j) = p_i \cdot \sum_{j=1}^{6} q_j = p_i$.

3.

Бросают две правильные игральные кости. Какова вероятность, что выпадет девять очков? десять очков?

Все исходы равновероятны, выпадению 9 очков благоприятствуют пары $\{(3,6);(6,3);(4,5);(5,4)\}$, а выпадению 10 очков - $\{(4,6);(6,4);(5,5)\}$, т.е. $P(9)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}; P(10)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$. Удивительно, но в свое время эта задача поставила в тупик некоторых математиков, позабывших при ее решении учесть порядок выпадения костей. У них получалось, что события наступают с равной вероятностью, тогда как на практике девять очков выпадали почаще. Заблуждались даже такие ученые, как Лейбниц и Даламбер (1717-1783 гг.)

Даламбер, один из авторов знаменитой французской энциклопедии, в 1754 г. поместил в ней статью “Герб и решка”, где настаивал на том, что монета, брошенная дважды, упадет гербом по крайней мере один раз с вероятностью $\frac{2}{3}$. Он считал, что есть лишь три возможных исхода: ГР, ГГ, РР - которые равновероятны. Это предположение, хотя и приводит к внутренне непротиворечивой модели, но не особенно удачно описывает реальное положение дел: при бросании двух монет пара ГР (без учета порядка) будет наблюдаться чаще, чем ГГ и РР.

Правильное решение задачи о выпадении очков было известно еще Кардано, человеку очень способному и столь же загадочному. Не говоря уже о формуле для решения кубических уравнений (о истории ее возникновения можно бы написать целую книжку в духе, как модно сейчас говорить, интеллектуального триллера), Кардано сконструировал, например, всем известный карданов вал - для плавного передвижения королевского экипажа. В жизни Кардано много неясного; как это часто происходит в таких случаях, и обстоятельства его смерти окутаны легендами. По одной из версий ему пришлось покончить с собой, чтобы не подмочить свою астрологическую репутацию: увлекшись этой псевдонаукой, он вычислил дату собственной кончины и, как человек большой гордыни, решился ей неукоснительно следовать.

4. *Задача о справедливом разделе ставки.*

Два игрока играют в некоторую игру, в которой их шансы на победу равны (учитываются только результативные поединки); борьба продолжается до шести побед и победитель получает приз. Как следует разделить приз по-справедливому, если игра пре-

рвалась при счете
$5:3$ в пользу одного из игроков?

Историки математики установили, что эта задача упоминается в книге (некоторые из них иллюстрировал его друг Да Винчи) Пачоли (1445-1509 гг.) “Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности” (1494 г.). Есть данные, что в Италию задача попала из арабских стран. Словом, к 1654 г., когда она была решена практически одновременно Паскалем и Ферма, ей насчитывалось почтенное количество лет и множество безуспешных попыток справиться с нею - никто до Паскаля не замечал, что задача носит вероятностный характер. Например, гениальный выходец из народа Тарталья (1449 - 1557 гг.), как говорят, открывший за одну ночь формулу корней кубического уравнения, пришел к ответу $2:1$. Должно быть, он рассуждал наподобие следующего: первый игрок выиграл на две партии больше, а два - третья часть от шести, поэтому он и должен получить треть приза, а оставшуюся сумму нужно поделить пополам.

Приведем решение, принадлежащее Ферма (Паскаль шел иным путем, но результаты совпали; отсюда - ставшая крылатой фраза из письма Паскалю Ферма: “ *Как я вижу, истина одна и в Тулузе и в Париже.* “).

Справедливым будет раздел, пропорциональный шансам игроков выиграть поединок. Первому осталось выиграть одну партию, второму - три. Идея Ферма в том, чтобы продолжить прерванный матч тремя фиктивными партиями. Всего получаем восемь равновероятных исходов, и для второго игрока благоприятен лишь один - когда он побеждает во всех трех встречах. Значит, справедливо будет разделить приз в отношении $7:1$.

5. *Задача о совпадении дат*.

Теория вероятностей славится задачами, ведущими порой к парадоксальным и интуитивно непредсказуемым результатам. Вот одна из них:
Какое минимальное количество людей нужно собрать, чтобы вероятность того, что хотя бы у двух человек совпадут дни рождения, превысила половину?

Будем считать, что в году 365 дней и что рождаемость постоянна в течение года. Всего среди k человек существует 365^k вариантов распределения дней рождения. Пусть событие B состоит в том, что хотя бы два дня рождения совпадают. Удобно вычислить $P(\overline{B})$. Элементарных событий, благоприятствующих $\overline{B}, A_{365}^k$.(Каждое такое событие- выборка k различных дней из 365 с учетом порядка)

Т.к. $P(B)=1-P(\overline{B})$, то задачу можно переформулировать: найти минимальное натуральное k , при котором $P(\overline{B})<\frac{1}{2}$, т.е. решить в натуральных числах неравенство

$$\frac{A_{365}^{k}}{365^{k}}<\frac{1}{2}\text{ , или}$$

$$\frac{\overbrace{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-k+1)}^{k}}{\underbrace{365\cdot 365\cdot\ldots\cdot 365}_{k}}<\frac{1}{2}\ .$$

Воспользуемся тем, что при малых $x \ln(1-x)\approx -x$ (разложение в ряд Тейлора в окрестности нуля до первого порядка - т.е. замена кривой на касательную к ней в нуле). Тогда :

$$P(\overline{B})=\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{365-(k-1)}{365}=\left(1-\frac{1}{365}\right)\Lambda\left(1-\frac{k-1}{365}\right)$$

$$\ln\left(P(\overline{B})\right)=\ln\left(1-\frac{1}{365}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{k-1}{365}\right)\approx-\frac{(1+\ldots+(k-1))}{365}=-\frac{k\cdot(k-1)}{730}\ .$$

$$P(\overline{B})\approx\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln\left(P(\overline{B})\right)\approx-0{,}7\Leftrightarrow\frac{k(k-1)}{730}\approx 0{,}7\Leftrightarrow k\approx 22{,}6$$

Итак, в группе, состоящей из 23 человек, вероятность совпадения дней рождения превысит половину. Аналогично можно вычислить, что вероятности $0{,}7$ соответствует 30 человек, а $0{,}9$ - 40 . Можете самостоятельно провести соответствующие практические эксперименты.

Кажется, наши рассуждения были безупречны, и все же кое-что упущено. Из поля нашего зрения выпал т.н. “вырожденный” (т.е. исключительный, нехарактерный для данной ситуации) случай. Приведем по этому поводу фрагмент из книжки “Принцесса или Тигр” известного логика профессора Смаллиана:

- В свое время я преподавал математику в Принстонском университете и как-то занимался со студентами элементарной теорией вероятностей. Я объяснил своим слушателям, что если число людей в группе увеличить с 23 до 30, то вероятность совпадения дат рождения окажется близка к единице.

- Но, - продолжал я, - поскольку вас здесь всего 19, то вероятность того, что у двоих из вас дни рождения совпадают, будет гораздо меньше 50% .

Тут один из студентов поднял руку:

- Бьюсь об заклад, профессор, что по крайней мере у двоих из присутствующих здесь дни рождения должны совпасть.

- С моей стороны было бы не очень честно принимать ваше пари, - ответил я. - Ведь теория вероятностей целиком на моей стороне.[4]

- Это не имеет значения, - упорствовал студент. - Я все-таки готов с вами поспорить!

Самоуверенный юнец не знал даты рождения никого из присутствующих, за исключением, разумеется, себя самого - и тем не менее с легкостью взял верх в споре под дружный хохот аудитории, т.к. рассеянный профессор совершенно запамятовал, что в группе два студента - *близнецы*.

Счастливый билет.

История умалчивает о том, кто первым догадался называть билеты, у которых в шестизначных номерах сумма первых трех цифр совпадает с суммой трех остальных, “счастливыми”.[5] Возможно, идея принадлежала транспортному управлению и имела целью снизить число безбилетных пассажиров. Высчитаем вероятность получения счастливого билета.

Номер состоит из шести цифр, каждая из которых может принимать значения от нуля до девяти - имеем классическую схему из 10^6 элементарных событий. Нас интересует вероятность события A: сумма первых трех цифр равна сумме трех последних. Для этого нужно определить, сколько элементарных событий благоприятствуют наступлению A, и тогда $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{10^6}$.

---

[4] А вот история, которую любил рассказывать незабвенный И.Ф. Шарыгин : однажды ему (или кому-то из его приятелей) довелось читать лекцию в уездном городке N тамошним учителям математики, которых, красного словца ради, собралось 21 человек (стало быть, ровно 22 вместе с докладчиком). В этой связи лектор не мог не упомянуть про задачу о совпадении дат, и сообщил присутствующим, что вероятность совпадения дней рождения хотя бы у одной пары весьма велика. Провели блиц-опрос, но совпадений не обнаружилось. Как вдруг в дверь деликатно постучались, и в аудиторию вошел 23-ий, опоздавший.
После чего вероятность совпадения превысила уже половину, и оно, совпадение, тут же и состоялось.

[5] Было время, когда оплата проезда в общественном транспорте производилась иначе, чем теперь. Требовалось опустить мелкую монетку в *кассу*, установленную в салоне, покрутить соответствующее колесико и оторвать билет.

Событие A можно представить в виде суммы 28 попарно несовместных: $A=\sum_{i=0}^{27} A_i$, где A_i - означает, что сумма первых трех цифр равна сумме остальных и равна $i, 0 \le i \le 27$. В силу попарной несовместности $|A|=\sum_{i=0}^{27}|A_i|$.

Пусть событие B_i состоит из всех троек цифр (x_1, x_2, x_3) , таких что $x_1+x_2+x_3=i$. По правилу произведения тогда $|A_i|=|B_i|^2$ и остается вычислить $\sum_{i=0}^{i=27}|B_i|^2$, а для этого найти количество решений 28 систем вида :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=i, 0 \le i \le 27 \\ 0 \le x_j \le 9, 1 \le j \le 3 \end{cases}$$

Нам известно, что вообще число целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_n$ есть $\overline{C_n^i}=C_{n+i-1}^i$. В нашем случае, не учитывая пока ограничений, получим для уравнения $x_1+x_2+x_3=i \quad C_{i+2}^i=\frac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}$ решений.

Заметим, что для $0 \le i \le 9$ эти ограничения и не нужно учитывать, т.к. допустив, что хотя бы одно из x_j не меньше 10, получим сумму, заведомо превосходящую 9, и потому для первых десяти значений i: $\quad |B_i|=\frac{(i+1)\cdot(i+2)}{2}=\{1;3;6;10;15;21;28;36;45;55\}$

А дальше нам поможет формула включений и исключений.
Обозначим через $\Omega_i (0 \le i \le 27)$ множество троек неотрицательных целых чисел, сумма которых равна i. Рассмотрим, далее, множества S_{1i}, S_{2i}, S_{3i} , где, например,

$$S_{1i}=\left\{(x_1, x_2, x_3) \left| \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=i; 0 \le i \le 27 \\ \qquad x_j \ge 0; 1 \le j \le 3 \\ \qquad\quad x_1 \ge 10 \end{array} \right.\right.$$

Тогда событие $S_{1i}+S_{2i}+S_{3i}$ состоит из всех троек неотрицательных целых чисел с суммой i, у которых хотя бы одно число не меньше 10.

Ясно, что $|B_i|=|\Omega_i|-|S_{1i}+S_{2i}+S_{3i}|$ - количество всех троек с суммой i, где все числа не превосходят 9, равно количеству всех вообще троек с суммой i без троек, где хотя бы одно число не меньше 10. Но, по формуле включений и исключений,

$\left|S_{1i}+S_{2i}+S_{3i}\right|=\left|S_{1i}\right|+\left|S_{2i}\right|+\left|S_{3i}\right|-\left|S_{1i}\cdot S_{2i}\right|-\left|S_{1i}\cdot S_{3i}\right|-$

$-\left|S_{2i}\cdot S_{3i}\right|+\left|S_{1i}\cdot S_{2i}\cdot S_{3i}\right|$.

При $0\le i\le 9\left|S_{1i}\_+S_{2i}+S_{3i}\right|=0$, и поэтому, как и прежде, $\left|B_i\right|=\left|\Omega_i\right|=C_{i+2}^{i}$.

Когда же $10\le i\le 19$, то события $S_{1i}\cdot S_{2i}\cdot S_{3i};S_{1i}\cdot S_{2i};\ S_{1i}\cdot S_{3i};S_{2i}\cdot S_{3i}$ невозможны (например, событие $S_{1i}\cdot S_{2i}$ означает, что $x_1\ge 10,x_2\ge 10$ и сумма будет не меньше 20) и тогда $\left|S_{1i}+S_{2i}+S_{3i}\right|=\left|S_{1i}\right|+\left|S_{2i}\right|+\left|S_{3i}\right|=3\cdot\left|S_{1i}\right|$ (потому что каждое из событий S_{1i},S_{2i},S_{3i} содержит, очевидно, одинаковое количество троек).

Но $\left|S_{1i}\right|$ уже нетрудно вычислить, речь ведь идет о количестве неотрицательных решений систем вида

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=i;10\le i\le 19\\ x_1\ge 10\end{cases}$$

Замена $y_1=x_1-10;y_2=x_2;y_3=x_3$ приводит к уравнению $y_1+y_2+y_3=i-10$ с неотрицательными переменными. Значит, при $10\le i\le 19\left|B_i\right|=C_{i+2}^{i}-3\cdot C_{i-8}^{i-10}$.

Совершенно аналогичные рассуждения для $20\le i\le 27$ приводят к соотношениям $\left|B_i\right|=C_{i+2}^{i}-3\cdot C_{i-8}^{i-10}+3\cdot C_{i-8}^{i-20}$.

Остается подставить, возвести в квадрат и просуммировать. Однако вычисления можно сократить. В самом начале наших рассуждений следовало подметить, что $\left|B_i\right|=\left|B_{27-i}\right|;0\le i\le 27$.

И правда, сделав замену $y_j=9-x_j,1\le j\le 3$ в системе

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=i\\ 0\le x_j\le 9\end{cases}$, придем к системе $\begin{cases} y_1+y_2+y_3=27-i\\ 0\le y_j\le 9\end{cases}$ с числом решений $\left|B_{27-i}\right|$.

Так что искомая сумма $\sum\limits_{i=0}^{27}\left|B_i\right|^2$ равна $2\cdot\sum\limits_{i=0}^{13}\left|B_i\right|^2$ и нам понадобятся не 28 , а всего 14 чисел, из которых первые 10 уже найдены. По формуле $\left|B_i\right|=C_{i+2}^{i}-3\cdot C_{i-8}^{i-10},\left|B_{10}\right|=63,\left|B_{11}\right|=69,\left|B_{12}\right|$ $=73,\left|B_{13}\right|=75.$

Тогда $\left|A\right|=\sum\limits_{i=0}^{27}\left|B_i\right|^2=55252;P(A)=\dfrac{55252}{10^6}=0{,}055252$.

Лотерея и гипергеометрическое распределение.

Рассмотрим задачу: в урне имеется n шаров, из них n_1 белых, остальные - черные. Из урны производится выборка без возвращений объема k, порядок не важен. Какова вероятность, что в выборке окажется k_1 белый шар?

Здесь возможных вариантов всего C_n^k. Подсчитаем число благоприятных: каждая выборка объема k состоит из k_1 белых и $k-k_1$ черных шаров. Белые шары можно выбирать $C_{n_1}^{k_1}$ способами, черные - $C_{n-n_1}^{k-k_1}$. По правилу произведения имеем $C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}$ благоприятных исходов и окончательный ответ запишется в виде

$$\boxed{P_{n,n_1}(k,k_1)=\frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot C_{n-n_1}^{k-k_1}}{C_n^k}}$$

.

Про такие числа говорят, что они образуют *гипергеометрическое распределение.*

Оказывается, задачи о выборках белых и черных шаров тесно связаны с подсчетом шансов на успех при игре в лотерею. С прошлых веков известно немало разновидностей этой игры, ныне, кажется, обретающей в нашей стране очередную молодость. Поскольку суть всех лотерей, несмотря на обилие внешних отличий, одна и та же (и совсем незамысловата : лично у вас вероятность выигрыша мала, а для устроителей лотереи - наоборот) мы вскроем эту суть на примере старинной т.н. “генуэзской” лотереи, а также на примере сравнительно свежем - игре “спортлото”.

Участники генуэзской лотереи покупали билеты, пронумерованные числами от 1 до 90 . Продавались билеты также с двумя, тремя, четырьмя и пятью числами. В день *розыгрыша* (можно попробовать догадаться, откуда и почему пошло выражение “ вы меня разыгрываете “) из мешка доставали пять жетонов (всего в мешке их было90). Выигрывали те, у кого все числа на билете попадали во множество вынутых. Так, если вынули 3;7;13;22;62, а на вашем билете 13;7;62 , то такой билет выигрывал, а если - 13;7;30 , то - нет. Покупая билет с одним числом, можно было по правилам выиграть в 15 раз больше стоимости билета; с двумя числами - в 270 раз; с тремя - в 5500 раз; с четырьмя - в 75000 раз; с пятью - в 1000000 раз. Найдем вероятность выигрыша при игре на один номер. Он выступает в роли белого шара (ваш номер), и в урне (мешке) 1 белый и 89 черных шаров. Розыгрыш означает выборку объемом 5. Интересующая нас вероятность совпадает с вероятностью того, что в эту выборку попадет 1 белый шар.

Итак, $n = 90; n_1 = 1; k = 5; k_1 = 1$.

$$P_1 = \frac{C_1^1 \cdot C_{89}^4}{C_{90}^5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 0{,}055.$$

Значит, в среднем из восемнадцати игроков, поставивших на единственный номер будет выигрывать один.

(Не нужно только понимать это так, будто бы из каждых восемнадцати кто-то непременно выиграет, а остальные обязательно проиграют; нет, подразумевается именно *среднее* число выигрышей за большой промежуток времени при большом числе участников. По этому поводу известен такой, с элементами черного юмора, анекдот:

Больной, отправившись на прием к врачу, с ужасом узнает, что, согласно статистике, с его хворью выживает лишь каждый десятый.

- Впрочем, - тут же утешает его доктор, - вам повезло, так как предыдущие девять пациентов скончались)

В среднем устроители лотереи получат за 18 билетов, а заплатят за 15, т.е. прикарманят себе стоимость трех билетов. Ситуация типичная!

При игре на два номера $P_2 = \dfrac{C_2^2 \cdot C_{88}^3}{C_{90}^5} = \dfrac{2}{801} \approx 0{,}0012$ и лотерейщики присвоят себе в среднем стоимость 261 билета. Легко убедиться, что при последующем увеличении числа номеров ваши шансы на успех стремительно падают, а средняя прибыль лотерейщиков возрастает.

Рассмотрим теперь лотерею “Спортлото”.

Участник вычеркивает в специальной карточке 6 из 49 первых натуральных чисел, символизирующих тот или иной вид спорта, и отправляет ее в тиражную комиссию. Потом 49 занумерованных шариков помещают в барабан, который вращается, плюясь шарами - пока их не наберется 6 штук. Участник выигрывает тем больше, чем больше номеров он угадал. Его шесть шаров (вычеркнутые в карточке) - белые, остальные - черные. Основные параметры гипергеометрического распределения, описывающего эту лотерею - $n = 49; k = 6; n_1 = 6$. Например, вероятность угадать один шар, вообщем-то, не слишком мала: $P_1 = \dfrac{C_6^1 \cdot C_{43}^5}{C_{49}^6} \approx 0{,}413$ - но выигрыш при этом настолько мизерный, что все равно не окупает, в среднем, стоимости билета. Крупный же выигрыш, вроде автомобиля, присуждается за угадывание шести номеров. Подсчет дает $P_6 = \dfrac{1}{C_{49}^6} \approx 7{,}2 \cdot 10^{-8}$ - и сообразить, чем это число отличается от нуля, довольно затруднительно.

Так что - не бросайте денег на ветер! Не позволяйте всяким полупочтенным личностям обогащаться на счет ваших слабостей и объективных законов природы. Как писал поэт Тютчев своей жене: “ *... жить здесь, в ожидании чего-то, угодного судьбе, было бы так же бессмысленно, как серьезно рассчитывать на выигрыш в лотерею* “.

Упражнения.

3.1 (*Кости Зихерман*)

Имеются две пары правильных игральных костей. Одна пара - стандартная, а в другой числа нанесены на грани следующим образом: первая кость - $\{1;2;2;3;3;4\}$; вторая кость - $\{1;3;4;5;6;8\}$. При бросании любой из этих двух пар число выпавших очков изменяется от 1 до 12. Указать соответствующие вероятности для обычных и “странных” костей.

3.2

Брошено две правильные игральные кости. Какова вероятность, что сумма выпавших очков не превзойдет восьми?

3.3

Брошено четыре правильных монеты. Определить вероятность :

а) выпадения ровно трех гербов

б) выпадения не более трех гербов.

3.4

Два игрока поочередно подбрасывают правильную монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша у начинающего игру?

3.5 (*Схема Бернулли*)

Монету, возможно, неправильную подкидывают n раз. В каждом отдельном испытании вероятность выпадения решки - $p \in [0;1]$, а герба - $q = 1 - p$. Элементарными событиями в данном эксперименте можно считать всевозможные упорядоченные последовательности длины n из единиц (решки) и нулей (гербы). Взяв произвольное элементарное событие, состоящие из k единиц и $n-k$ нулей, по определению положим $P(\omega_i) = p^k \cdot q^{n-k} (1 \le i \le 2^n)$.

а) Найти вероятность $P_n(k)(0 \le k \le n)$ того, что в n испытаниях выпадет ровно k решек.

б) Доказать, что функция $P(\omega_i)$ действительно задает вероятность на пространстве последовательностей.

в) Покажите, что при таком способе задания вероятности - вероятность того, что в i-ом испытании $(1 \le i \le n)$ монета выпала решкой, по-прежнему равна p.

г) Генеральная совокупность состоит из n_1 белых и $n - n_1$ черных шаров. Производится выборка с возвращением (порядок важен) объема k. Нужно определить, какова вероятность того, что в выборку попадет k_1 белый шар. Найти связь между этим экспериментом и k-кратным бросанием неправильной монеты.

3.6

Из некоторого множества Ω случайно выбирают два подмножества A и B. Найти $P(A \cdot B = \varnothing)$, если $|\Omega| = n; |A| = m; |B| = k$.

3.7

Правильную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших очков не превысит 12. Какая общая сумма очков будет наиболее вероятной? Тот же вопрос для n очков $(n \ge 6)$.

3.8

Можно ли утяжелить две правильные игральные кости таким образом, чтобы все возможные суммы выпавших очков (от 2 до 12) стали бы равновероятными?

3.9

На полке в случайном порядке расставлено сорок книг, среди которых трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что тома этого собрания расположены в порядке возрастания, но не обязательно рядом.

3.10

В шкафу находятся десять разных пар туфель. Случайно выбираются четыре туфли. Найти вероятность того, что среди выбранных туфель окажется хотя бы одна пара.

3.11

Матч прерывается, когда первому игроку осталось выиграть до победы n, а второму - m партий. Разделить по справедливости приз между ними (их силы примерно равны).

3.12

Какое минимальное количество людей необходимо собрать, чтобы вероятность совпадения месяцев рождения хотя бы у двоих превысила половину?

3.13

Некая фирма продает коробки конфет двадцати пяти различных сортов. Собравший обертки всех видов получает вознаграждение. Сколько нужно купить коробок, чтобы вероятность завоевать приз превысила половину? В отдельной коробке - конфеты только одного сорта, какого именно, определить можно лишь после покупки. Распределение сортов считать равномерным. (Задача взята из реальной жизни. Последнее допущение, о равномерности, наверняка существенно идеализирует, чтобы не сказать искажает, действительность. Ходят упорные слухи, что подобного рода затеи - обыкновенное мошенничество: некоторые сорта поступают в продажу в малых количествах или не поступают вовсе. В небеспочвенности этих слухов автор убедился, разговорившись однажды в неформальной и непринужденной обстановке с одним из уличных торговцев лотерейными билетами - кому не доводилось слышать их навязчивых зазываний-завываний “ прикупить пяток билетов разом, и если ни один не выиграет - деньги вернем, и еще сколько-то приплатим “. Думалось, все просто - выигрыш в такой ситуации весьма вероятен, но настолько ничтожен, что не окупает стоимости пяти билетов. На деле же оказалось еще проще: секрет ремесла заключается в том, что билеты крепятся дырочками, наподобие туалетной бумаги, последовательно друг к другу, и из каждых пяти - первые четыре обязательно “пустышки”, а пятый, совершенно неотвратимо, с выигрышем.)

3.14

Какова вероятность получить четырехзначный счастливый билет?

3.15

При игре в генуэзскую лотерею выигрыш превышает стоимость билета в 5500 раз. Подсчитать средний доход лотерейщика.

3.16

Какова вероятность угадать четыре номера в “Спортлото”?

3.17

Группа из $2n$ мужчин и $2n$ женщин произвольно делится на две равные части. Какова вероятность, что в каждой части число мужчин и женщин одинаково?

Ответы и решения.

3.1

Как ни странно, для обеих пар вероятности будут совпадать:

$$P_2 = P_{12} = \frac{1}{36}; P_3 = P_{11} = \frac{2}{36}; P_4 = P_{10} = \frac{3}{36}; P_5 = P_9 = \frac{4}{36};\ P_6 = P_8 = \frac{5}{36}; P_7 = \frac{6}{36}.$$

Согласно Мартину Гарднеру, этим изобретением мы обязаны полковнику Джорджу Зихерману из Буффало. Можно показать, что только такие кости (из имеющих на гранях натуральные числа) тождественны (в смысле совпадения вероятностей) обычным.

3.2

$$P\left(\sum \le 8\right) = \sum_{i=2}^{8} P_i = \tfrac{26}{36} \approx 0{,}72\ .$$

3.3

а) $\frac{4}{16}$=0,25

б) 1-$\frac{1}{16} \approx$ 0,94

3.4

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^5} + \Lambda = \frac{1/2}{1-(1/2)^2} = \tfrac{2}{3}$$

3.5

Эксперимент, описанный в этой задаче, называется схемой Бернулли - в честь Якоба Бернулли (подробнее об этом см. главу шестую).

а) $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ - на n мест нужно выбрать k единиц, и вероятность каждой такой выборки $p^k \cdot q^{n-k}$.

б) $P(\Omega_n) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1$

в) Представим наше событие M_i в виде суммы $n-1$ попарно непересекающихся событий $L_1, L_2, ..., L_{n-1}$ - где L_j означает, что в оставшихся $n-1$ бросках выпало j решек, а на i-ом месте выпала решка. Тогда $P(L_j) = p \cdot C_{n-1}^j \cdot p^j \cdot q^{n-1-j}$ и, наконец, получим, что

$$P(B_i) = p \cdot \left(\sum_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j \cdot p^j \cdot q^{(n-1)-j} \right) = p \cdot (p+q)^{n-1} = p\ .$$

г) Всех выборок будет n^k . Сосчитаем благоприятные: поскольку важен порядок появления белых шаров, выберем сначала для них k_1 мест, что можно сделать $C_k^{k_1}$ способами. Далее, выбрав k_1 мест для белых шаров, мы можем поместить на эти места белые шары $n_1^{k_1}$ способами, а на оставшиеся $k-k_1$ мест $(n-n_1)^{k-k_1}$ способами - черные. Поэтому $P = \dfrac{C_k^{k_1} \cdot n_1^{k_1} \cdot (n - n_1)^{k-k_1}}{n^k}$. Введя обозначения $p = \dfrac{n_1}{n}; q = \dfrac{n - n_1}{n} = 1 - p$ (вероятность выбрать черный или белый шар из генеральной совокупности), получим следующее:

$$P = C_k^{k_1} \cdot \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} \cdot \left(\frac{n - n_1}{n}\right)^{k-k_1} = C_k^{k_1} \cdot p^{k_1} \cdot q^{k-k_1} .$$

Это соотношение, конечно, не может не навести на мысль о том, что здесь должна быть какая-то связь с схемой Бернулли. И действительно, всякий раз вероятность вытащить белый шар - $p = \dfrac{n_1}{n}$, а черный - $q = 1 - p$ и наш эксперимент можно трактовать как k - кратное бросание неправильной монеты.

3.6

Если $n < m + k$, то $P = 0$. Если $n \ge m + k$, то всех исходов - $C_n^k \cdot C_n^m$. Выберем k элементов множества B. Чтобы множество A не пересеклось с ним, его элементы нужно выбирать из оставшихся $n - k$. Итак, $P = \dfrac{C_n^k \cdot C_{n-k}^m}{C_n^k \cdot C_n^m} = \dfrac{C_{n-k}^m}{C_n^m}$ $\left(= \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}\right.$ - т.к. мы можем сначала выбрать элементы множества A).

3.7

Перед последним броском сумма выпавших очков может равняться одному из чисел от 7 до 12. В первом случае возможны исходы от 8 до 13 во втором - от 9 до 14 и т.д. Во все эти множества входит число 13 и другого числа с таким свойством нет. Оно и будет наиболее вероятной суммой. Для произвольного $n \ge 6$, рассуждая аналогично, придем к $n + 1$.

3.8

Всего имеем одиннадцать различных исходов и пусть они равновероятны. Тогда

$$\frac{1}{11} = P_7 = p_1 \cdot q_6 + p_2 \cdot q_5 + p_3 \cdot q_4 + p_5 \cdot q_2 + p_6 \cdot q_1 \ge$$

$$\ge p_1 q_6 + p_6 q_1 = p_1 q_1 \left(\frac{q_6}{q_1}\right) + p_6 q_6 \left(\frac{q_1}{q_6}\right) = \frac{1}{11}\left(\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6}\right),$$

так как $p_1 \cdot q_1 = P_2 = \dfrac{1}{11} = P_{12} = p_6 \cdot q_6$.

Возникло неравенство вида $x+\frac{1}{x}\le 1; x>0$. Однако легко показать, что при

$x>0 \quad x+\frac{1}{x}\ge 2$. Противоречие.

3.9

$P=\frac{C_{40}^{3}\cdot 37!}{40!}=\frac{1}{6}\approx$ 0,167.

3.10

Вычислим вероятность дополнительного события. Всего исходов - C_{20}^{4}. Количество благоприятных найдем из следующих соображений: первую туфлю можно выбрать 20 способами, вторую - 18 , третью - 16 и четвертую - 14 . Кроме того, следует учесть, что порядок нам не важен, и поэтому благоприятных исходов $\frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{4!}$. Значит,

$P=1-\frac{20\cdot 18\cdot 16\cdot 14}{C_{20}^{4}\cdot 4!}=\frac{99}{323}\approx$ 0,306.

3.11

Продолжим матч $n+m-1$ фиктивными играми: дольше всего борьба будет продолжаться, когда первый выиграет $n-1$, а второй - $m-1$ партию, и все будет зависеть от последнего поединка. Всего исходов 2^{n+m-1} и победе первого благоприятствуют $\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{i}$ - для этого он должен выиграть $n, n+1, ..., n+m-1$ партий. Приз следует разделить в отношении $\sum\limits_{i=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{i} : \sum\limits_{i=m}^{n+m-1}C_{n+m-1}^{i}$.

3.12

Пять человек.

3.13

Пусть P_n - вероятность собрать все 25 этикеток, купив n коробок. Всего исходов $\overline{C_{25}^{n}}$. Количество благоприятных есть количество решений системы

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{25}x_i=n\\ x_i\ge 1; 1\le i\le 25\end{cases}$$ Замена $y_i=x_i-1$ приводит к уравнению

$\sum\limits_{i=1}^{25}y_i=n-25$ в неотрицательных числах, количество решений которого $\overline{C_{25}^{n-25}}$.

$$P_n=\frac{\overline{C_{25}^{n-25}}}{\overline{C_{25}^{n}}}=\frac{C_{n-1}^{24}}{C_{n+24}^{24}}=\frac{(n-1)!\cdot n!}{(n-25)!\cdot(n+24)!}=\frac{(n-1)\Lambda\ (n-24)}{(n+1)\Lambda\ (n+24)}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\Lambda\ \left(1-\frac{24}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\Lambda\ \left(1+\frac{24}{n}\right)}$$

Воспользуемся тем, что при малых x $\ln(1+x) \approx x$.

$P_n \approx \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(P_n) \approx -0{,}7 \Leftrightarrow -\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{24} i \approx -0{,}7 \Leftrightarrow n \approx \frac{25\cdot 24\cdot 10}{7}$ $n \approx 857$, и, начиная с 858, вероятность превысит половину.

3.14

$$P = \frac{2\sum_{i=0}^{8}\left(\overline{C_2^i}\right)^2 + \left(\overline{C_2^9}\right)^2}{10000} = \frac{2\sum_{k=1}^{9} k^2 + 10^2}{10000} = \frac{2\cdot 9\cdot 10\cdot 19}{10000} = 0{,}067.$$

3.15

Стоимость 6248 билетов.

3.15

$$P = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 9{,}7\cdot 10^4$$

3.16

Переформулируем задачу.

В урне $4n$ шара, из которых $2n$ белых и столько же черных шаров. Производится выборка без возвращения объема $2n$. Какова вероятность, что в нее попадет n белых шаров?

Имеем гипергеометрическое распределение: $P = \frac{\left(C_{2n}^n\right)^2}{C_{4n}^{2n}}$

Глава четвертая

ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ НЕСКОЛЬКИХ СОБЫТИЙ

Для вероятности суммы нескольких событий можно вывести формулу, аналогичную формуле включений и исключений - используя индукцию и для обоснования индуктивного перехода известное свойство $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$:

$$P\left(\sum_{1\le i\le n} A_i\right) = \sum_{1\le i\le n} P(A_i) - \sum_{1\le i<_{J}}$$
$$-\Lambda \;+\Lambda + (-1)^{n+1} P(A_1 A_2 \Lambda$$
.

Руководствуясь этой формулой, разберем две хрестоматийные задачи теории вероятностей: задачу *о раздаче подарков* и задачу *о взаимной простоте двух случайно взятых натуральных чисел*.

Задача о подарках.

Несколько человек решили сделать друг другу подарки оригинальным способом: каждый приносит подарок, все подарки складываются вместе, перемешиваются и распределяются случайно среди участников. Какова вероятность, что хотя бы к одному из участников вернется его собственный подарок?

Легко понять, что для каждого отдельного участника вероятность получить свой подарок обратно составляет $\frac{1}{n}$ $(n \geq 2$ - общее количество людей) и стремится к нулю с ростом n - что полностью согласуется с нашей интуицией. Однако предвидеть заранее, не производя никаких выкладок, что начиная с $n = 6$ вероятность хотя бы одного совпадения, будучи больше половины, практически не меняется - едва ли кто в состоянии.

Задача допускает множество забавных формулировок: или это рассеянная секретарша, как попало раскладывающая письма по конвертам, или столь же рассеянный гардеробщик, перепутавший номерки, а иногда даже нетрезвые матросы, которых, после весело проведенного в увольнительной времени, сон настигает в первой попавшейся койке. В книге Монморта “Об измерении случайности или о вероятности результатов в азартных играх (1708 г.), где впервые, насколько известно, обсуждалась эта задача - она выступала в карточном варианте. Отвлекаясь от подарков, секретарш и матросов, переведем условие на математический язык:

Дано множество $\{1;2;...;n\}$ $(n \geq 2)$. Берется случайная перестановка этих чисел. Какова вероятность, что хотя бы одно число останется на месте?

Пусть событие A_i $(1 \leq i \leq n)$ состоит в том, что число i осталось на месте. Интересующее нас событие A есть сумма всех таких событий: $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, причем события $\{A_i\}$ пересекаются. Придется применять формулу полной вероятности, а для этого нужно вычислить вероятности вида $P(A_i); P(A_i A_j); P(A_i A_j A_k)$ и т.д., что не вызывает особых затруднений:

$$P(A_1) = P(A_2) = ... = P(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!}$$

(всего исходов $n!$, из них благоприятных $(n-1)!$, т. к. одно место занято числом i , а на оставшиеся $n-1$ мест выбираем $n-1$ оставшихся чисел)

$$P(A_1 A_2) = P(A_1 A_3) = ... = P(A_{n-1} A_n) = \frac{(n-2)!}{n!}$$

(два места заняты, а на оставшиеся места размещаются оставшиеся числа)

$P(A_1A_2A_3) = P(A_1A_2A_4) = ... = P(A_{n-2}A_{n-1}A_n) = \dfrac{(n-3)!}{n!}$ . . . . и т. д. . . . .

$$P(A_1A_2\Lambda\ A_n) = \frac{(n-n)!}{n!} = \frac{1}{n!}$$

Подставляя найденные значения в формулу включений и исключений, заметим, что слагаемых вида $P(A_i)$ $n = C_n^1$ штук; слагаемых вида $P(A_iA_j)$ C_n^2 штук (выбрать два числа из n - все равно что задать пару (i, j);$1 \le i < j \le n$); вида $P(A_iA_jA_k)$ - C_n^3 и т.д., . . . , $P(A_1A_2\Lambda\ A_n)1 = C_n^n$ и тогда:

$$P_n(A) = 1 - \frac{n!(n-2)!}{n!(n-2)!2!} + \frac{n!(n-3)!}{n!(n-3)!3!} - \Lambda + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \Lambda + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}.$$

Теперь самое время вспомнить, что при всех значениях x экспонента разлагается в ряд $\exp(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \Lambda$

При $x = -1$ получим, что $e^{-1} = \exp(-1) = \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{4!} - \Lambda$

Отсюда следует, что $P_n(A)$ представляет собой первые n членов разложения $1 - e^{-1}$ в ряд и что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(A)$ равен этому числу.

Отметим, что сходимость просто стремительная: $P_2(A) = 0{,}5$; $P_3(A) \approx 0{,}6666; P_4(A) \approx 0{,}6250; P_5(A) \approx 0{,}6333; P_6(A) \approx 0{,}6321$. $P_5(A)$ совпадает с $1 - e^{-1}$ до второго, а $P_6(A)$ - до четвертого знака после запятой. Последующие вероятности фактически равны этому числу.

И, наверное, недаром прославленный фантаст, один из братьев Стругацких (Борис), получил в свое время техническое образование, потому что в их книге “ Отель “У погибшего альпиниста” “ имеется такой диалог:

- ... Согласитесь, - журчал дю Барнстокр, - мысль о том, что чужие глаза внимательно и прилежно изучают нашу старушку-планету через бездны Космоса, - эта мысль уже сама по себе занимает воображение ...

- Подсчитал, - сказал Симонэ. - Если они умеют отличать населенные системы от ненаселенных, и наблюдают только населенные, то вероятность будет единица минус “е” в степени минус единица.

- Сколько же это будет в численном выражении? - осведомился дю Барнстокр.
- Приблизительно две трети.

Конечно, рассмотренная нами задача имеет с внеземными цивилизациями столько же общего, сколько внеземные цивилизации - с производством, к примеру, конфет “Мишка на севере”. Научный термин использован фантастами для придания художественному произведению дополнительной достоверности, особенно в глазах малосведущего в математических дисциплинах читателя.

Проявив, однако, некоторую изобретательность, эту задачу можно связать, и с гораздо большими на то основаниями, с такими глобальными проблемами, как идеальная любовь и поиск идеальной пары. Звучит неправдоподобно, но тем не менее. Согласно величайшему древнегреческому мыслителю Платону ($\approx$427-347 гг. до Р.Х.), проблема состоит в следующем (диалог “Пир”, фрагмент цитируется с сокращениями):

Когда-то наша природа была не такой, как теперь, а совсем другой. Тогда у каждого человека тело было округлое, рук было четыре, ног столько же, сколько рук, и у каждого на круглой шее два лица, совершенно одинаковых; голова же у двух этих лиц, глядевших в противоположные стороны, была общая. Передвигался такой человек либо прямо, во весь рост, - так же как мы теперь, но любой из двух сторон вперед, либо, если торопился, шел колесом, занося ноги вверх и перекатываясь на восьми конечностях. Страшные своей силой и мощью, они питали великие замыслы и посягали даже на власть богов. И вот Зевс и прочие боги стали совещаться, как поступить с ними, и не знали, как быть: убить их, поразив род людской громом, как когда-то гигантов, - тогда боги лишатся почестей и приношений от людей; но и мириться с таким бесчинством тоже нельзя было. Наконец Зевс, насилу кое-что придумав, говорит:
- Кажется, я нашел способ и сохранить людей, и положить конец их буйству, уменьшив их силу. Я разрежу каждого из них пополам, и тогда они, во-первых, станут слабее, а во-вторых, полезней для нас, потому что число их увеличится. А если они и после этого не угомонятся и начнут буйствовать, я рассеку их пополам снова, и они запрыгают у меня на одной ножке.

И вот когда тела были рассечены пополам, каждая половина с вожделением устремилась к другой своей половине.

Итак, каждый из нас - это половинка человека, рассеченного на две камбалоподобные части, и поэтому каждый ищет всегда соответствующую ему половину.

Будем считать, что на Земле одинаковое количество мужчин и женщин (на самом деле женщин больше, но в процентном отношении ненамного) и выключим из рассмотрения сексуальные меньшинства -подавляющее большинство людей имеет здоровую половую ориентацию (Платон объяснял эти отклонения тем, что изначально люди были трех полов - спаренного мужского, спаренного женского и *андрогины* - смешанного). Зафиксируем, например, множество всех женщин в каком-либо порядке, а мужчин расставим в порядке "идеального соответствия" и занумеруем числами от 1 до n. Всевозможным сердечным союзам будут соответствовать всевозможные перестановки этих чисел, причем союз будет идеальным, если число остается на месте. Это и означает, что шансы отдельного индивидуума обрести свою половину практически равны нулю, но следует утешаться тем, что хотя бы одна пара нашла друг друга с вероятностью $1-e^{-1}$.

Задача о взаимной простоте двух случайно взятых натуральных чисел.

Наугад выбираются два натуральных числа. Какова вероятность, что они будут взаимно простыми (образуют несократимую дробь) ?

Эта задача была решена в прошлом веке русским математиком Чебышевым (1821-1894 гг.). Пафнутий Львович Чебышев (ударение в фамилии следует ставить на последний слог и произносить *ЧебышОв*), ученый мирового класса, получил новые и важные результаты во многих разделах математики. Упомянем лишь некоторые: в теории вероятностей - т.н. неравенство Чебышева и закон больших чисел в форме Чебышева (см. главу 8); в теории функций - специального вида многочлены (именуемые в научной литературе многочленами Чебышева), наилучшим образом приближающие функцию на отрезке; в теории чисел - первым доказал знаменитый постулат Бертрана (между n и $2n-2$ при $n>3$ всегда заключено хотя бы одно простое число); в дифференциальной геометрии - семейства линий на поверхности, образующих четырехугольники с равными противоположными сторонами (т.н. сети Чебышева). С последним открытием связана одна из тех легенд, большим количеством которых непременно обрастает со временем жизнь великих людей. Дело в том, что практически сети Чебышева позволяют уменьшить общую площадь расходуемых материалов и число их кусков при раскрое ткани. Об этом Чебышев и собирался поведать публике, выступив в Париже с докладом " О кройке платьев ". В зале, помимо ученых, привлеченные заманчивым названием, собрались во множестве также и люди, весьма далекие от какой-либо математики: модельеры, модницы и щеголи. Свою речь Пафнутий Львович начал фразой: "

Предположим, для простоты, что человек имеет форму шара... “ - после чего аудитория в считанные секунды значительно поредела.

Но вернемся к задаче о взаимной простоте. Сразу сообщим ответ: $P=\frac{6}{\pi^2}\approx 0{,}608...$ (опять-таки приблизительно две трети в численном выражении!). В свете другого поразительного результата - $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ - ответ покажется менее странным, хотя и увязать эти два феномена вместе, как вскоре увидим, не так-то просто.

Над вычислением суммы $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....$ безуспешно бились многие математики. Наконец, задача привлекла внимание великого Эйлера (во всей математике, от самых элементарных и до самых наивысших ее областей, трудно отыскать такую, где не встречалась бы какая-нибудь “формула Эйлера” или “теорема Эйлера” или “функция Эйлера”). В 40-ых годах 18-го века ему посчастливилось открыть точное значение суммы при помощи одной искрометной идеи. Воспроизведем ход его рассуждений.

Отправной точкой является простой алгебраический факт: если уравнение $a_{2n}\cdot x^{2n}+a_{2n-2}\cdot x^{2n-2}+....+a_2\cdot x^2+a_0=0$ имеет $2n$ ненулевых (т.е. $a_0\neq 0$) корней $\{\pm x_1;\pm x_2;...;\pm x_n\}$, то $a_2=-a_0\cdot\left(\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+...\frac{1}{x_n^2}\right)$.

Действительно, достаточно сравнить коэффициенты при x^{2n-2} в тождестве
$a_{2n}\cdot x^{2n}+a_{2n-2}\cdot x^{2n-2}+...+a_0=a_{2n}\cdot\left(x-x_1^2\right)\Lambda\left(x-x_n^2\right)$
(откуда $a_{2n-2}=-a_{2n}\cdot\left(x_1^2+...+x_n^2\right)$) и произвести замену $x^2=\frac{1}{y^2}$.

Эйлер рассматривает уравнение $\sin x=0$ с корнями $\{0;\pm\pi;\pm 2\pi;...\}$. Избавляясь затем от нулевого решения, он переходит к уравнению $\frac{\sin x}{x}=0$, причем левую часть раскладывает в ряд и считает ее “многочленом бесконечной степени” :
$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\Lambda$; $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\Lambda$; и к уравнению $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\Lambda=0$ с корнями $\{\pm\pi;\pm 2\pi;..\}$ бесстрашно применяет утверждение, справедливое для многочленов ко-

нечной степени, мгновенно заключая, что $(-1)\cdot\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\Lambda\right)=-\frac{1}{3!}$, т.е. что

$\frac{1}{\pi^2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{6}$.

Сам Эйлер прекрасно осознавал нестрогость этого метода. Поэтому он:

а) вычислил значение суммы $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ с точностью до семи знаков после запятой, с той же точностью вычислил $\frac{\pi^2}{6}$ - цифры совпали полностью;

б) нашел своим методом уже известную сумму $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\Lambda$ и, как до него Лейбниц, получил $\frac{\pi}{4}$;

в) открыл, что $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}$, снова терпеливо и аккуратно проверив совпадение нескольких первых десятичных знаков (хуже обстоит дело с нечетными степенями: в 70-ых годах нашего века доказали, что бесконечная сумма обратных кубов - иррациональное число; это – все, ну или почти все, что известно о нечетных степенях);

г) в довершении, лет через десять нашел новое, в гораздо более высокой степени отвечавшее требованиям математической строгости, доказательство.

Рассказывают, что в 18-ом веке Петербург , по приглашению Екатерины Второй, посетил известный вольнодумец и атеист Дени Дидро. Опасались, что некоторые его высказывания (императрица, впрочем, находила их забавными) могут вызвать нежелательное брожение умов. Посему между знаменитым энциклопедистом и скромным членом Петербургской Академии Наук Леонардом Эйлером был устроен диспут. Эйлер обещался в присутствии всего императорского двора предъявить доказательство Бытия Божия. Диспут оказался кратким. В назначенное время и в назначенном месте Эйлер, хорошо осведомленный о полной некомпетентности Дидро в вопросах математики, мрачным голосом обратился к своему оппоненту с такими словами: “ A в квадрате минус B в квадрате равно A минус B, умноженному на A плюс B. Следовательно, Бог существует. Вы согласны? “ При общем смехе Дидро не нашелся ничего ответить и тем же вечером спешно отбыл на родину. Между тем, при желании Эйлер мог сразить соперника аргументом и повесомей: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$, следовательно, Бог существует!

Перейдем непосредственно к нашей задаче. Пусть P_n - вероятность того, что два случайно выбранных натуральных числа ξ и η из отрезка $[1;n]$ взаимно просты. Нужно найти $P=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$. Чтобы не запутаться, сначала наметим план решения.

1. *Обозначения и главная идея.*

Прежде всего, введем множество $\{p_1;p_2;p_3;...\}=\{2;3;5;...\}$ простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Обозначим затем через $B_{k,n}$ событие, состоящее в том, что случайно взятое натуральное ξ $(\xi\le n)$ делится на фиксированное $k\in N$. Аналогично, $C_{k,n}$ наступает, если на k делится случайно взятое η. Тогда событие $A_{k,n}=B_{k,n}\cdot C_{k,n}$ означает, что два случайных числа ξ и η из отрезка $[1;n]$ делятся на k. Пусть, далее, A_n - событие, означающее, что ξ и η из отрезка $[1;n]$ взаимно просты ($P_n=P(A_n)$).

Тогда $\overline{A_n}=\sum\limits_{2\le p_i\le n}A_{p_i,n}$ (два числа из отрезка $[1;n]$ *не* взаимно просты, если найдется некоторое простое $p_i\in[2;n]$, на которое делятся оба этих числа) и $P_n=1-P\left(\overline{A_n}\right)$.

2 - 5. *Технические детали.*

2. Нам нужно будет применить формулу вероятности суммы n событий для подсчета $P\left(\overline{A_n}\right)$. Поэтому заранее вычислим $P\left(A_{p_i,n}\right),P\left(A_{p_i,n}\cdot A_{p_j,n}\right)$ и т.д. Кроме того, поскольку для вычисления P придется переходить к пределу, нам также понадобятся значения $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(A_{p_i,n}\right),\lim\limits_{n\to\infty}P\left(A_{p_i,n}\cdot A_{p_j,n}\right)$ и т.д. - найдем заранее и их.

3. Применим формулу вероятности суммы к $P\left(\overline{A_n}\right)$ и найдем $P_n=1-P\left(\overline{A_n}\right)$.

4. Покажем, что $P=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\Lambda$

5. Покажем, что

$$P=\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_i^2}\right)=\frac{1}{1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}+\sum\limits_{i,j=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2\cdot p_j^2}+\sum\limits_{i,j,k=1}^{\infty}\frac{1}{p_i^2\cdot p_j^2\cdot p_k^2}+...}$$

(ввиду абсолютной сходимости все можно складывать и умножать в каком угодно порядке).

Так как любое натуральное $n>1$ однозначно (до порядка сомножителей) представимо как произведение $p_{i_1}\cdot p_{i_2}\Lambda\ p_{i_m}$ некоторых простых чисел , то *все* слагаемые вида $\frac{1}{n^2}$

войдут в знаменатель дроби, притом только один раз.

Это и означает, что $P = \dfrac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} = \dfrac{6}{\pi^2}$.

Теперь по пунктам:

2.

Найдем $P(B_{k,n}) = P(C_{k,n})$.

Всего исходов n. Среди чисел $\{1;...;n\}$ на k будут делится все числа вида $1 \cdot k; 2 \cdot k; ...; m \cdot k$, где m - последнее кратное k, уместившееся в отрезке $[1;n]$, т.е. $m \cdot k \le n; (m+1) \cdot k > n$. По определению целой части числа, $m = \left[\dfrac{n}{k}\right]$. Но m и есть количество благоприятных исходов, $\Rightarrow P(B_{k,n}) = \dfrac{\left[\frac{n}{k}\right]}{n}$. Легко показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_{k,n}) = \dfrac{1}{k}$.

Отсюда, используя правило произведения, получим, что $P(A_{p_i,n}) = \dfrac{\left[\frac{n}{p_i}\right]^2}{n^2}$, а перейдя к пределу - что $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_{p_i,n}) = \dfrac{1}{p_i^2}$. Рассуждая совершенно аналогично, видим, что

$$P(A_{p_i,n} \cdot A_{p_j,n}) = \frac{\left\lfloor \frac{n}{p_i \cdot p_j} \right\rfloor^2}{n^2}; \lim_{n\to\infty} P(A_{p_i,n} \cdot A_{p_j,n}) = \frac{1}{p_i^2 \cdot p_j^2} \text{ и т.д.}$$

3. $$P(\overline{A_n}) = P\left(\sum_{2\le p_i\le n} A_{p_i,n}\right) = \sum_{2\le p_i\le n} \frac{\left[\frac{n}{p_i}\right]^2}{n^2} - \sum_{2\le p_i<p_j\le n} \frac{\left\lfloor \frac{n}{p_i\cdot p_j}\right\rfloor^2}{n^2} + \Lambda + +(-1)^{t_{\max}+1} \cdot \frac{\left\lfloor \frac{n}{p_1\cdot p_2 \Lambda\, p_{t_{\max}}}\right\rfloor^2}{n^2};$$

$P_n = 1 - P(\overline{A_n})$.

4.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = 1 - \sum_{i\ge1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2} + \sum_{j>i\ge1}^{\infty} \frac{1}{p_i^2 \cdot p_j^2} - ... = \left(1 - \frac{1}{p_1^2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{p_2^2}\right)\Lambda = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \tfrac{1}{p_i^2}\right).$$

5.

По формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии,

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p^2)^2} + \frac{1}{(p^2)^3} + ... = 1 + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p^2)^2} + \frac{1}{(p^3)^2} ... \text{ Тогда}$$

$$\prod_{i=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_i^2}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{(p_1^2)^2} + ...\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{(p_2^2)^2} + ...\right)\Lambda}$$

Раскрывая скобки и меняя порядок суммирования, получим в знаменателе суммы все-возможных дробей вида $\frac{1}{\left(p_{i_1} \cdot p_{i_2} \Lambda\, p_{i_k}\right)^2}$.

Упражнения.

4.1

Условия те же, что и в задаче о подарках. Вычислить:

а) вероятность $P_{0,n}$ того, что при распределении подарков нет ни одного совпадения; $P_0 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{0,n}$

б) вероятность $P_{1,n}$ ровно одного совпадения; $P_1 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}$

в) вероятность $P_{k,n}$ ровно k совпадений; $P_k = \lim\limits_{n\to\infty} P_{k,n}$

4.2

Каждый из n различных подарков случайно распределяется среди n человек, так что одному человеку может достаться несколько подарков. Вычислить:

а) вероятность $P_{0,n}$ того, что определенный человек не получит подарка; $P_0 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{0,n}$

б) вероятность $P_{1,n}$ получения определенным человеком ровно одного подарка; $P_1 = \lim\limits_{n\to\infty} P_{1,n}$

в) вероятность $P_{k,n}$ получения определенным человеком ровно k подарков; $P_k = \lim\limits_{n\to\infty} P_{k,n}$

(при решении задачи воспользоваться тем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\alpha_n\right)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$)

4.3 (*Распределение Пуассона*).

Каждый из m_n различных подарков распределяется среди n человек, так что одному человеку может достаться несколько подарков. Среднее число подарков, приходящееся на одного человека, стремится к λ - т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \lambda$. Вычислить:

а) вероятность $P_{0,n}$ того, что определенный человек не получит ни одного подарка; найти $P_{\lambda,0} = \lim\limits_{n\to\infty} P_{0,n}$

в) вероятность $P_{k,n}$ получения определенным человеком ровно k подарков; $P_{\lambda,k} = \lim\limits_{n\to\infty} P_{k,n}$

4.4

Имеется n женщин и n мужчин. Каждая женщина симпатизирует какому-то одному (ровно одному) из мужчин, и наоборот. Какова вероятность образования хотя бы одного сердечного союза? Определить ее поведение при $n \to \infty$.

(Задача навеяна развлекательной телевизионной передачей, интрига которой такова: в студию приглашаются трое девиц и трое парней, незнакомые друг с другом; они загадывают себе пару и затем ведущий объявляет результаты - и в случае совпадения у счастливчиков появляется возможность кутнуть в ресторане за чужой счет, а то и совершить морской круиз.)

4.5

Следуя Эйлеру, показать, что $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}$.

Рассмотреть для этого уравнение $1-\sin x=0$, не забыв учесть, что кратность каждого корня равна двум. (Если функция $f(x)$ касается в точке x_0 оси $0X$, то, в некотором смысле, можно считать, что функция в этой точке пересекает ось “несколько раз”.)

По определению, корень имеет кратность k тогда и только тогда, когда $f^{(0)}(x_0)=f^{(1)}(x_0)=\ldots f^{(k-1)}(x_0)=0; f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

Для многочлена $P_n(x)$ это равносильно тому, что $P_n(x)=(x-x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x); \; Q_{n-k}(x_0)\neq 0$)

Ответы и решения.

4.1

а) $P_{0,n}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+(-1)^n \cdot \frac{1}{n!}; P_0=e^{-1}$

(нулю совпадений благоприятствует $\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\ldots+(-1)^n \frac{n!}{n!}$ исходов)

б) Выберем любого из n людей, что можно сделать $n=C_n^1$ способами. Из оставшихся $n-1$ человек никто не должен получить своего подарка, чему благоприятствует, согласно предыдущему пункту, $\frac{(n-1)!}{2!}-\frac{(n-1)!}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ исходов (достаточно заменить n на $n-1$). Всего исходов $n!$ Тогда, по правилу произведения, $P_{1,n}=\frac{n}{n!}\cdot$ (предыдущее выражение). Очевидно, получим первые $n-1$ членов разложения e^{-1} в ряд. Поэтому $P_1=e^{-1}$.

в) Здесь рассуждения полностью аналогичны имевшим место в б), только людей нужно выбирать C_n^k способами, и заменять дальше n на $n-k$ вместо $n-1$. В результате получим, что

$P_{k,n} = \dfrac{1}{k!}\cdot$(некоторое выражение) - где выражение в скобках будет представлять в точности первые $n-k$ членов разложения e^{-1}. Значит, $P_k = \dfrac{1}{k!}\cdot e^{-1}$.

4.2

а) Всего исходов n^n. Благоприятных $(n-1)^n; P_{0,n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ и

$$P_0 = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{n}}}\right)^{-1} = e^{-1}.$$

б) Подарок можно выбрать n способами. Оставшиеся $n-1$ подарков можно распределить среди $n-1$ человек $(n-1)^{n-1}$ способами. Отсюда $P_{1,n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}; P_1 = e^{-1}$.

в) k подарков можно выбрать C_n^k способами. Остальные $n-k$ подарков можно распределить среди $n-1$ человек $(n-1)^{n-k}$ способами. Следовательно, $P_{k,n} = \dfrac{C_n^k\cdot(n-1)^{n-k}}{n^n}$.

Приведем это выражение к удобному для вычисления предела виду:

$$P_{k,n} = \frac{n!(n-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n^k n^{n-k}} = \frac{1}{k!}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}\frac{\overbrace{(n-1)\ldots(n-(k-1))}^{k-1}}{\underbrace{n\ldots n}_{k-1}} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}\cdot\overbrace{\left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\tfrac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right)}^{k-1}$$

Теперь ясно видно, что $P_k = \dfrac{1}{k!}\cdot e^{-1}$.

4.3

а) Всего исходов n^{m_n}, из них благоприятных $(n-1)^{m_n}$.

$$P_{0,n} = \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{m_n}; P_{\lambda,0} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{-\frac{1}{n}}}\right)^{-\frac{m_n}{n}} = e^{-\lambda}.$$

б) k подарков выберем $C_{m_n}^k$ способами. Оставшиеся $m_n - k$ распределим между $n-1$ человеком $(n-1)^{m_n-k}$ способами.

$$P_{k,n} = \frac{C_{m_n}^k \cdot (n-1)^{m_n - k}}{n^{m_n}}.$$

$$P_{\lambda,k} = \frac{1}{k!} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m_n-k} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{m_n!}{(m_n-k)!\cdot n^k};$$

Но $\dfrac{m_n!}{(m_n-k)!\cdot n^k} = \underbrace{\frac{m_n}{n}\cdot\left(\frac{m_n}{n}-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(\frac{m_n}{n}-\frac{k-1}{n}\right)}_{k}$.

Поэтому $P_{\lambda,k} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ ($k = 0;1;2;\ldots$)

Про последовательность такого вида говорят, что она образует *распределение Пуассона с параметром* λ (см. далее главу 6).

4.4

Каждая женщина может выбрать мужчину n способами, и наоборот, поэтому всего исходов $n^n \cdot n^n = n^{2n}$.

Введем события $W_1;\ldots;W_n$, где W_i означает, что i-ая женщина добилась взаимности.

Очевидно, нас интересует $P_n = P\left(\sum_{i=1}^n W_i\right)$. Чтобы воспользоваться формулой вероятности суммы, нужно вычислить вероятности вида $P(W_i)$ - понятно, что все они будут равны между собой и войдут в формулу в количестве $n = C_n^1$ штук; $P(W_i \cdot W_j)$ - также равных друг другу, в количестве C_n^2 и т.д.

Вычислим сразу $P(W_{i_1} \cdot W_{i_2} \ldots W_{i_k}) = P_{k,n}$ - вероятность того, что повезет сразу k женщинам. Для этого нужно распределить среди них k мужчин, что можно сделать A_n^k способами, а оставшиеся $n-k$ мужчин и $n-k$ женщин вольны выбирать как угодно среди n кандидатов и тогда $P_{k,n} = \dfrac{A_n^k \cdot n^{2(n-k)}}{n^{2n}} = \dfrac{A_n^k}{n^{2k}}$ (в частности, $P_{1,n} = \dfrac{1}{n^2}$).

Окончательно $P_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \dfrac{C_n^k \cdot A_n^k}{n^{2k}}$.

Например, $P_3 \approx 0{,}786$ - “телевизионный” случай.

Естественно, возникает вопрос о предельном значении P_n. Хотелось бы иметь нечто красивое, как в задаче о подарках, но сразу усмотреть что-либо особенное затруднительно. Оказавшись в этой ситуации, автор решил последовать великим образцам и посчитать, надеясь в глубине души, что числа подскажут итоговый результат.

Благо компьютер под рукой и при помощи супруги быстро была составлена нехитрая программа, которая за пару минут (в оные времена такие вычисления могли отнять месяцы и годы) выдала таблицу значений P_n в пределах от 1 до 1500. С огромным удовольствием автор обнаружил, что столбец чисел на дисплее неумолимо приближается все к тому же волшебному числу $1-e^{-1} \approx 0{,}632$. Сходимость, правда, выражена не столь ярко, как в классической задаче: точность до десятых достигается при n в районе 20, до сотых - при n около 200, до тысячных - около 900.

Приведем неформальное, но вполне достаточное обоснование этого факта.

Вероятность можно переписать в виде $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \cdot \left(\frac{n!}{(n-k)!\cdot n^k} \right)^2$;

Выражение в больших скобках представим в виде $\Bigl(\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}_{k-1} \Bigr)^2$.

Ясно, что при больших значениях n и небольших значениях k оно будет очень близко к единице, оставаясь всегда заключенным в интервале $(0;1)$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \cdot a_k ; 0 < a_k < 1$. Очевидно, он сходится (что следует из ограниченности a_k и из сходимости $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e-1$), причем, ввиду быстрого роста $k!$, его сумма с большой точностью определяется первыми несколькими членами. Стало быть, при больших значениях n P_n определяется первыми несколькими слагаемыми, т.е k мало (и меняется, скажем, до какого-то небольшого относительно n числа k_n но тогда коэффициенты можно считать равными единице $\Rightarrow P_n \approx \sum\limits_{k=1}^{k_n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \approx 1-e^{-1}$.

4.5

Уравнение $\sin x = 1$ имеет корни $\left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; \ldots \right\}$.

Распространяя соотношения, справедливые для многочленов, на бесконечность, имеем

$$1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots = \left(1 - \frac{2}{\pi}\cdot x\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{2}{3\pi}\cdot x\right)^2 \ldots$$

Сравнив коэффициенты при x в обеих частях равенства, получим:

$-1 = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} + \Lambda$ и появилось нужное разложение.

Глава пятая

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Информация о том, что произошло некое событие B ***,*** $(P(B) > 0)$ ***, может повлиять на вероятность наступления события*** A ***. В таких случаях говорят об условной вероятности события*** A ***и обозначают ее*** $P(A|B)$ ***- читается " вероятность события*** A ***при условии осуществления события*** B ***". По определению полагают***

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}}$$

Убедимся, что это определение взято "не с потолка". Возьмем, для ясности, классическое вероятностное пространство Ω. Пусть известно, что произошло событие B. Вычислим вероятность наступления события A при этом условии. Поскольку B произошло, естественно считать его новым вероятностным пространством Ω' (нас *н*е интересуют элементарные события вне множества B) и вместо события A рассматривать теперь событие $A \cdot B$ (т.е. только те элементарные исходы из A, которые входят и в B). Ω' представляет собой снова классическую схему и потому $P(A|B) = \frac{|A \cdot B|}{|B|}$. Правую часть этого равенства перепишем в виде $\frac{\frac{|A \cdot B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Понятие *условной вероятности*, во-первых, существенно упрощает процесс решения многих задач (и особенно в связи с т.н. *формулой полной вероятности* и *формулами Байеса*), а во-вторых, с его помощью вводится важнейшее понятие *независимости событий*.

Исторически ключевые понятия условной вероятности и независимости событий восходят к работам Муавра "Доктрина шансов" (1718 г.) и его ученика Байеса (1702-1761 гг.) "Опыт решения задач по теории вероятностей" (1763 г.).

Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Пусть заданы n возможных ($P(B_i) > 0$) событий $B_1,\ldots B_n$, образующих *полную группу*, т.е.

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i = \Omega$

2. $B_i \cdot B_j = \varnothing; i \neq j; i, j = 1,\ldots,n$

Тогда для любого события A справедлива *формула полной вероятности*:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Действительно,

$$P(A|B_i) \cdot P(B_i) = P(AB_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(AB_i)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{n} AB_i\right)(AB_k \cdot AB_l = \varnothing; k \neq l) = P\left(A \cdot \sum_{i=1}^{n} B_i\right) = P(A\Omega) = P(A)$$

При помощи этого соотношения можно сразу вывести следующую группу формул (называемых *формулами Байеса*):

Если $B_1,\ldots,B_n$ - по-прежнему полная группа событий и A - некоторое возможное событие, то для любого B_j из этой группы

$$\boxed{P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}; j = 1,2,\ldots,n}$$

(справедливости ради отметим, что таких формул в работе Байеса нет; по-видимому, впервые и они, и формула полной вероятности получены Лапласом в “Опыте философии теории вероятностей”(1812г.))

Для доказательства достаточно заметить, что

$$P(B_j|A) = \frac{P(B_j A)}{P(A)} = \frac{P(B_j)\cdot \frac{P(B_j A)}{P(B_j)}}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)\cdot P(B_j)}{P(A)}$$ -и расписать знаменатель по формуле полной вероятности.

Иногда входящие в формулы Байеса вероятности $P(B_i)$ называют *априорными* или *доопытными* (от латинского *a priori* - заранее), а вероятности $P(B_i|A)$ - *апостериорными* или *послеопытными* (по латински *a posteriori* - из последующего, из опыта). В самом деле, события $B_1,...,B_n$ часто выступают в роли взаимоисключающих гипотез (одна из которых справедлива), призванных объяснить некоторое явление. Эксперимент (событие A) может какие-то гипотезы подкрепить, какие-то - нет: опыт корректирует вероятности гипотез.

Разберем два простых примера.

1.

В оружейной пирамиде стоят 19 винтовок, из них 3 с оптическим прицелом. Стрелок, пользуясь винтовкой с оптическим прицелом, поражает мишень с вероятностью $0{,}81$, винтовкой без оптического прицела - с вероятностью $0{,}46$. Найти вероятность того, что стрелок попадет в цель, стреляя из случайно взятой винтовки.

Введем события A, B_1, B_2, где A - стрелок попадет в цель,

B_1 - стрелку достанется винтовка с оптическим прицелом, B_2 - без.

B_1 и B_2 образуют полную группу и $P(B_1) = \frac{3}{19}; P(B_2) = \frac{16}{19}$.

По условию, $P(A|B_1) = 0{,}81; P(A|B_2) = 0{,}46$.

По формуле полной вероятности, $P(A) = 0{,}81 \cdot \frac{3}{19} + 0{,}46 \cdot \frac{16}{19} = 0{,}515$.

2.

Две кондитерские фабрики производят торты “Птичье молоко”, при этом объем продукции второй фабрики в k раз превосходит объем продукции первой. Доля брака на первой фабрике - p_1, на второй - p_2. В продажу поступила продукция обеих фабрик, изготовленная за одинаковый промежуток времени. Какова вероятность того, что купленный вами малосъедобный торт изготовлен на первой (второй) фабрике?

Пусть B_1 - куплен торт с первой фабрики, B_2 - со второй. Если объем продукции первой фабрики - V, то второй - $k \cdot V$, и всего тортов изготовлено $V \cdot (k+1)$. Отсюда $P(B_1) = \frac{1}{k+1}$ и $P(B_2) = \frac{k}{k+1}$. Обозначив за A событие “торт некачественный”, по условию имеем $P(A|B_1) = p_1; P(A|B_2) = p_2$ и найти нужно $P(B_1|A)$ и $P(B_2|A)$. Из формул Байеса следует, что

$$P(B_1|A) = \frac{\frac{p_1}{k+1}}{\frac{p_1}{k+1} + \frac{k \cdot p_2}{k+1}} = \frac{p_1}{p_1 + k \cdot p_2}; P(B_2|A) = \frac{k \cdot p_2}{p_1 + k \cdot p_2}$$

Независимость событий.

Герой рассказа Брэдбери “ И грянул гром “, отправившись в прошлое, неосторожно наступает на бабочку. Вернувшись в настоящее, он узнает, что вместо недавно победившего на выборах либерального демократа страной управляет жестокосердный тиран. События, на первый взгляд не имеющие никакого отношения друг к другу, оказались во взаимной связи.

Как же перевести понятия *зависимости* или *независимости* событий на математический язык? Здравый смысл подсказывает такое определение: A не зависит от B, если вероятность события A не меняется при наступлении B, т.е $P(A) = P(A|B)$.

Подвергнем это определение небольшой проверке. Если A не зависит от B, то следует ожидать, что и B не будет зависеть от A, т.е. надо проверить, вытекает ли из равенства $P(A) = P(A|B)$ равенство $P(B) = P(B|A)$. Посмотрим:

$$P(A) = P(A|B) \Rightarrow P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = P(AB) \Rightarrow P(B) = \frac{P(BA)}{P(A)} \Rightarrow P(B) = P(B|A).$$

Проводя выкладки в обе стороны, мы дважды проходим через промежуточное соотношение $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$. Именно его лучше всего взять за определение независимости (что сразу вряд ли приходит в голову), поскольку оно равносильно двум другим при $P(A) > 0; P(B) > 0$, а само не требует обязательного выполнения этих условий. Итак, приходим к определению:

События A и B независимы, если выполняется равенство:

.

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

В противном случае события называются зависимыми.

Не нужно путать *независимость* с *несовместностью*. Несовместность A и B означает, что $P(A \cdot B) = 0$. Поэтому возможные несовместные события всегда зависимы. (Действительно, если они несовместны, то при наступлении одного другое не происходит - в этом-то и проявляется их зависимость).

Здравый смысл требует, чтобы из независимости A и B следовала бы независимость A и $\overline{B}$. Формально нужно доказать, что

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow P(A \cdot \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Воспользуемся тем, что $A \cdot \overline{B} = A - A \cdot B$.

Тогда

$$P(A \cdot \overline{B}) = P(A) - P(A \cdot B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\overline{B}).$$

Так как $\overline{\overline{A}} = A; \overline{\overline{B}} = B$, то на самом деле доказана терема:

A, B независимы $\Leftrightarrow$ $A, \overline{B}$ независимы $\Leftrightarrow$ $\overline{A}, B$ независимы $\Leftrightarrow$ $\overline{A}, \overline{B}$ независимы.

Определим теперь независимость для группы событий.

События $\{A_1, \ldots, A_n\}$ называются независимыми в совокупности, если для любого подмножества $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}\}$ (все индексы - различн) выполняется равенство

$$\boxed{P(A_{i_1} \Lambda\ A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \Lambda\ P(A_{i_k})}$$

Именно к этим равенствам приводит естественное требование

$P(A_{i_1} | A_{i_2} \Lambda\ A_{i_k}) = P(A_{i_1})$ для любых подмножеств.

Но не является ли это определение слишком сильным? Нельзя ли ограничиться просто попарной независимостью? Не может ли оказаться так, что попарной независимости достаточно, чтобы вывести из нее независимость в совокупности?

Следующий пример показывает, что вопросы эти имеют отрицательный ответ. Он называется “*Тетраэдр Бернштейна* “, в честь его изобретателя, российского математика С. Н. Бернштейна (1880 - 1968 гг.).

Пусть три грани правильного тетраэдра раскрашены целиком в синий, зеленый и красный цвет. Последняя, четвертая, грань - полосатая: сине-зелено-красная. Тетраэдр подбрасывают. Исход опыта - падение тетраэдра на одну из своих граней с вероятностью $\frac{1}{4}$. Рассмотрим события: A_r - на выпавшей грани имеется красный цвет, A_b - синий, A_g - зеленый. Все эти события попарно независимы. Например,

$$P(A_g \cdot A_b) = \frac{1}{4}; P(A_g) = P(A_b) = \frac{1}{2};$$

Но $P(A_r \cdot A_g \cdot A_b) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_r) \cdot P(A_g) \cdot P(A_b)$, и, значит, независимыми в совокупности они не являются.

Примеры.

1. Урны и шары.

Чтобы усвоить то или иное понятие, необходимо прорешать несколько т.н. *стандартных* упражнений. Типичными задачами на усвоение понятия независимости событий и формулу полной вероятности являются задачи с шарами и урнами. Решать их (две мы сейчас разберем) десятками, наверное, излишне, но довести до ответа одну-другую следует.

а) В одной урне 5 белых и 6 черных шаров, а в другой - 4 белых и 8 черных. Из первой урны случайным образом вынимают 3 шара и опускают во вторую урну. После этого из второй урны так же случайно вынимают 4 шара. Найти вероятность того, что все шары, вынутые из второй урны - белые.

Введем события B_1 (из первой урны вынули 3 белых шара), B_2 (2б., 1ч.), B_3 (1б., 2ч.), B_4 (3ч.). Эти события образуют полную группу, а их вероятности - гипергеометрическое распределение:

$$P(B_1) = \frac{C_5^3}{C_{11}^3} = \frac{2}{33}; P(B_2) = \frac{C_5^2 \cdot C_6^1}{C_{11}^3} = \frac{12}{33}; P(B_3) = \frac{C_5^1 \cdot C_6^2}{C_{11}^3} = \frac{15}{33}; P(B_4) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3} = \frac{4}{33}.$$

Пусть A - интересующее нас событие. Чтобы применить формулу полной вероятности, нужно найти соответствующие условные вероятности, которые также распределены гипергеометрически. Например, если случилось B_1, то во второй урне стало 7 белых и 8 черных шаров и $P(A|B_1) = \frac{C_7^4}{C_{15}^4} = \frac{35}{1365}$.

Аналогично, $P(A|B_2) = \frac{15}{1365}; P(A|B_3) = \frac{5}{1365}; P(A|B_4) = \frac{1}{1365}$.

Подставив найденные данные в формулу полной вероятности, получим:

$$P(A)=\frac{2}{33}\cdot\frac{35}{1365}+\frac{12}{33}\cdot\frac{15}{1365}+\frac{15}{33}\cdot\frac{15}{1365}+\frac{4}{33}\cdot\frac{1}{1365}=\frac{47}{6435}\approx 0{,}0073.$$

б) В первой урне 6 белых и 4 черных шара, во второй - 5 белых и 7 черных. Из первой урны случайно вынули 3 шара, из второй - 2. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров - ровно 3 белых.

$$A=B_1\cdot C_3+B_2\cdot C_2+B_3\cdot C_1\ ,$$

где:

B_1 - из первой урны вынули 3 белых шара; B_2 - 2 белых, 1 черный; B_3- 1 белый, 2 черных; C_1 - из второй урны вынули 2 белых шара; C_2 - 1 белый, 1 черный; C_3 - 2 черных.

Пользуясь попарной несовместностью суммируемых событий и тем, что шары выбираются из обеих урн независимо, получим:

$P(A)=P(B_1)\cdot P(C_3)+P(B_2)\cdot P(C_2)+P(B_3)\cdot P(C_1)$Входящие в правую часть вероятности представляют гипергеометрическое распределение и легко находятся:

$$P(B_1)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{20}{120};$$

$$P(B_2)=\frac{C_6^2\cdot C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{60}{120};P(B_3)=\frac{C_6^1\cdot C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{36}{120};P(C_1)=$$
$$=\frac{C_5^2}{C_{12}^2}=\frac{10}{66};P(C_2)=\frac{C_5^1\cdot C_7^1}{C_{12}^2}=\frac{35}{66};P(C_3)=\frac{C_7^2}{C_{12}^2}=\frac{21}{66}.$$

Подставив численные данные, получим $P(A)=\frac{4}{11}\approx 0{,}3636$

2. Задача об экзамене.

Проанализируем одну типичную ситуацию, в которую попадают студенты во время экзамена:

Всего имеется n билетов, из них - m “хороших”. (Готовиться к экзамену нужно так, чтобы m было близко к n; практика показывает, что $m<n$ почти наверное, и мы считаем это условием задачи). В аудиторию заходят два студента и по очереди выбирают билет. Вопрос в том, у кого положение предпочтительней: у берущего билет первым или берущего вторым?

Здравый смысл подсказывает, что если второй не знает, какой билет достался первому (мы будем придерживаться этого допущения), то шансы вытянуть “хороший” билет одинаковы для обоих (если везет первому, то шансы второго падают, и наоборот). Очевидно также, что оба события зависимы между собой. Проверим эти соображения вычислениями.

Событие " первому студенту достался "хороший" билет " обозначим через A, событие " "хороший" билет достался второму " - через B. Понятно, что $P(A)=\frac{m}{n}$. Вычислим $P(B)$ по формуле полной вероятности. События A и $\overline{A}$ образуют полную группу, и

$$P(\overline{A})=1-\frac{m}{n};P(B|A)=\frac{m-1}{n-1};P(B|\overline{A})=\frac{m}{n-1}.$$

Тогда

$$P(B)=\frac{m-1}{n-1}\cdot\frac{m}{n}+\frac{m}{n-1}\cdot\frac{n-m}{n}=\frac{m}{n}\left(\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n-1}\right)=\frac{m}{n}\neq P(B|A),$$ что и означает зависимость A и B.

Разумеется, вероятности останутся равными и в случае нескольких студентов.

3. Спортивная дилемма.

Формулировку очередной задачи заимствуем из книжки Б. Кордемского "Математика изучает случайности" - заодно читатель может составить себе некоторое представление о стиле, принятом в нашей популярной литературе прошлых лет.

Папа, мама и я.

- Тебе - коллекционеру - несомненно будет приятно получить у меня экземпляр редкой почтовой марки, - сказал мне отец, но поставил условие: выиграть в шахматы подряд две партии из трех, играя поочередно с ним и с мамой по одной партии в день.

- С кем мне играть первую партию: с тобой или с мамой?

- Выбирай сам, - ответил папа, хитро улыбаясь.

Какая последовательность игр: папа-мама-папа (ПМП) или мама-папа-мама (МПМ) дает мне большую вероятность "завоевать" марку для коллекции, если папа более сильный партнер, чем мама?

Заметим, что в западной литературе эта задача чаще встречается в "теннисном" варианте.

Итак, ребенок поставлен перед дилеммой. С одной стороны, последовательность МПМ обещает два поединка с соперником послабее, с другой же - при этом обязательно нужно победить сильнейшего партнера. При выборе порядка ПМП все происходит с точностью “до наоборот”. Что же выгодней? Произведем подсчет, полагая, что результаты отдельных партий не зависят друг от друга. Пусть ребенок побеждает отца в отдельном поединке с вероятностью p, а мать - с вероятностью q, причем $q > p$. В варианте МПМ событие “ выиграть подряд две партии” распадается в сумму двух: A_1 - выиграть первые две партии, A_2 - последние две. Используя независимость, имеем: $P(A_1) = q \cdot p; P(A_2) = p \cdot q; P(A_1 \cdot A_2)$ (вероятность выиграть все партии) $= q \cdot p \cdot q$. Поэтому $P_1 = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2) = 2pq - q^2 p$. Аналогично, в случае ПМП $P_2 = 2pq - p^2 q$. Ясно, что $P_2 > P_1$, так как

$2pq - p^2 q > 2pq - q^2 p \Leftrightarrow q^2 p > p^2 q \Leftrightarrow q > p$. Значит, второй вариант предпочтительнее.

4. Задача о тестах.

Тесты нынче у нас в большой моде, чему не приходится удивляться (при всем том, что представляется крайне сомнительным, чтобы путем тестирования можно было бы в достаточной степени выявить навыки и познания опрашиваемых) - ведь родиной этого метода является самая Америка, которая должна служить идеалом и образцом. “Всеобщая американизация” - явление в истории отнюдь не новое. Римский историк Тацит еще в 1-ом веке от Р.Х. (“Жизнеописание Юлия Агриколы”) писал: “ *... юношей из знатных семейств он* (т.е. покоривший Британию Агрикола) *стал обучать свободным наукам... и те, кому латинский язык совсем недавно внушал откровенную ненависть, горячо взялись за изучение латинского красноречия. За этим последовало и желание одеться по-нашему, и многие облеклись в тогу. Так мало-помалу наши пороки соблазнили британцев, и они пристрастились к портикам, термам и изысканным пиршествам. И то, что было ступенью к дальнейшему порабощению, именовалось ими, неискушенными и простодушными, образованностью и просвещенностью.* “

А вот мнение нашего современника. В статье “Для чего мы изучаем математику”, напечатанной в первом номере журнала “Квант” за 1993 г., академик Арнольд сетует на то, что “*... в нашей стране в последние годы происходит американизация математического образования. В ее основе лежит принцип: учить тому, что нужно для практики. А если кто-то считает, что ему математика не нужна, то он может не изучать ее совсем.* “ И далее на примерах показывает, к чему приводит такая система: “*... в тесте для* 14-*летних американских школьников предлагалось оценить (не вычислить, а лишь оценить), что произойдет с числом* 120, *если от него взять* 80%. *И пред-*

лагалось три варианта ответа: увеличилось; осталось прежним; уменьшилось. Крестики напротив правильного ответа поставили примерно 30% *опрашиваемых. Иными словами, школьники ставили крестики наудачу... Вторая особенность американского подхода к преподаванию математики - его компьютеризация. Само по себе увлечение компьютерами не способствует развитию мышления. Вот еще пример из американского теста: в классе* 26 *учеников. С ними нужно провести экскурсию на автомобилях. В одной машине могут ехать один родитель и четыре школьника. Сколько родителей нужно попросить помочь? Типичный ответ: 65 родителей. Компьютер выдает* 26:4=6,5. *Ну а школьник уже знает, что если в решении должны быть целые числа, то с десятичной запятой надо что-то делать, например, отбросить... Надо учить думать, а не тому, как нажимать на кнопки... Можно только удивляться, что в США так много замечательных математиков и физиков - правда, многие из них иммигранты; лучшие студенты в американских университетах сегодня - китайцы... Надо быть готовым к тому, чтобы спасать ситуацию и выходить из этого тупика, в который нас приведет американизация образования с ее прагматичностью, факультативностью, повальной компьютеризацией.* “

Но вернемся непосредственно к математике. Простейшая модель теста такова: Студента тестируют. К некоторому вопросу прилагается k различных вариантов ответа. Студент находит правильный ответ, используя свои знания, с вероятностью p, а с вероятностью $1-p$ полагается на “авось”. Известно, что студент получил правильный ответ. Какова вероятность, что при этом он действовал не наугад?

Введем обозначения: B_1 - студент думал над вопросом, B_2 - он испытывал судьбу; A - получен правильный ответ.

По условию, $P(B_1) = p; P(B_2) = 1-p; P(A|B_1) = 1; P(A|B_2) = \frac{1}{k}$.

Найти нужно $P(B_1|A)$.

По формуле Байеса $P(B_1|A) = \frac{p}{p + \frac{1-p}{k}} = \frac{1}{1 + \frac{1-p}{k \cdot p}}$.

Как и следовало ожидать, при $k \to \infty P(B_1|A) \to 1$.

5. Необычная дуэль.

Три господина A, B и C, очевидно, пресыщенные жизнью, решили устроить тройную дуэль. Они располагаются в вершинах равностороннего треугольника, условившись предварительно, что первый выстрел делает A, второй - B, третий - C и т.д. по кругу; если один из стрелков выбывает, то дуэль продолжается между оставшимися.

Известно, что стрелок A поражает цель с вероятностью $0{,}3$; C - с вероятностью $0{,}5$; а стрелок B вообще никогда не промахивается. Каждый стреляет в одного из двух других или в воздух с таким расчетом, чтобы с наибольшей вероятностью выиграть дуэль. Как должен распорядиться своим первым выстрелом господин A?

После первого выстрела A может наступить одно из трех событий:

а) Поражен C. Тогда с вероятностью 1 B попадает в A.

б) Поражен B. Тогда событие “ A - победил “ есть $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, где A_1 - “ C промахнулся и затем A попал в C “; A_2 - “ промах C,промах A, промах C, попадание A “ и т.д. A и C поочередно стреляют в цель до первого попадания, и результат очередного выстрела (если выстрел возможен) не зависит от прошлых промахов. Значит,

$$P(A_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10};P(A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10};\ldots P(A_i)=\frac{3}{20}\cdot\left(\frac{7}{20}\right)^{i-1};\ldots$$

Тогда $P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\frac{3}{20}\left(1+\frac{7}{20}+\left(\frac{7}{20}\right)^2+\ldots\right)=\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{1-\frac{7}{20}}=\frac{3}{13}$

в) A промахнулся. В этом случае B стреляет в C и выводит его из строя, после чего A побеждает с вероятностью $0{,}3$. Но $\frac{3}{10}>\frac{3}{13}$, поэтому господину A выгоднее всего первым выстрелом послать пулю в воздух.

(И еще много чего интересного об этой задаче можно узнать из статьи И.Ф.Акулича «*Тройное дно тройной дуэли*» - см. Библиотечка Кванта, Выпуск 105.)

6. Задача об амнистии.

Заключенные X, Y и Z, приговоренные к смертной казни, подали прошение о помиловании. Закон позволяет удовлетворить одно из трех ходатайств. Губернатор выбирает имя счастливчика случайным образом и сообщает надзирателю. Под большим секретом надзиратель сообщает X, что одним из казненных будет Y. (Из гуманных побуждений надзиратель действует по следующей схеме: если X должны казнить в паре с Y или Z, то и называется однозначно Y или Z. Если же должны казнить Y и Z, то имя одного из них называется наугад).

Заключенный X считает, что переданная ему информация повышает его шансы на спасение с $\frac{1}{3}$ до $\frac{1}{2}$. Так ли это на самом деле?

Тонкость этой задачи в том, что следует различать события " Y будет казнен " и " надзиратель сообщил X, что Y будет казнен ". Обозначим эти события соответственно через Y и Y_s.

Заметим, что события $\overline{X};\overline{Y};\overline{Z}$ образуют полную группу.

Очевидно, что

$P(Y)=\frac{2}{3};P(\overline{X}\cdot Y)=P(\overline{X})$ (т.к. $\overline{X}\subset Y$) $=\frac{1}{3};\Rightarrow P(\overline{X}|Y)\ =\frac{P(\overline{X}\cdot Y)}{P(Y)}=\frac{1/3}{2/3}=\frac{1}{2}$ (что, впрочем, понятно и без всяких выкладок).

Далее, по формуле полной вероятности,

$$P(Y_s)=P(Y_s|\overline{X})\cdot P(\overline{X})+P(Y_s|\overline{Y})\cdot P(\overline{Y})+P(Y_s|\overline{Z})\cdot P(\overline{Z})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\ .$$

Наконец, по формуле Байеса,

$P(\overline{X}|Y_s)=\frac{P(Y_s|\overline{X})\cdot P(\overline{X})}{P(Y_s)}=\frac{1/2\cdot 1/3}{1/2}=\frac{1}{3}=P(\overline{X})$ - т.е. сообщение надзирателя никак не повышает шансов X. Однако, если бы их беседу подслушал бы Z, его шансы действительно поднялись бы до $\frac{2}{3}$ - ведь событие $\overline{X}|Y_s+\overline{Z}|Y_s$ достоверное.

Подоплеку происходящего отчетливо можно представить на примере игры в наперсток. Имеется три наперстка, помеченные буквами X,Y и Z. Под одним из них горошина. Вы ставите на наперсток с буквой X. Наперсточник, которому расклад заранее известен, может всегда открыть один из наперстков Y или Z, под которым горошины *нет* - как до того, как вы открыли "свой" наперсток, так и после, что никак не отразится на ваших шансах выиграть. Другое дело, если бы после вскрытия "пустого" наперстка, разрешалось бы выбирать из двух оставшихся.

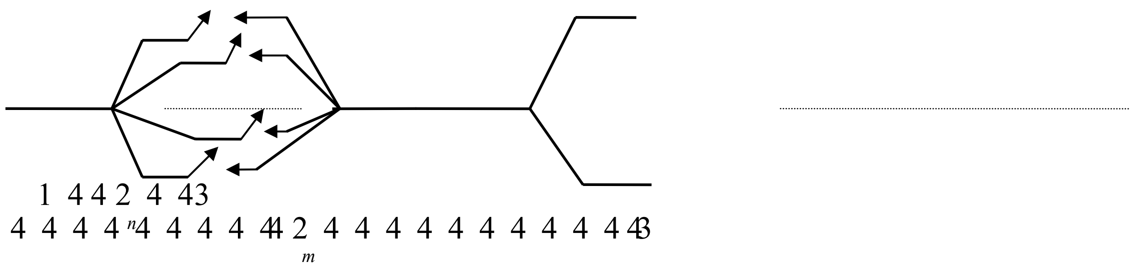
7. Совершенный переключатель.

Пусть имеется бесконечно много выключателей, каждый из которых срабатывает с вероятностью $p>\frac{1}{2}$ (т.е. если его включили, то с вероятностью p он действительно включен, а с $1-p$ выключен; если же его выключили, то он действительно выключен с вероятностью p, а с $1-p$ включен). Доказать, что из них можно составить сколь угод-

но хороший выключатель (т.е. выключатель, который срабатывает в обе стороны с вероятностью, сколь угодно близкой к 1).
(*Студенческая математическая олимпиада, Мехмат МГУ.*)

Другими словами, для каждого $n \in N$ следует предъявить схему, проводящую ток с вероятностью p_n (при условии включенности всех выключателей) и не проводящую с вероятностью q_n (при условии выключенности всех выключателей), так что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.

Рассмотрим последовательное соединение m участков, каждый из которых состоит из n параллельно составленных выключателей
(шаг довольно естественный).



Вся хитрость состоит в выборе "хорошего" значения m. Оказывается, достаточно положить $m = 2^n$. Проверим это:
Событие $\overline{A}$ - цепь не сработала при всех включенных выключателях - есть сумма 2^n событий $A_1; A_2; \ldots; A_{2^n}$, где A_i означает, что на i-ом участке не сработали все n параллельно соединенных выключателей, т.е. $P(A_i) = (1-p)^n$ (выключатели срабатывают независимо друг от друга).

Тогда

$$1 - p_n = P\left(\overline{A}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{2^n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{2^n} P(A_i) = 2^n \cdot (1-p)^n = (2-2p)^n.$$

Т.к. $2p > 1$, то $2 - 2p < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(2-2p)^n = 0$.

Т.к. $p_n \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 - p_n$.

Следовательно, по теореме о пределе промежуточной последовательности,
$\lim\limits_{n\to\infty}(1 - p_n) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

Теперь рассмотрим событие $\overline{B}$ - цепь пропускает ток при всех выключенных выключателях. Это означает, что произошло произведение событий $B_1 \Lambda B_{2^n}$, где B_i означает, что на i-ом участке не сработал хотя бы один из n выключенных выключателей. Ясно, что $P\left(\overline{B_i}\right) = p^n$. Еще раз пользуясь независимостью, найдем, что $1 - q_n = P\left(\overline{B}\right) = \left(1 - p^n\right)^{\left(2^n\right)}$.

Для вычисления $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - q_n\right)$ удобно рассмотреть сначала выражение $\ln\left(1 - p^n\right)^{\left(2^n\right)} = 2^n \cdot \ln\left(1 - p^n\right)$.

Поскольку при $x > -1 \ln(1 + x) \le x$ (что нетрудно показать, исследовав функцию $f(x) = \ln(1 + x) - x$ с помощью производной), то $\ln\left(1 - p^n\right) \le -p^n \Rightarrow 2^n \cdot \ln\left(1 - p^n\right) \le -(2p)^n$.

Т.к. $2p > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} -(2p)^n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 - p^n\right)^{\left(2^n\right)} = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - q_n\right) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.

Упражнения.

5.1

Имеется неправильная монета (вероятности выпадения герба или решки неизвестны). Придумайте эксперимент, описываемый классической схемой, т.е. с равновероятными исходами.

5.2

Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить “цепочку” согласно правилам игры.

5.3

Бросаются две правильные монеты и рассматриваются события:

A - первая монета упала орлом; B - вторая монета упала орлом;

C - орел выпал ровно один раз.

Будут ли эти события попарно независимы? Независимы в совокупности?

5.4

В первой урне находятся 1 белый и 9 черных шаров, а во второй - 1 черный и 5 белых. Из каждой урны удалили по одному шару, а остальные ссыпали в третью урну. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны - белый.

5.5

В урне 4 шара, которые могут быть черного или белого цвета (все предположения о цветах шаров считать равновероятными). К ним прибавляют 2 белых шара. После этого из урны вынимают 3 шара. Какова вероятность, что все эти шары - белые?

5.6

Известно, что вероятность обнаружить заболевание при обследовании у больного человека равна α, вероятность принять здорового за больного - β, а доля больных среди населения - γ. (Понятно, чем выше уровень жизни в стране, тем меньше γ и чем лучше развита медицина, тем больше α и тем меньше β. Эти данные определяются статистически и степень их доступности - в неискаженном виде - для широких слоев населения прямо связана с состоянием пресловутых "гласности и демократии" в обществе.) Какова вероятность, что человек здоров, если его признали больным при обследовании?

5.7

Студенты первых двух курсов археологического института отправились на раскопки. В группе 70% первокурсников. Среди них студенток - 10%, а среди второкурсников - 5%. Все студентки должны по очереди дежурить на кухне. Найти вероятность того, что в случайно выбранный день на кухне дежурит первокурсница.

5.8

При переливании крови надо учитывать группы крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей - либо той же, либо первой группы; человеку с первой группой - только первой. Среди населения - 33,7% имеют кровь первой группы; 37,5% - второй; 20,9% - третьей и 7,9% - четвертой.

а) Найти вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора;

б) тот же вопрос, если имеются два донора; три донора.

5.9

Игрок A бросает правильную монету $n+1$ раз, а игрок B - n раз. Какова вероятность, что в итоге у A гербов выпадет больше, чем у B? (*Австралийская математическая олимпиада, 1982 г*)

5.10

Два игрока A и B наблюдают за мальчиком, который без остановки подбрасывает правильную монету. Результаты записываются последовательностью из букв Г и Р. Игрок A утверждает, что тройка ГГГ встретится в записи раньше, чем тройка ГРГ. B

придерживается противоположной точки зрения. У кого из игроков больше шансов победить в этом споре? (*Бельгийская математическая олимпиада, 1981г*)

Ответы и решения.

5.1

Будем подбрасывать монету дважды, причем *учитывая только* события A - ГР и B - РГ. Таким образом, искомая модель выглядит так:

$\Omega = \{A|A+B; B|A+B\}$.

Очевидно, что $P(A|A+B) = P(B|A+B) = \frac{1}{2}$.

Действительно, если вероятность выпадения решки - p , а вероятность выпадения герба - $q = 1-p$, то $P(A|A+B) = \frac{P(A\cdot(A+B))}{P(A+B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)} = \frac{pq}{2pq} = \frac{1}{2}$

(мы использовали, что первый и второй бросок не зависят друг от друга : $P(A) = P(B) = p\cdot q$). Аналогично находится и вторая условная вероятность.

Итак, несмотря на “неправильность” исходной монеты, нам все же удалось, в некотором роде, “симметризовать” начальные условия. Теперь, чтобы получить дробь, близкую к $\frac{1}{2}$, нужно сделать несколько “парных” бросков, подсчитать, сколько выпадет пар (ГР) и сколько пар (ГР или РГ), и поделить одно число на другое.

5.2

Удобно взять как полную группу события D - (первая кость -“дубль”) и $\overline{D}$, а затем применить формулу полной вероятности.

$P = \frac{7}{18} \approx 0{,}3889.$

5.3

События попарно независимы, но зависимы в совокупности.

5.4

$P = \frac{38}{105} \approx 0{,}3619.$

5.5

$P = \frac{7}{20} = 0{,}35.$

5.6

$$P = \frac{\beta \cdot (1-\gamma)}{\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot (1-\gamma)}$$

5.7

$$P = \frac{14}{17} \approx 0{,}8235.$$

5.8

а) ввести события A_i - донор с i-ой группой крови $(1 \le i \le 4)$, образующие полную группу.

$P_1 \approx 0{,}5737.$

б) рассмотреть опыт с двух(трех)кратным подбрасыванием неправильной монеты с вероятностью успеха $p = 0{,}5737$ в отдельном броске; вероятность хотя бы одного успеха найти, рассмотрев дополнительное событие и использовав независимость бросков.

$P_2 \approx 0{,}8182; P_3 \approx 0{,}9225.$

5.9

Рассмотрим события: A - у игрока A за $n+1$ бросок гербов выпало больше, чем у B за n; A_1 - $n+1$-ый раз монета упала решкой, $\overline{A_1}$ - гербом. Применив формулу полной вероятности, найдем, что

$$P(A) = P(A|A_1) \cdot P(A_1) + P\left(A|\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(P(A|A_1) + P\left(A|\overline{A_1}\right)\right).$$

Событие $A|A_1$ означает, что в n бросках у игрока A гербов выпало больше, чем у B в n бросках. Положим $P(A|A_1) = x$, тогда противоположное событие $\overline{A|A_1}$ (у A гербов выпало *не больше*, чем у B в n бросках) имеет вероятность $1-x$. $A|\overline{A_1}$ означает, что в n бросках у A орлов выпало *не меньше*, чем у B, или, что то же, у B орлов выпало *не больше,* чем у **A**. Из симметрии условий можно заключить, что $P\left(A|\overline{A_1}\right) = 1 - x$.

Следовательно, $P(A) = \frac{1}{2} \cdot (x + (1-x)) = \frac{1}{2}$.

5.10

На первый взгляд, события совершенно равноправны и вероятности будут одинаковы, однако это не так - речь ведь не идет о вероятности получить ту или иную последовательность в серии из трех бросков (такие вероятности, конечно, равны).

Когда-нибудь герб выпадет первый раз. Пусть событие A означает, что $\{0;0;0\}$ (ГГГ) встретится раньше $\{0;1;0\}$ (ГРГ). Рассмотрим два следующих после выпадения первого герба броска. Возможны образующие полную группу события:

$C_1 = \{1;1\}, C_2 = \{1;0\}, C_3 = \{0;1\}, C_4 = \{0;0\}$, причем вероятности их одинаковы и равны $\frac{1}{4}$.

Вычислим необходимые для применения формулы полной вероятности условные вероятности. Сразу видно, что $P(A|C_4) = 1$;

$P(A|C_2) = 0$ и $P(A|C_1) = P(A)$ - т.к. в последнем случае мы возвращаемся к исходной ситуации. Осталось найти $P(A|C_3)$. Рассмотрев для этого *третий* после выпадения первого герба бросок, получим по формуле полной вероятности (полную группу образуют два события: герб или решка в третьем броске), что $P(A|C_3) = \dfrac{P(A)}{2}$

Приходим к уравнению $P(A) = \dfrac{1}{4} \cdot \left(P(A) + 0 + \dfrac{P(A)}{2} + 1 \right)$, откуда $P(A) = \dfrac{2}{5}$.

Глава шестая

НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ БЕРНУЛЛИ

Эксперимент, состоящий из n независимых испытаний с вероятностью успеха p и неудачи $q = 1 - p$ в каждом отдельном испытании называется

В упражнении 3.4 третьей главы уже было дано описание этого опыта (*схема Бернулли*), к которому сводятся многие явления:

пространство элементарных событий образуется всевозможными упорядоченными последовательностями длины n из нулей и единиц, причем $P(\omega_i) = p^k \cdot q^{n-k}$, где k - число единиц (успехов) в последовательности (именно так следует задавать вероятности с учетом независимости отдельных испытаний).

Так как на n мест k единиц можно расставить C_n^k способами,

- $$\boxed{P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$$

где $P_n(k), 0 \le k \le n,$ - вероятность того, что в n испытаниях произойдет ровно k успехов (про последовательности такого вида говорят, что они образуют *биномиальное распределение*).

Эта формула впервые появилась в книге Якоба Бернулли “ Искусство догадок” (в других переводах “Искусство предположений”) - в 1708 г.

Из формулы бинома сразу же вытекает, что $P(\Omega)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = (p+q)^n = 1$.

С другой стороны, $P(\Omega)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ есть вероятность достоверного события и потому ничему другому, кроме единицы, и не может равняться, и мы приходим к еще одному, совершенно корректному, выводу формулы бинома, на сей раз из вероятностных соображений. Правда, нужно навести еще некоторый лоск, так как непосредственно из этих соображений формула доказана лишь для положительных значений x и y, меньших единицы. Но сделать это несложно: если x и y положительны, то нужно перейти к $\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y}$; если оба отрицательны, то заменить их противоположными по знаку. Интереснее случай разных знаков. Считая сумму $x+y$ (в противном случае берем противоположную) положительной, и полагая для определенности, что $x>0$, выберем z так, что $x-z$ и $y+z$ положительны (такое z всегда существует). Для положительных чисел все уже доказано, поэтому $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (x-z)^k \cdot (y+z)^{n-k}$

Левая часть не зависит от z, поэтому и правая часть не должна от него зависеть. Раскрыв скобки в правой части , мы можем разбить ее на два выражения -

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot x^k \cdot y^{n-k} + F(x,y,z)$, где во втором собраны все слагаемые, содержащие z и, стало быть, после всех упрощений оно даст нуль.

Познакомимся теперь с одной из разновидностей схемы Бернулли. Опишем ситуацию, когда независимые испытания продолжаются до тех пор, пока не произойдет ровно m ($m=1,2,\ldots$) успехов.

Сперва рассмотрим случай, когда $m=1$. В качестве элементарных событий здесь нужно брать последовательности $\{1\},\{0;1\},\{0;0;1\}$ и т.д., а вероятности на них задавать следующим образом:

$P(\{1\})=p; P(\{0;1\})=p\cdot q; P(\{0;0;1\})=p\cdot q^2$ и т.д.

Тогда

$P(\Omega)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} p\cdot q^k = p\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{p}{1-q}=1$ (а о последовательности типа $P(k)=p\cdot q^k; k=0,1,\ldots; p+q=1$ говорят, что она задает *геометрическое распределение* или *распределение Фарри*).

В случае произвольного $m\in N$ пространство будет состоять из последовательностей $\{\underbrace{1;1;\ldots;1}_{m}\},\{\underbrace{\ldots\ldots;1}_{m}\}$ (на первых m местах - всевозможные комбинации из $m-1$ единиц и одного нуля), $\{\underbrace{\ldots\ldots;1}_{m+1}\}$ (на первых $m+1$ местах - $m-1$ единиц и два нуля) и т.д.

Обозначив через $P_m(k)$ вероятность того, что m-ый успех случился в $(m+k)$-ом испытании ($k=0,1,2,\ldots$), получим, что $P_m(k)=p\cdot C_{m+k-1}^{m-1}\cdot q^k\cdot p^{m-1}=\overline{C_m^k}\cdot p^m\cdot q^k$ (такая последовательность задает *распределение Паскаля* - геометрическое распределение является частным его случаем при $m=1$). Из вероятностных соображений должно выполняться равенство $\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_m(k)=1$ - соотношение совсем не очевидное! По-другому его можно обосновать таким образом: $\dfrac{1}{1-q}=1+q+q^2+\ldots$ (как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия), следовательно

$$\frac{1}{(1-q)^m} = \underbrace{\left(1+q+q^2+\ldots\right)\ldots\left(1+q+q^2+\ldots\right)}_{m}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\cdot q^k .$$

Подсчитаем, какой коэффициент будет стоять при q^k после раскрытия скобок в этом выражении. Так как уравнение $q^k=q^{x_1}\ldots q^{x_m}$ равносильно уравнению $x_1+x_2+\ldots+x_m=k$, то коэффициент при q^k равен количеству его целых неотрицательных решений, т.е. $\overline{C_m^k}$.

Примеры.

1.

Некоторый двигатель вырабатывает электроэнергию, которая время от времени используется n станками. Станки работают независимо и требуют каждый в любой момент времени единицу энергии с вероятностью p. (Так. если в среднем один станок потребляет энергию 15 минут в течении часа, то нужно положить $p=\frac{1}{4}$) Тогда вероятность того, что в данный момент времени энергия потребуется k станкам одновременно, представляет собой биномиальное распределение и может быть вычислена по формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$. Если при некотором k_0 возникает перегрузка, нужно подыскать такое n, чтобы минимизировать $P_n(k_0)$. Подобные задачи будут рассмотрены в следующем разделе.

2.

При синтезе некоторого вещества вероятность взрыва в отдельном опыте - $0{,}02$. Предпринимаются 10 попыток. Найти вероятность того, что:

а) все пройдет благополучно;

б) произойдет хотя бы один взрыв;

в) случится ровно три взрыва.

Считая вероятность взрыва вероятностью "успеха" (в формальном смысле), получим схему Бернулли с параметрами $n = 10;\ \ p = 0{,}02; q = 0{,}98$. Тогда:

а) $P_{10}(0) = C_{10}^0 \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{10} \approx 0{,}82$.

б) $P = 1 - P_{10}(0) \approx 0{,}18$.

в) $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot (0{,}02)^3 \cdot (0{,}98)^7 \approx 0{,}0008$.

3.

При передаче сообщения вероятность искажения одного знака - $0{,}1$. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков:

а) не содержит искажений;

б) содержит ровно три искажения;

в) содержит не более трех искажений.

Имеем схему Бернулли с параметрами $n = 10; p = 0{,}1;\ \ q = 0{,}9$.

а) $P_{10}(0) = (0{,}9)^{10} \approx 0{,}349$.

б) $P_{10}(3) = C_{10}^3 \cdot (0{,}1)^3 \cdot (0{,}9)^7 \approx 0{,}057$.

в) $P = \sum_{k=0}^{3} P_{10}(k) \approx 0{,}987$.

Как видим, для подсчета $P_n(k)$ при $n = 10$ хватило простого калькулятора. А что, если $n = 100$? $n = 1000$? $n = 10000$? Ведь практические нужды зачастую как раз и требуют умения находить эти вероятности при больших значениях n. Прямые вычисления здесь наталкиваются на значительные трудности, однако существуют хорошие приближенные формулы - чуть позже, в этой главе, мы расскажем о них.

Наивероятнейшее число успехов.

Посмотрим, как ведет себя функция $P_n(k)$ на множестве $k = \{0;1;\ldots;n\}$. Так как вероятности положительны, то она будет возрастать при k таких, что $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} > 1$ и убывать, когда эта дробь меньше единицы. Итак, нужно сравнить данное отношение с единицей.

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{C_n^{k+1} \cdot p^{k+1} \cdot q^{n-(k+1)}}{C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!} = \frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1} .$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n-k}{k+1} > 1 \Leftrightarrow n \cdot p - k \cdot (p+q) > q \Leftrightarrow k < n \cdot p - q .$$

Аналогично, $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} < 1 \Leftrightarrow k > n \cdot p - q$.

Возможны два варианта:

1. $n \cdot p - q$ - натуральное число.

Тогда при $k_0 = n \cdot p - q$

$\frac{P_n(k_0+1)}{P_n(k_0)} = 1 \Leftrightarrow P_n(k_0+1) = P_n(k_0)$ и вероятности выстраиваются в две цепочки по возрастанию и убыванию:

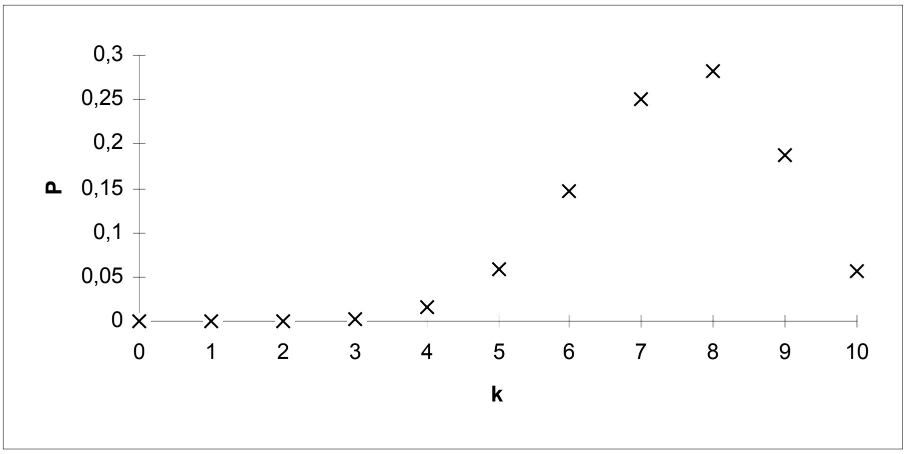
$P_n(0) < P_n(1) < \ldots < P_n(k_0-1) < P_n(k_0) = P_n(k_0+1)$;

$P_n(k_0) = P_n(k_0+1) > P_n(k_0+2) > \ldots > P_n(n-1) > P_n(n)$ В этом случае наивероятнейшее число успехов есть как $k_0 = np - q$, так и $k_0 + 1 = np - q + 1 = np + p$.

2. $n \cdot p - q$ - дробное.

Тогда наивероятнейшее число успехов однозначно определяется из двойного неравенства $n \cdot p - q < k_0 < n \cdot p + p$ и вероятности $P_n(k)$ возрастают при $k < k_0$, а при $k > k_0$ убывают.

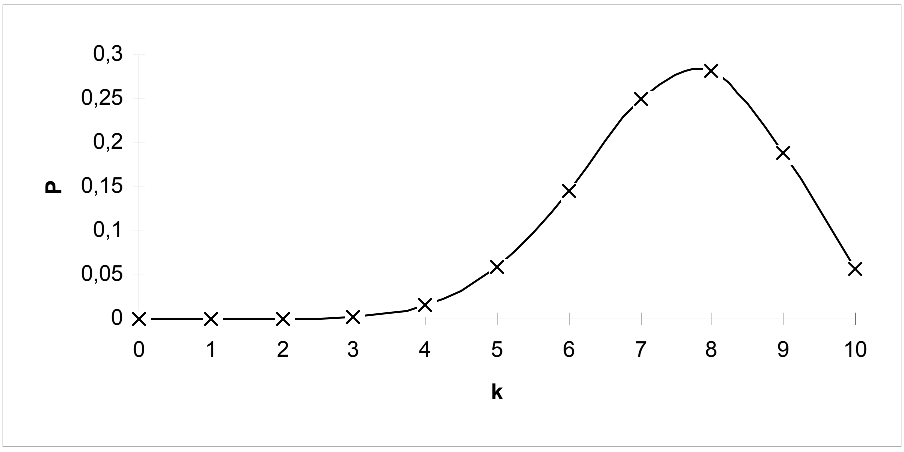
Проиллюстрируем полученные результаты графически. К примеру, при $n = 10$ и $p = \frac{3}{4}$ появится такая картинка:



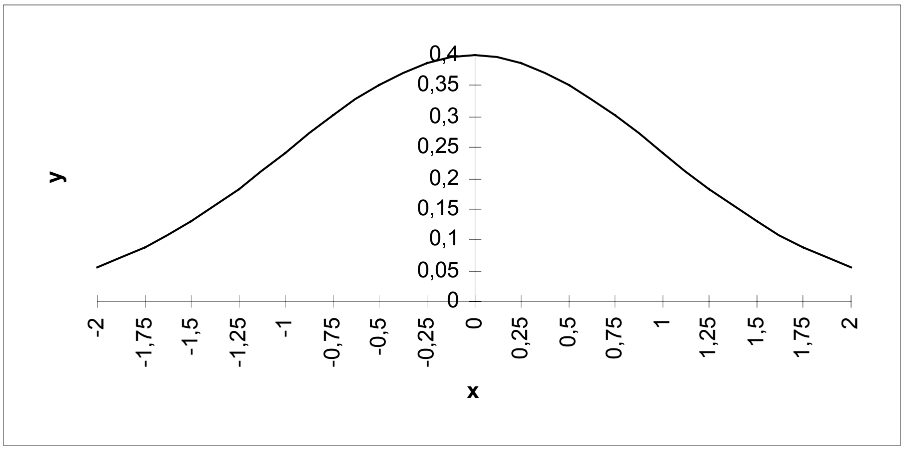
Здесь наивероятнейшее число успехов равно 8.

Несколько существенных замечаний:

- во-первых, уже заранее можно было ожидать, что наивероятнейшее число успехов k_0 находится вблизи np, т.к. мы вправе надеяться, что отношение числа успехов ко всем испытаниям $\frac{k}{n}$ окажется близким к p, и тем ближе, чем больше n - строгим основанием чему является *закон больших чисел* (см. главу восьмую), но интуитивно это бесспорно;
- во-вторых, при больших n максимальные вероятности сами по себе обычно незначительны (если p не очень близко к единице) - так, при 200-ах подбрасываниях правильной монеты наиболее вероятное число успехов - 100, но $P_{200}(100) \approx 0{,}06$, зато довольно приличной будет вероятность того, что количество успехов близко к наиболее вероятному (в случае правильной монеты, например, $P_{200}(95 \le k \le 105) \approx 0{,}563$);
- в-третьих, на нашем рисунке отчетливо видно, что точки вида $(k; P_n(k))$ попадают на весьма характерную плавную кривую:



Подобный “колокол” (или “шляпа”) возникает и при других значениях n и p. Далее мы покажем, что очень хорошо приближает биномиальное распределение (особенно вблизи np) кривая, полученная из функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ (т.н. *плотность нормального* или *гауссова распределения*) сдвигами и растяжениями вдоль координатных осей. Любопытно, что все такие кривые будут иметь ось симметрии, в то время биномиальное распределение обладает этим свойством только при $p=q=\frac{1}{2}$, а в остальных случаях, при больших n, значения будут симметричны с хорошей точностью (Мы вскоре покажем, почему так происходит в окрестности точки np - это и есть, в сущности, *локальная теорема Муавра*-Лапласа; вдали же от этой окрестности вероятности успехов с ростом n становятся практически нулевыми.). Приведем график плотности нормального распределения.



Завершая тему, разберем две легкие задачи.

1.

Вступительный экзамен по математике в один из ВУЗов состоит из 10 задач одинаковой сложности. Подготовка абитуриента такова, что он решает задачу с вероятностью $0{,}8$ независимо от остальных задач. Найти вероятность того, что абитуриент решит от 7 до 9 задач. Найти также наивероятнейшее число решенных задач и вероятность этого события.

По условию, $p = 0{,}8; n = 10.$

Из неравенства $np - q < k_0 < np + p$ получим $k_0 = 8$.

$$P_{10}(8) \approx 0{,}302; P_{10}(7 \le k \le 9) = \sum_{k=7}^{9} P_{10}(k) \approx 0{,}771.$$

2.

Станок в единицу времени потребляет единицу энергии с вероятностью $\frac{3}{4}$. Сколько должно быть всего станков, чтобы наивероятнейшим числом не потребляющих энергию в данный момент времени станков являлось бы 60.

$p = \frac{1}{4}; q = \frac{3}{4}; k_0 = 60$ и для определения n решим двойное неравенство

$\frac{1}{4} \cdot n - \frac{3}{4} \le 60 \le \frac{1}{4} \cdot n + \frac{1}{4}$, откуда $239 \le n \le 243$

(причем при $n = 239$ и $n = 243$ возможны два наивероятнейших числа, соответственно 59 и 60, и $60,61$).

Формула Пуассона для малых вероятностей.

Предположим, что в схеме Бернулли p мало, n - велико, а наивероятнейшее число успехов ($\approx \lambda = np$) - “среднее”, т.е. не слишком малое и не слишком большое. При этих условиях вероятности $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ могут быть вычислены с хорошей точностью по формуле:

$$\boxed{P_n(k) \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}; \lambda = n \cdot p}$$

Это и есть знаменитое пуассоновское приближение или *формула Пуассона для малых вероятностей* - а о последовательности вида $e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!}$ говорят, что она задает *распределение Пуассона с параметром* λ (в задаче 4.3 мы уже с ним сталкивались).

Выведем это соотношение.

$P_n(0) = (1-p)^n = \left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}$, поскольку $\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^n = \left(\left(1-\dfrac{\lambda}{n}\right)^{\frac{1}{-\frac{\lambda}{n}}}\right)^{-\lambda}$, где $\dfrac{\lambda}{n} = p$ - мало,

и $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$ для любой последовательности α_n, такой что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$.

$P_n(1) = n \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} = \dfrac{n \cdot p}{(1-p)} \cdot P_n(0) \approx \lambda \cdot e^{-\lambda}$, так как, ввиду малости p, знаменатель с большой точностью равен единице.

$P_n(2) = \dfrac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot p^2}{2! \cdot (1-p)^2} \cdot P_n(0) \approx \approx \dfrac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$,поскольку $(1-p)^2 \approx 1$, а

$n \cdot (n-1) \cdot p^2 = \dfrac{n \cdot (n-1)}{n \cdot n} \cdot \lambda^2 = \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \cdot \lambda^2 \approx \lambda^2$

Далее аналогично. (Имеет смысл рассматривать k, только значительно меньшие n, ибо если k сравнимо с n, то при больших n и маленьких p вероятности $P_n(k)$ фактически равны нулю, если считать, что наивероятнейшее число успехов $\lambda = np$ мало по сравнению с n - а мы будем придерживаться этого допущения).

Впервые этот результат был получен французским математиком Симионом Пуассоном (1781-1840 гг.) в работе“Исследования о вероятности судебных приговоров по уголовным и гражданским делам”(1837г.).

Пуассоновское распределение поистине вездесуще - им описывается число опечаток в тексте, количество забастовок и войн, вызовов милиции и скорой помощи, аварий и стихийных бедствий, заболеваний некоторыми болезнями, и т.д. и т.п. - словом, любая маловероятная неприятность, которая, тем не менее, может приключиться с каждым.

(И если какое-нибудь редкое явление заметно расходится с распределением Пуассона, это означает, что на самом деле произошло нечто, повысившее его вероятность - таким образом, посредством формулы Пуассона можно выявлять те или иные отклонения от нормы.)

Поэтому не приходится удивляться, что значения $f(\lambda,k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$ были заботливо вычислены, а затем помещены в таблицы, без которых не мыслим ни один задачник по теории вероятностей. Вычисление $f(\lambda,k)$ вменяется в обязанность даже некоторым микрокалькуляторам, не говоря уже о серьезных компьютерных программах.

Отметим, что формула Пуассона столь же успешно применима в случае больших значений p. Ведь тогда q близко к нулю, и их можно поменять местами - "успехи" считать "неудачами" и наоборот.

Посмотрим пару задач:

1.

По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью $0{,}005$. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

Здесь $p=0{,}005; n=1000; \lambda=n\cdot p=5$ - "среднее" относительно p и n, т.е достаточно велико по сравнению с первым, и мало по сравнению со вторым. $P\approx\sum_{k=0}^{3}e^{-5}\cdot\frac{5^k}{k!}$.

Заглянув в таблицы, получим $P\approx 0{,}265$.

2.

Какова вероятность $P_{500}(k)$, что в обществе из 500 человек k из них $(k=2;3;4)$ родились в Рождество?

$n=500; p=\frac{1}{365}; n\cdot p\approx 1{,}370. \Rightarrow P_{500}(2)\approx 0{,}238; P_{500}(3)\approx 0{,}109; P_{500}(4)\approx 0{,}037.$ Если произвести точные вычисления, то в первых трех знаках после запятой расхождений не будет.

Предельные теоремы Муавра - Лапласа.

В 1730 г. шотландский математик Стирлинг вывел красивую формулу для приближенного вычисления факториала: $n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n}$ (точнее, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!\cdot e^n}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}=1$).

Ее доказательство довольно громоздко, и мы не будем на нем останавливаться - желающие могут заглянуть в учебник по математическому анализу.

Формула Стирлинга дает неплохие результаты уже при малых n.

При $n=5$ точное значение $5!=120$, приближенное - $118{,}019$. Можно показать, что при $n \ge 9$ относительная погрешность не будет превышать одного процента.

Сейчас, пользуясь этой формулой, мы обоснуем важнейшие приближенные формулы для схемы Бернулли (впервые опубликованы в книге Муавра “Доктрина шансов”, 1718г., и переоткрыты затем Лапласом - “Аналитическая теория вероятностей”, 1812г.).

Локальная предельная теорема.

Рассмотрим схему Бернулли, причем будем считать, что n, k и $n-k$ велики, а отношение $\frac{k}{n}$ не слишком отличается от p (т.е. $\frac{k}{n}$ лежит в некоторой достаточно малой окрестности точки p; $k \approx np$).

Поскольку наивероятнейшие количества успехов близки к np, это предположение вполне естественно.

Попробуем заменить $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$ более удобным для вычисления выражением. Распишем с этой целью сначала все факториалы по формуле Стирлинга:

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{e^n};\quad (n-k)! \approx \frac{\sqrt{2\pi(n-k)}\cdot(n-k)^{n-k}}{e^{n-k}};\quad k! \approx \frac{\sqrt{2\pi k}\cdot k^k}{e^k}.$$

Тогда

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\approx\frac{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n}\cdot n^n\cdot e^k\cdot e^{n-k}}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{k}\cdot k^k\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{n-k}\cdot(n-k)^{n-k}\,e^n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{k \cdot (n-k)} \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k}} .$$

Поскольку $\frac{k}{n} \approx p$, то $\sqrt{\frac{n}{k\cdot(n-k)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k\cdot(n-k)}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}\cdot n\cdot\left(1-\frac{k}{n}\right)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \Rightarrow$

$$C_n^k \approx \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{n}{n-k}\right)^{n-k} \Rightarrow P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{n}{k}\cdot p\right)^k \cdot \left(\frac{n}{n-k}\cdot q\right)^{n-k} .$$

Отдельно рассмотрим теперь произведение $\left(\frac{n}{k}\cdot p\right)^k \cdot \left(\frac{n}{n-k}\cdot q\right)^{n-k}$.

Если и здесь заменить $\frac{k}{n}$ на p, то $\left(\frac{1}{\frac{k}{n}}\cdot p\right)^k \left(\frac{1}{1-\frac{k}{n}}\cdot q\right)^{n-k} \approx 1$

- получается слишком грубая оценка.

Постараемся получить более точное приближение. Для этого удобно сосредоточить внимание не самом произведении, а на его натуральном логарифме, взятом со знаком “минус”:

$$-\ln\left[\left(\frac{n}{k}p\right)^k \left(\frac{n}{n-k}q\right)^{n-k}\right] = -k\ln\frac{n}{k}p - (n-k)\ln\frac{n}{n-k}q$$

$$= k\cdot\ln\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{p}\right) + (n-k)\cdot\ln\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{q}\right) = n\cdot\left[\frac{k}{n}\cdot\ln\left(\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{p}\right) + \left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\ln\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{q}\right)\right] .$$

Обозначим выражение в квадратных скобках через $f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Тогда $\left(\frac{n}{k}\cdot p\right)^k \cdot \left(\frac{n}{n-k}\cdot q\right)^{n-k} = e^{-n\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)}$ и остается исследовать выражение в квадратных скобках.

Так как $\frac{k}{n}$ близко к p, то логичным представляется, положив $x = \frac{k}{n}$, ввести функцию $f(x) = x\cdot\ln\frac{x}{p} + (1-x)\cdot\ln\frac{1-x}{q}$ и посмотреть на несколько первых слагаемых, которые возникнут при разложении этой функции в ряд Тейлора в окрестности точки

p. Чтобы получить достойное приближение, следует взять, как минимум, первые три слагаемых: $f(x) \approx f(p) + f'(p)(x-p) + f''(p) \cdot \frac{(x-p)^2}{2}$

- именно три, поскольку, очевидно, $f(p) = 0$ и, как сейчас выясним, $f'(p) = 0$.

Действительно,

$f'(x) = \ln\frac{x}{p} + x \cdot \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{p} - \ln\frac{1-x}{q} - (1-x) \cdot \frac{q}{1-x} \cdot \frac{1}{q} = \ln\frac{x}{p} - \ln\frac{1-x}{q} \Rightarrow f'(p) = 0$ (т. к. $p + q = 1$).

Найдем $f''(p)$.

$$f''(x) = \frac{p}{x} \cdot \frac{1}{p} + \frac{q}{1-x} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \Rightarrow f''(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{p+q}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot q}.$$

Мы получили, что $f(x) \approx \frac{1}{p \cdot q} \cdot \frac{(x-p)^2}{2}$, и следовательно,

$$f\left(\tfrac{k}{n}\right) \approx \frac{1}{p \cdot q} \cdot \frac{\left(\frac{k}{n} - p\right)^2}{2} \quad \text{и} \quad e^{-n \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)} = e^{-\frac{\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}} = \exp\frac{-\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}.$$

Таким образом, окончательно

$$\boxed{P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}\right)^2}{2}}}$$

Что же означает локальная теорема? Фактически мы доказали, что при больших $n, k, n-k$ и $\frac{k}{n}$, близких к p, значения $P_n(k)$ хорошо приближаются функцией

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}}$$

(ее график получается из графика $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ сдвигами и растяжениями):

$P_n(k)\approx\psi(k)$.

Итак, вполне научными рассуждениями установлено, почему кривая, которую мы получили ранее, пытаясь соединить значения $P_n(k)$ плавной линией, порождается плотностью нормального распределения.

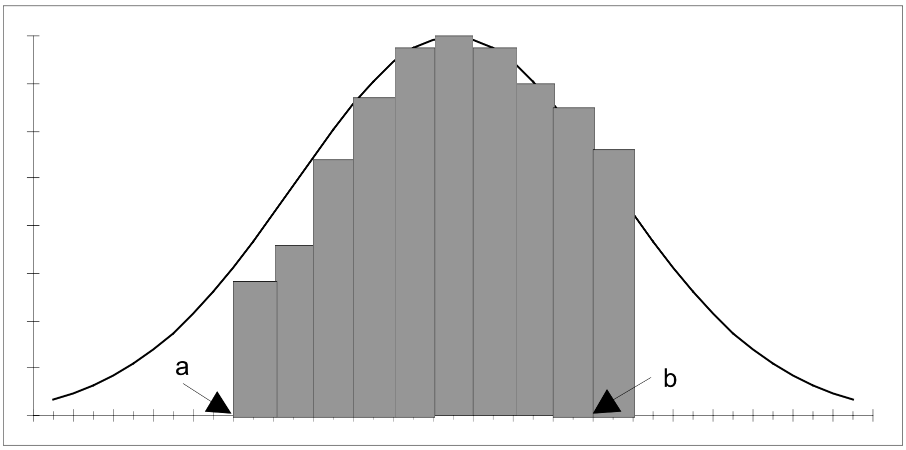
Можно показать, что локальная теорема остается справедливой и для остальных значений k, не обязательно близких к $n\cdot p$, лишь бы p и q были не очень велики или малы.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Оценим с помощью локальной теоремы вероятность $P_n(a\le k\le b)$ того, что количество успехов в схеме Бернулли заключено в промежутке $[a;b]$.

$P_n(a\le k\le b)$ есть сумма площадей прямоугольников со сторонами $P_n(k)$ (где $a\le k\le b$) и 1, которая близка к площади, ограниченной кривой

$\frac{1}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}}$ (что гарантируется локальной теоремой).



Поэтому $P_n(a \le k \le b) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_a^b e^{-\frac{\left(\frac{x-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}{2}} dx$.

Произведем замену $t = \frac{x - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$. Тогда $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ и

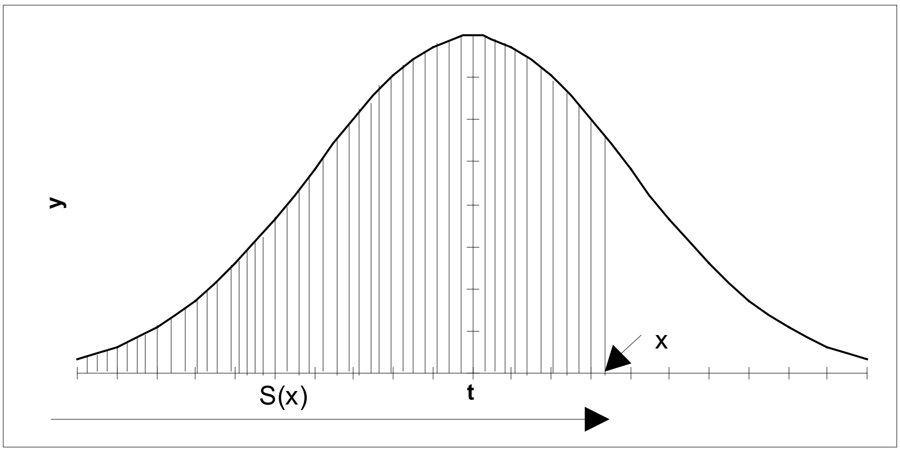
$\frac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \le t \le \frac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$. Отсюда получаем, что

$$\boxed{P_n(a \le k \le b) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

Это и есть *интегральная теорема Муавра-Лапласа.*

Как видим, она тесно связана с функцией $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - *нормальным* , или *гауссовым*, *распределением* (и всякая серьезная математическая программа умеет вычислять значения этой функции с любой точностью).

Геометрически значение $\Phi(x)$ есть площадь под кривой плотности нормального распределения $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$, заключенная в пределах от $-\infty$ до x .



Перечислим некоторые свойства этой функции.

Ясно, что $\Phi(-\infty)=0$. Известно также, что $\Phi(\infty)=1$ (в силу соотношения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

- т.н. *интеграл Пуассона*) и что $\Phi(0)=\frac{1}{2}$ (следует из четности подинтегральной функции).

Заглянув в таблицы (они имеются в каждом задачнике по теории вероятности), можно обнаружить, что в них, как правило, приводятся значения $\Phi(x)$ только при положительном аргументе, не превышающем четырех. Это объясняется вот чем: во-первых, из четности гауссовой плотности и из того, что она ограничивает единичную площадь, сразу вытекает, что $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$; во-вторых, гауссова плотность настолько быстро убывает к нулю, что при $x > 2\Phi(x)$ уже мало чем отличается от единицы:

$\Phi(2{,}331) \approx 0{,}9901;$

$\Phi(3) \approx 0{,}9986; \Phi(4) \approx 0{,}9997$.

Наконец, т.к. $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$ есть площадь, ограниченная плотностью на отрезке $[x_1; x_2]$, то $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, что позволяет

$P_n(a \le k \le b) \approx \Phi\Big($ -

переформулировать интегральную теорему так:

.

Перейдем к примерам.

1.

Правильную монету бросают 200 раз. Какова вероятность, что число выпавших гербов отклонится от 100 самое большее на пять?

В данном случае $p=\dfrac{1}{2}; n=200; a=95; b=105$. По интегральной теореме,

$$P_{200}(95\le k\le 105)\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1), \text{ где } x_2=\frac{b-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\approx 0{,}71; x_1=\frac{a-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}=-x_2;$$

$$\Rightarrow P_{200}(95\le k\le 105)\approx \Phi(x_2)-(1-\Phi(x_2))=2\Phi(x_2)-1\approx 0{,}5606 .$$

Утомительный прямой подсчет дал бы $P\approx 0{,}5632$.

2.

$p=0{,}35$.

а) $P_{700}(270)=?$

б) $P_{700}(240\le k\le 270)=?$

в) $P_{700}(k\ge 270)=?$

а) По локальной теореме, $P\approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}$, где $\sqrt{n\cdot p\cdot q}\approx 12{,}6$;

$$x=\frac{k-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}}\approx 1{,}98; \varphi(1{,}98)\approx 0{,}0562\Rightarrow P\approx 0{,}0045$$

б) Произведя стандартные подсчеты, получим $x_2\approx 1{,}98; x_1\approx -1{,}19$.

$P\approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)=\Phi(x_2)-(1-\Phi(-x_1))\approx 0{,}8591$.

в) $a=270; b=700; x_1\approx 1{,}98; x_2\approx 36{,}1$.

$P\approx 1-\Phi(x_1)\approx 0{,}0238$.

3.

По каналу связи передают сообщение из нулей и единиц. Вероятность правильной передачи знака равна $0,55$. Для повышения этой вероятности можно повторять каждый знак n раз, считая при этом, что последовательности из n принятых знаков в сообщении соответствует знак, составляющий в последовательности большинство. Подобрать n таким, чтобы вероятность правильной передачи знака была бы не меньше $0,99$.

Следует найти такое n, чтобы $P_n\left(\frac{n}{2} \le k \le n\right) \approx 0,99$. При этом

$$p = 0,55; n \cdot p = \frac{11}{20} \cdot n; n \cdot p \cdot q = \frac{11 \cdot 9 \cdot n}{20 \cdot 20}; \sqrt{n \cdot p \cdot q} =$$
$$= \frac{3\sqrt{11}}{20} \cdot \sqrt{n}; x_2 = \frac{n - \frac{11}{20} \cdot n}{\sqrt{n} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{20}} = \frac{3 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{11}}; x_1 = -\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{11}}.$$

Если $x_2 \ge 3$, т.е. $n \ge 11$, то можно считать, что $\Phi(x_2) = 1$. Но при $n = 11$, как показывает непосредственный подсчет, вероятность $P_n\left(\frac{n}{2} \le k \le n\right)$ не превосходит $0,7$.

Поэтому положим, что $\Phi(x_2) = 1$ и тогда интегральная теорема дает следующее уравнение:

$P_n\left(\frac{n}{2} \le k \le n\right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 1 - (1 - \Phi(-x_1)) \approx 0,99$ откуда $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{11}}\right) \approx 0,99$. Но

$\Phi(2,33) \approx 0,99$ (из таблиц) и функция $\Phi(x)$ - монотонна, поэтому

$$\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{11}} \approx 2,33 \Rightarrow n \approx 536.$$

Упражнения.

6.1

Вероятность взятия вратарем одиннадцатиметрового штрафного удара $\frac{1}{4}$. Какова вероятность, что он возьмет а) хотя бы один мяч из четырех?

б) ровно один мяч из четырех?

6.2

Какова вероятность не менее двух раз попасть в цель, если вероятность попадания каждого выстрела - $\frac{1}{5}$ и производится 10 независимых выстрелов?

6.3

Испытание заключается в бросании трех игральных костей. Какова вероятность, что в пяти независимых испытаниях ровно два раза выпадет по три единицы?

6.4

Движение частицы по целым точкам прямой описывается схемой Бернулли с вероятностью p успеха в отдельном опыте: успех соответствует переходу в правую соседнюю точку из своего положения, неудача - в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица перейдет из точки 0 в точку m.

6.5

Вероятность успеха в отдельном испытании p. Найти вероятность того, что k-ый по порядку успех происходит при l-ом испытании.

6.6

Вы поспорили с приятелем, у кого выпадет больше гербов в серии из n-кратного подбрасывания правильной монеты. Какова вероятность ничьей?

6.7

Баскетболист забрасывает мяч в корзину с вероятностью, лежащей в пределах $0{,}7 - 0{,}9$. Найти, в каких границах заключается наивероятнейшее число попаданий в серии из 15 бросков.

6.8

Вероятность производства стандартной детали без брака - $0{,}98$. Каково наивероятнейшее число стандартных деталей в партии из 625 деталей?

6.9

Вероятность того, что случайно выбранная деталь - бракованная, составляет $0{,}1$. Ков должен быть объем партии деталей, чтобы наивероятнейшее число годных равнялось бы пятидести?

6.10

С помощью формулы Стирлинга получить приближенный ответ к задаче 3.16 при больших n.

6.11

С помощью формулы Стирлинга получить приближенный ответ к задаче 6.6 при больших n.

6.12

Таблица составлена из случайно выбранных цифр, сгруппированных по две. Какова вероятность, что среди ста пар некая отмеченная пара встретится не менее двух раз?

6.13

Каковы шансы на то, что среди 200 человек окажется не менее четырех левшей, если в среднем левши составляют 1% всего населения?

6.14

В некотором государстве 1% населения страдает теми или другими психическими расстройствами. В группе из скольких человек вероятность столкнуться с душевнобольным превысит $0{,}95$?

6.15

$p = 0{,}4$

а) $P_{500}\left(220\right) = ?$

б) $P_{500}\left(190\right) = ?$

в) $P_{500}\left(180 \le k \le 240\right) = ?$

г) $P_{500}\left(k \le 235\right) = ?$

6.16

Театр вмещает 1000 человек и имеет два разных входа и два гардероба на n мест каждый. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов, чтобы с вероятностью $0{,}99$ все зрители в случае аншлага могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли (считать, что вход выбирается с вероятностью $\frac{1}{2}$)? Рассмотреть возможности:

а) все зрители приходят парами;

б) все зрители приходят поодиночке.

Ответы и решения.

6.1

а) $P=1-(0{,}75)^4\approx 0{,}68.$

б) $P_4(1)=C_4^1\cdot(0{,}25)^1\cdot(0{,}75)^3\approx 0{,}42.$

Задача простая, но поучительная. Дело в том, что люди, далекие от теории вероятности и математики, нередко дают ответ, что вероятность будет равна единице - приходя к такому умозаключению на основании равенства $\frac{1}{4}\cdot 4=1$, хотя и бесспорного, но не имеющего никакого отношения к поставленному вопросу. Ведь эдак рассуждая, выводим, что после пяти пенальти вероятность взять мяч составит $\frac{5}{4}$.

6.2

$P=1-(0{,}8)^{10}-C_{10}^1\cdot(0{,}2)^1\cdot(0{,}8)^9\approx 0{,}699.$

6.3

$$P=C_5^2\cdot\left(\frac{1}{6^3}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{6^3}\right)^3\approx 0{,}00021.$$

6.4

Пусть k - количество успехов, l - количество неудач, приводящих к тому, что частица за n шагов переместится из 0 в m. Тогда

$\begin{cases}k+l=n\\ k-l=m\end{cases}$, откуда $k=\dfrac{n+m}{2};l=\dfrac{n-m}{2}$.

Поэтому $P=C_n^{\frac{n+m}{2}}\cdot p^{\frac{n+m}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-m}{2}}$, если $n+m$ четное, и $P=0$ в противном случае.

6.5

Нужно найти $P(A\cdot B)$, где A означает, что в $l-1$ испытаниях вышло ровно $k-1$ успехов, а B - что в l-ом испытании произошел успех, причем эти события независимы.

$$P=P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=C_{l-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{l-k}\cdot p=\ C_{l-1}^{k-1}\cdot p^k\cdot(1-p)^{l-k}\ .$$

6.6

Рассмотрим события A_i (у вас в n бросках выпало ровно i гербов) и B_i (i гербов выпало у вашего приятеля).

$$P=P\left(\sum_{i=0}^n A_i\cdot B_i\right)=\ \sum_{i=0}^n P(A_i\cdot B_i)=\sum_{i=0}^n P(A_i)\cdot P(B_i)=\frac{\sum\limits_{i=0}^n\left(C_n^i\right)^2}{2^{2n}}\ .$$

Согласно задаче 2.13 (в), $\sum\limits_{i=0}^n\left(C_n^i\right)^2=C_{2n}^n$, поэтому $P=\dfrac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

6.7

$k \in [11;14]$.

6.8

$n = 613$.

6.9

$n = 55$.

6.10

$P_n \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot n}}$.

6.11

$P_n \approx \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot n}}$.

6.12

Вероятность появления отдельной пары $p = \frac{1}{100}; n = 100; \lambda = 1$. По формуле Пуассона $P \approx 1 - e^{-1} - e^{-1} \approx 0{,}265.$

6.13

$p = 0{,}01; n = 200; \lambda = 2 P = 1 - \sum_{k=0}^{3} P_{200}(k) \approx 0{,}143.$

6.14

По формуле Пуассона, вероятность встретить хотя бы одного ненормального - $P \approx 1 - e^{-\frac{n}{100}}$. Значит, должно выполняться неравенство $1 - e^{-\frac{n}{100}} \geq 0{,}95$, откуда $n \geq 300$.

6.15

а) $P \approx 0{,}0069.$

б) $P \approx 0{,}0240.$

в) $P \approx 0{,}9655.$

г) $P \approx 0{,}9993.$

6.16

а) Пусть m - число пар, попавших в первый вход, тогда во второй попадет $500 - m$ пар. Все пары смогут раздеться, если выполняются условия $\begin{cases} 2m \leq n \\ 1000 - 2m \leq n \end{cases}$, т.е.

$500-\frac{n}{2}\le m\le\frac{n}{2}$. Вероятность p для отдельной пары выбрать первый вход (“успех”) равна $\frac{1}{2}$. n должно быть таково, что $P_n\left(500-\frac{n}{2}\le m\le\frac{n}{2}\right)\approx 0{,}99.$ Из интегральной теоремы тогда следует, что $\Phi(x_2)-\Phi(x_1)\approx 0{,}99$, где

$$x_1=\frac{500-n}{\sqrt{\frac{n}{4}}};x_2=0\Rightarrow\Phi(x_1)\approx -0{,}49\Rightarrow n\approx 558.$$

б) Аналогично получим $P_n(1000-n\le m\le n)\approx 0{,}99$, откуда, по интегральной теореме, $n\approx 541$.

Глава седьмая

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В работе, написанной в 1733 г., известный французский ученый Жорж Бюффон (его высказывание “ *Стиль - это человек* “ вошло в пословицу) впервые рассмотрел вероятностное пространство, состоящее из несчетного числа элементарных событий. Модель, предложенная Бюффоном, описывает ситуации, сводящиеся к равномерному распределению случайной точки в некоторой области прямой, плоскости или пространства - термин “*равномерное распределение*” означает, что эта точка с одинаковым успехом может “угодить” в любое место области, все точки области в этом смысле равноправны. Например, такая ситуация возникает, когда стрельба по мешени ведется посредственным стрелком. В этих случаях естественно считать, что вероятность попадания в произвольный участок данной области пропорциональна его длине (площади или объему) и равна отношению “благоприятной” длины ко всей. Дадим точное определение:

Пусть эксперимент заключается в бросании точки во множество Ω на прямой (плоскости или в пространстве), имеющее длину (площадь

При таком подходе все основные свойства вероятностей, справедливые для дискретных пространств, остаются в силе:

1. $P(\Omega)=1;P(\varnothing)=0.$
2. $P(\overline{A})=1-P(A).$
3. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$
4. $A\subset B\Rightarrow P(B-A)=P(B)-P(A).$

А так как эти свойства выполняются, то на *геометрические вероятности* дословно переносятся определения *условной вероятности, независимости событий* и связанные с этими определениями теоремы - *формула полной вероятности, формулы Байеса.* Также останется справедливой *формула вероятности суммы нескольких событий.*

Однако возникают и некоторые отличия, обусловленные изменением мощности вероятностного пространства (в дискретном случае элементарных событий не больше, чем натуральных чисел; здесь же этих событий столько же, сколько точек в отрезке - а их сосчитать невозможно) и привлечением понятия *меры* (длины, площади или объема) множества. Выделим самые существенные:

1. В дискретном случае любое подмножество множества Ω может рассматриваться как событие и имеет какую-нибудь вероятность. Для геометрических вероятностей это не так, потому что существуют множества, и вовсе не имеющие меры (правда, пример такого множества привести не просто - для этого вначале нужно точно определить, что понимается под мерой множества; здесь эти разъяснения увели бы нас слишком в сторону). Следовательно, найдутся такие подмножества Ω, которые нельзя рассматривать как события.

2. Из определения следует, что вероятность попадания в отдельную конкретную точку области Ω равна нулю. Тем не менее, в нее можно попасть. Более того, в результате эксперимента наша точка попадает в некую точку области, т.е. результатом будет событие, имеющее нулевую вероятность. Кроме того, получается, что события "попасть в одну точку" и "попасть в одну из n точек" (и более того, "попасть в счетную совокупность точек") - равновероятны. Наконец, объединение событий "попасть в конкретную точку области" с нулевыми вероятностями дает достоверное событие Ω, вероятность которого единица. С математической точки зрения здесь нет противоречия, поскольку с этой точки зрения складывать можно лишь конечные или счетные совокупности чисел. Все же возникает ощущение, что "что-то не то". Действительно, такое положение дел немного напоминает следующий абсурдный диалог в пивной:

- *Бармен, сколько стоит капля пива?*

- *Ничего не стоит.*

- *Отлично. Тогда накапайте мне, пожалуйста, кружку!*

Как показал в своих работах А.Робинсон (1918-1974гг.), парадоксы нулевой вероятности разрешаются путем пополнения обычной числовой прямой множеством *бесконечно-малых чисел*. Можно приписать вероятности попадания в точку бесконечно-малую величину (но не нуль), и тогда вероятность попадания в одну из двух точек больше вероятности попадания в отдельную точку - опять-таки на бесконечно-малую и т.д.

Примеры.

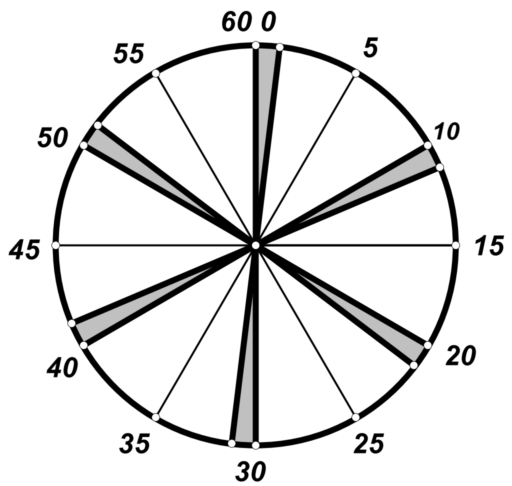
1. *Задача о свиданиях.*

Молодой человек познакомился с двумя девушками, которых обозначим буквами А и Б. Невдалеке от его работы находится железнодорожная станция. Сев в электричку, следующую из города, он попадает к А, в город - к Б. Идеализируя задачу, допустим, что электрички идут регулярно с интервалами в десять минут:

из города	в город
....	....
17.00	17.01
17.10	17.11
17.20	17.21
....	....

Казалось бы, движение поездов совершенно равноправное, но происходит следующее: каждый день после работы молодой человек приходит на станцию (в случайный момент времени, т.е. время его появления равномерно распределено по окружности "длиной" 60 минут) и, положившись на "авось", садится в первую попавшуюся электричку. Через некоторое время он замечает, что в подавляющем большинстве случаев электричка увозит его загород. В чем здесь дело?

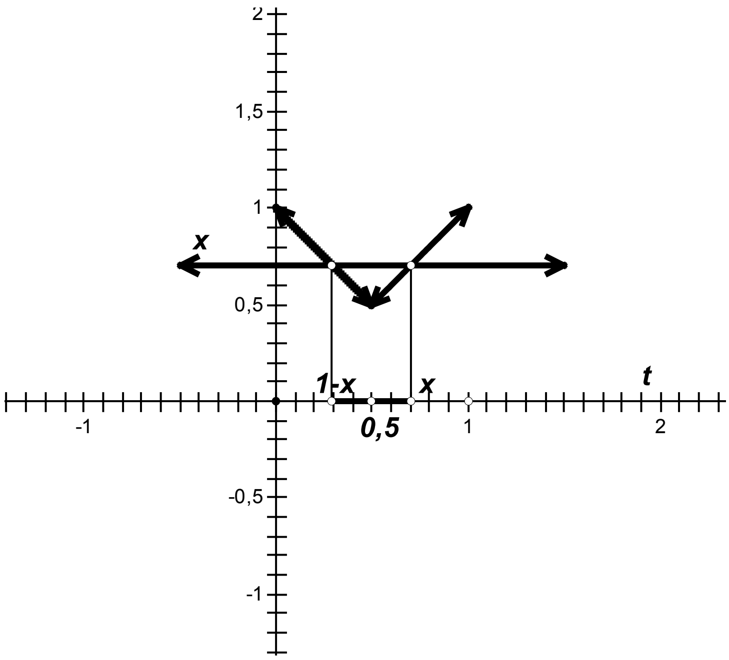
Ответ виден из картинки - заштрихованные интервалы "длиной" в одну минуту благоприятствуют поездке в город к Б. Поэтому вероятность попасть в город равна $\frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1$.



2.

Случайная точка равномерно распределена на отрезке $[0;1]$ и делит его на две части, так что η_1 - длина большей, а η_2 - меньшей части. Найти $P(\eta_1 \le x)$ и $P(\eta_2 \le x)$, где x - любое число.

Построим график $\eta_1(t)$. Очевидно, что $\eta_1(t) = \begin{cases} 1-t; 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ t; \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$



Из графика видно, что $P(\eta_1 \le x) = \begin{cases} 0; x \le \frac{1}{2} \\ 2x-1; \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ 1; x \ge 1 \end{cases}$

Аналогично, $P(\eta_2 \le x) = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ 2x; 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1; x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

3.

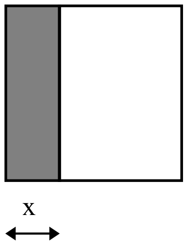
Случайная точка равномерно распределена в единичном квадрате. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до а) фиксированной стороны квадрата

б) ближайшей стороны квадрата

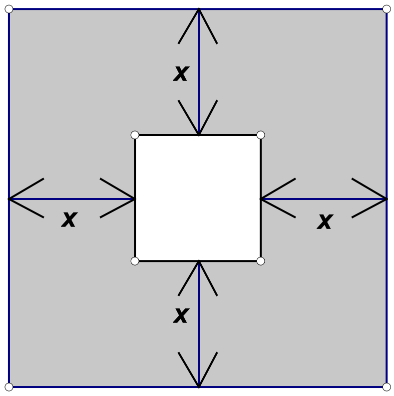
в) центра квадрата

г) фиксированной вершины квадрата

не превзойдет произвольного числа x

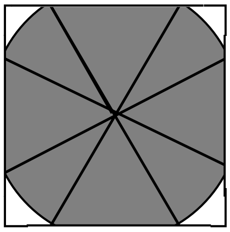


а) $P = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ x; 0 \le x \le 1 \\ 1; x \ge 1 \end{cases}$



б) $P = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ 1-(1-2x)^2 = 4x(1-x); 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1; x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

в) Понятно, что при $x \le 0 \quad P = 0;$ при $0 \le x \le \frac{1}{2}$ (радиус вписанной в квадрат окружности) $P = \pi x^2$ и при $x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ (радиус описанной окружности) $P = 1$. Наиболее содержательный случай возникает при $\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. Эта ситуация изображена на следующем рисунке.

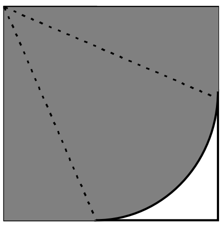


Таким образом, благоприятная площадь есть учетверенная сумма площадей треугольника и сектора. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной x и высотой $\frac{1}{2}$ нетрудно найти площадь $S_t = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2-1}$ и угол при вершине $\beta = 2\arccos\frac{1}{2x}$. Тогда угол при вершине сектора $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ и его площадь $S_s = \dfrac{\alpha x^2}{2}$. Следовательно,

$P = \sqrt{4x^2-1} + x^2\left(\pi - 4\arccos\frac{1}{2x}\right)$.

г) $P = \begin{cases} 0; x \le 0 \\ \frac{\pi}{4}x^2; 0 \le x \le 1 \\ \sqrt{x^2-1} + x^2\left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{x}\right); 1 \le x \le \sqrt{2} \\ 1; x \ge \sqrt{2} \end{cases}$

Рисунок к случаю, когда x меняется в пределах между длиной стороны квадрата и его диагональю, приведен ниже.



$S = 2S_t + S_s$, где $S_t = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}; S_s = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{x}\right)$.

4.

Случайная точка равномерно распределена в равнобедренном треугольнике с углом φ при вершине и боковой стороной l, и расстояния от этой точки до боковых сторон равны h_1 и h_2 соответственно. Определить $P(h_1 + h_2 \le x)$ для любого x.

Удобно сумму $h_1 + h_2$ заменить расстоянием h_3 от нашей точки до основания, длина которого $2l\sin\frac{\varphi}{2}$. Для этого найдем площадь треугольника как сумму площадей трех треугольников с высотами h_1, h_2, h_3 и общей вершиной в этой точке:

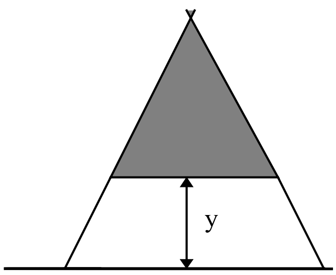
$$S_t = \tfrac{1}{2}h_1 l + \tfrac{1}{2}h_2 l + h_3 l\sin\tfrac{\varphi}{2} = \tfrac{1}{2}l^2\sin\varphi; \ \Rightarrow h_1 + h_2 = l\sin\varphi - 2h_3\sin\tfrac{\varphi}{2};$$

$$h_1 + h_2 \le x \Leftrightarrow h_3 \ge \frac{l\sin\varphi - x}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = y.$$

Итак, $P(h_1 + h_2 \le x) \Leftrightarrow P(h_3 \ge y)$.

Понятно, что при $y \le 0$ $(\Leftrightarrow x \ge l\sin\varphi)$ $P = 1$, а при $y \ge l\cos\frac{\varphi}{2}$ - высота, опущенная на основание $(\Leftrightarrow x \le 0)$ $P = 1$. Если же y неотрицательно и не превосходит высоты (что соответствует случаю $0 \le x \le l\sin\varphi$), то искомая вероятность есть отношение площадей двух подобных треугольников и равна коэффициенту подобия в квадрате:

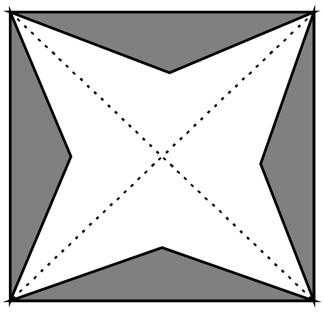
$$P = \left(\frac{l\cos\frac{\varphi}{2} - y}{l\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = \left(1 - \frac{y}{l\cos\frac{\varphi}{2}}\right)^2 = \left(\frac{x}{l\sin\varphi}\right)^2.$$



5.

Случайная точка имеет равномерное распределение в квадрате со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата меньше, чем расстояние от нее же до ближайшей диагонали квадрата.

Благоприятная площадь изображена на рисунке.



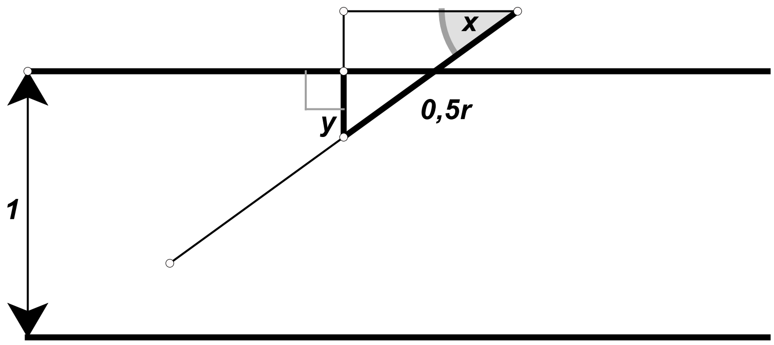
Площадь каждого из четырех треугольников равна $\frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a \cdot tg\frac{\pi}{8}$. Поэтому

$$P = \frac{a^2 tg\frac{\pi}{8}}{a^2} = tg\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}41421...$$

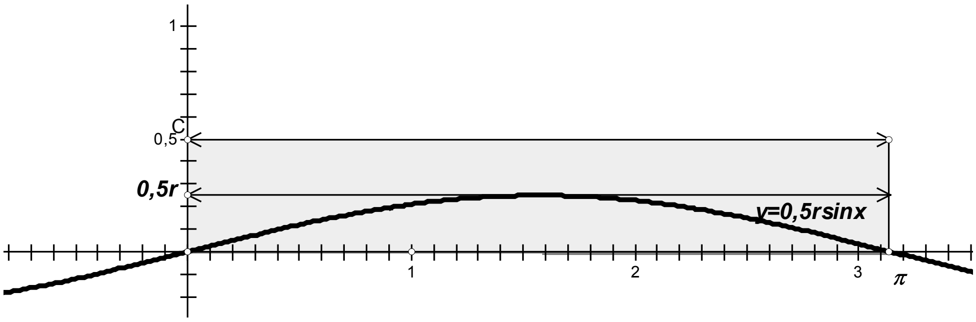
Задача об игле.

Плоскость разлинована на полосы единичной ширины. На нее бросают иглу (отрезок) длиной $r \le 1$. Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий? Именно эта задача привела Бюффона к рассмотрению геометрических вероятностей. Положение иглы характеризуется двумя параметрами: углом x между иглой и линией ($0 \le x \le \pi$) и расстоянием y от середины иглы до ближайшей из линий ($0 \le y \le \frac{1}{2}$).

Условие пересечения иглы с линией можно записать в виде $y \le \frac{1}{2} r \sin x$:



Таким образом, речь идет о бросании точки в прямоугольник $[0;\pi]\times[0;\frac{1}{2}]$ и “благоприятной” площадью здесь будет площадь под кривой $y = \frac{1}{2} r \sin x$:



Следовательно, искомая вероятность такова:

$$P=\frac{\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r\sin x dx}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{1}{2}r\left(-\cos\pi+\cos 0\right)}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2r}{\pi}.$$

При $r=1$, в частности, получим $P=\dfrac{2}{\pi}$, и возникает возможность получить число π экспериментальным путем:

отношение числа пересечений к числу всех бросков примерно равняется $\dfrac{2}{\pi}$. В середине прошлого века этот опыт провел швейцарский астроном Р.Вольф - он подбросил иголку 5000 раз и получил $\pi \approx$ 3,159. Однако можно показать, что для получения, например, трех верных знаков после запятой при таком подходе требуется в среднем порядка нескольких миллионов экспериментов - без компьютера здесь не обойтись.

Парадокс Бертрана.

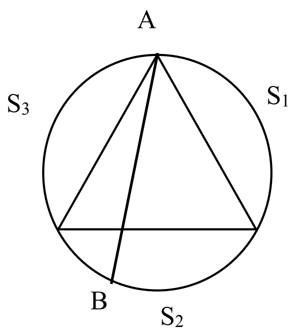
Часто случается, когда то или иное высказывание, ввиду нечеткой его формулировки, допускает различные интерпретации. Так, в классическом отечественном мультфильме “ В стране невыученных уроков “ в подобную ситуацию попадает двоечник Виктор Перестукин, поставленный перед необходимостью правильно поставить запятую в фразе “ *Казнить нельзя помиловать* “ (автор не без удовольствия вспоминает в этой связи схожий, хотя и менее впечатляющий, случай из его личной жизни: в оное время, отбывая воинскую повинность в рядах вооруженных сил, он допекал добродушного замполита полка просьбами внести полную ясность в популярный и обязательный в каждой казарме лозунг “ *Ленин великий нам путь озарил* “.)

Подобные неоднозначности и недоразумения встречаются порой и в математике, а среди прочих ее разделов - также в теории вероятностей. В 1889 г. в книге “Исчисление вероятностей” Жозеф Бертран поместил задачу, вызвавшую большие толки и пересуды в научном мире. Она так и осталась в математике под названием “ *Парадокс Бертрана* “. Вот ее формулировка:

На некоторой окружности случайным образом выбирается хорда. Найти вероятность того, что эта хорда будет длиннее стороны правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

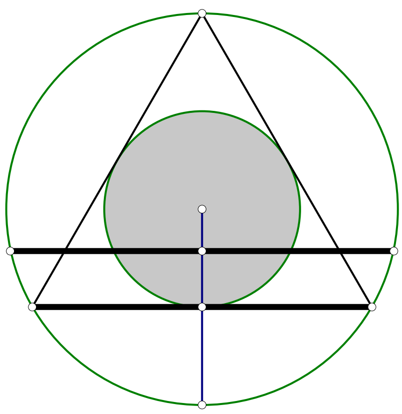
Весь фокус здесь в том, как понимать высказывание “ *случайно выбранная хорда* “.

1. Выберем на окружности случайным образом точку A, а затем - точку B. Ясно, что хорда AB окажется длиннее стороны правильного треугольника с вершиной в A, если B попадет на дугу S_2, составляющую $\frac{1}{3}$ всей окружности:



Поэтому $P = \frac{1}{3}$.

2. Случайным образом выберем точку внутри круга (пусть радиус круга - r). Существует лишь одна хорда, середина которой является этой точкой - хорда, перпендикулярная радиусу, проходящему через эту точку. Рассмотрим окружность радиуса $\frac{1}{2}r$ с тем же центром - все равносторонние треугольники, вписанные в круг, окажутся описанными вокруг этой окружности. Очевидно, что хорда длиннее стороны правильного треугольника, если точка попадет внутрь этой окружности:



$$P = \frac{\frac{1}{4}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4} \ .$$

3. Выберем на окружности случайную точку. Проведем через нее радиус, и на нем выберем еще одну точку, через которую проведем хорду перпендикулярно этому радиусу. Она будет длиннее стороны правильного треугольника, если точка попадет в ближайшую к центру половину радиуса, т.е. $P = \frac{1}{2}$.

Итак, получены три разных ответа, но нужно ли удивляться этому? На самом деле никакого противоречия нет, ведь мы пользовались различными равномерными распределениями: на окружности, в круге и на отрезке. При иных выборах хорды можно получить вероятность, большую половины: если ее задавать случайной точкой внутри круга и случайным углом, задающим направление относительно некоторой прямой, то $P \approx$ 0,61; а если двумя случайными точками в круге, то $P \approx 0{,}74$.

Задача о спичке.

Спичку случайным образом ломают на три части (в двух местах одновременно). Какова вероятность, что из этих частей можно составить треугольник?

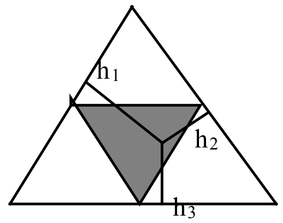
Мы сейчас приведем довольно изящное решение этой задачи. Искусство математики включает в себя умение находить математические модели той или иной ситуации, подчас очень неожиданные и красивые. “ *Чем дальше находились в начале друг от друга зависимые объекты, тем большее уважение заслуживает исследователь, обнаруживший между ними связь.* “ (Дж. Пойя. “Математическое открытие”.)

Продемонстрируем, пускай в миниатюре, но настоящее математическое открытие. Оказывается, ключ к решению нашей задачи (усмотреть эту зависимость и есть самое трудное) спрятан в известной геометрической - если взять произвольную точку внутри правильного треугольника, то сумма расстояний от этой точки до сторон постоянна и равна высоте этого треугольника (легко доказывается через площади).

Значит, произвольная точка внутри правильного треугольника с высотой, равной длине спички, однозначно задает разбиение спички на три отрезка - тремя расстояниями от точки до сторон. Чтобы можно было составить треугольник, должны выполняться условия:

$$\begin{cases} h_1 + h_2 > h_3 \\ h_1 + h_3 > h_2 \\ h_2 + h_3 > h_1 \end{cases}$$

Очевидно, они выполняются тогда и только тогда, когда точка лежит в серединном треугольнике.



Например, покажем, что если точка расположена внутри серединного треугольника, то $h_1 + h_2 > h_3$.

Из условия следует, что

$h_3 < \frac{1}{2}h$ и $h = h_1 + h_2 + h_3 \Rightarrow h_1 + h_2 = h - h_3 > h - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h > h_3$.

Поэтому $P = \frac{1}{4}$.

Упражнения.

7.1

Случайная точка имеет равномерное распределение в прямоугольнике со сторонами 1 и 2. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до

а) ближайшей стороны

б) любой стороны

не превзойдет произвольного x.

7.2

Случайная точка равномерно распределена в правильном n-угольнике со стороной a. Найти вероятность того, что расстояние от этой точки до

а) ближайшей стороны

б) до центра

не превзойдет произвольного x.

7.3

Точка равномерно распределена в правильном n-угольнике. P_n - вероятность того, что эта точка ближе к границе, чем к диагоналям многоугольника. Доказать, что при больших $nP_n \approx \dfrac{\pi^2}{2n^2}$.

7.4

Имеются три одинаковых стержня. От каждого из них отламывают по куску. Какова вероятность, что из этих кусков можно сложить треугольник?

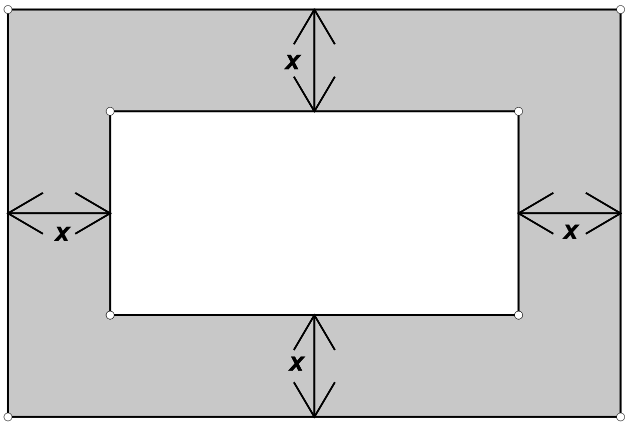
7.5

Точка равномерно распределена в остроугольном треугольнике. Какова максимальная вероятность того, что эта точка попадет в ортотреугольник данного треугольника?

Ответы и решения.

7.1

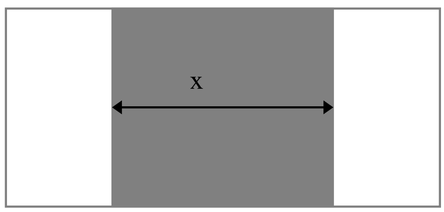
а)



$x \le 0 \Rightarrow P = 0; x \ge \frac{1}{2} \Rightarrow P = 1; 0 \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow P = \frac{1}{2}\left(2 - (1-2x)(2-2x)\right) = x(3-2x)$.

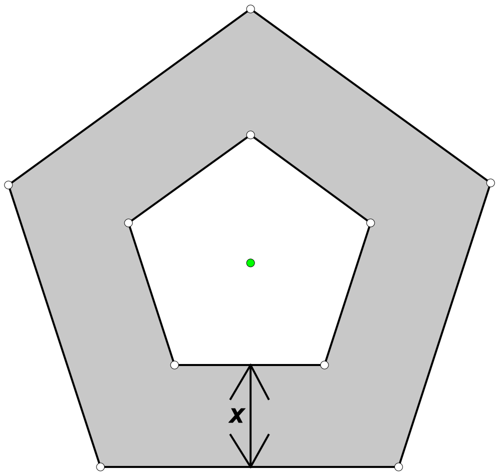
б)



$x \le 0 \Rightarrow P = 0; x \ge 2 \Rightarrow P = 1; 0 \le x \le 2 \Rightarrow P = \frac{2-2(2-x)}{2} = x - 1$

7.2

а) Пусть r - радиус вписанной окружности. Тогда $r = \frac{1}{2} actg \frac{\pi}{n}$.



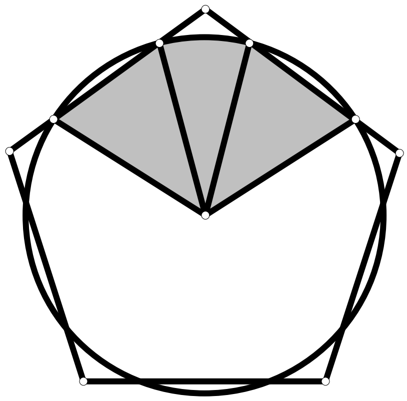
$x \le 0 \Rightarrow P = 0; x \ge r \Rightarrow P = 1;$

$0 \le x \le r \Rightarrow P = 1 - \left(\frac{r-x}{r}\right)^2 = \frac{x}{r}\left(2 - \frac{x}{r}\right)$ (следует из подобия многоугольников).

б) $r = \frac{1}{2} a ctg \frac{\pi}{n}; R = \frac{1}{2}\frac{a}{\sin\frac{\pi}{n}}; S = \frac{1}{4} n a^2 ctg \frac{\pi}{n}$.

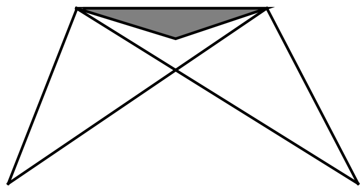
$x \le 0 \Rightarrow P = 0; x \ge R \Rightarrow P = 1; 0 \le x \le R \Rightarrow P = \frac{\pi x^2}{S}$.

Рисунок, соответствующий случаю $r \le x \le R$, изображен ниже:



$P = \frac{n\left(S_t + S_s\right)}{S}$, где $S_t = r\sqrt{x^2 - r^2}; S_s = \left(\frac{\pi}{n} - \arccos\frac{r}{x}\right)x^2$

7.3



$$P_n = \frac{n \cdot S'}{S}; S' = \tfrac{1}{2} ah, h = \tfrac{1}{2} a tg \tfrac{\pi}{2n} \Rightarrow P_n = tg \tfrac{\pi}{2n} \cdot tg \tfrac{\pi}{n}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_n}{\frac{\pi^2}{2n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{tg \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{tg \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

7.4

Введем декартову систему координат.

Задача сводится к равномерному распределению точки (x, y, z) в кубе с единичным ребром. Треугольник можно составить, если

$$\begin{cases} x + y > z \\ x + z > y \\ y + z > x \end{cases}$$ Эти условия задают вписанный в куб тетраэдр.

Его объем равен половине объема куба и потому $P = \frac{1}{2}$.

7.5

Пусть углы исходного треугольника $\alpha, \beta, \gamma.$ Тогда, используя подобие, получим, что

$$P = \frac{S - S\cos^2\alpha - S\cos^2\beta - S\cos^2\gamma}{S} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma.$$

Остается минимизировать $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$

Но в любом треугольнике выполняется соотношение

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 1 = 0$, так как

$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = -2\cos\gamma\cos(\alpha - \beta);$ а также

$\cos 2\gamma = -2\cos\gamma\cos(\alpha + \beta) - 1$. Отсюда следует, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \tfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1 + \cos 2\beta + 1 + \cos 2\gamma + 1) = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Обозначим $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ через t . Тогда, согласно неравенству Коши, $\frac{t}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2}$ или $\frac{t^3}{27} \geq \frac{1-2t+t^2}{4}$, т.е. t есть одно из решений неравенства $4x^3 - 27x^2 + 54x - 27 \geq 0,$ левая часть которого имеет рациональный корень 3 и легко раскладывается на множители: $4\left(x-\frac{3}{4}\right)\left(x-3\right)^2$. Значит, $t \geq \frac{3}{4}$, поэтому $P \leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$ причем $P_{\max} = \frac{1}{4}$ при $\lambda = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Глава восьмая

ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В этой, последней, главе нашей книги мы обсудим важные понятия *случайной величины* и двух главнейших ее характеристик: *математического ожидания* и *дисперсии*. Они возникли еще в работах основоположников теории вероятностей - известно, что и Ферма, и Паскаль и Гюйгенс фактически рассматривали случайные величины, принимающие конечное число значений и умели находить их математическое ожидание. Стоит отметить, что эти понятия настолько фундаментальны, что, как выяснилось уже в наше время, их можно положить в основу аксиоматики теории вероятностей (и уже с их помощью определять понятия вероятности события, а не наоборот, как это происходит в более общепринятой аксиоматике Колмогорова).

А вот какие ассоциации, оказывается, может вызвать словосочетание “*математическое ожидание*” у человека, не отягощенного бременем научного знания (фрагмент заимствован из книги А. и Б. Стругацких “Стажеры”):

... Он рассказал, что если бросать бутерброд, например, сто раз, то он может упасть маслом вверх не пятьдесят раз, а пятьдесят пять или двадцать и что только если бросать его очень долго и много, масло вверху окажется приблизительно в половине случаев. Я представлял себе этот несчастный бутерброд с маслом (и может быть, даже с икрой) после того, как его бросали тысячу раз на пол, пусть даже на не очень грязный, и спросил, что неужели действительно были люди, которые этим занимались. Он стал рассказывать, что для этих целей пользовались в основном не бутербродами, а монетой, как в игре в орлянку... Из этой первой лекции по теории вероятностей я запомнил только полузнакомый термин “математическое ожидание”. Незнакомец употреблял этот термин неоднократно, и каждый раз я представлял себе большое помещение, вроде зала ожидания, с кафельным полом, где сидят люди с

портфелями и бюварами и, подбрасывая время от времени к потолку монетки и бутерброды, чего-то сосредоточенно ожидают.

Понятие дискретной случайной величины.

Дискретной случайной величиной называется любое отображение $\xi : \Omega \to R$, где Ω - дискретное вероятностное пространство

Поскольку Ω - конечное или счетное множество, то ξ принимает не более чем счетное число значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, причем

$$\sum_k P(\xi = x_k) = \sum_k P\left(\xi^{-1}(x_k)\right) = \sum_k P(A_k) = P(\Omega) = 1$$

($A_k = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_k\}; A_i \cdot A_j = \varnothing i \neq j; \sum_k A_k = \Omega$)

Любая дискретная величина может быть задана таблицей ее распределения:

x_1	x_2	. . .	x_n	. . .
$P(\xi = x_1)$	$P(\xi = x_2)$	. . .	$P(\xi = x_n)$	. . .

где $\sum_k P(\xi = x_k) = 1$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Бросают две правильные кости. Если сумма выпавших очков не превосходит 4, игрок выигрывает 6 долларов; если сумма заключена в пределах от 5 до 8, то ничего не выигрывает; если же больше 8, то проигрывает 6 долларов.

Выигрыш игрока - случайная величина, распределенная следующим образом:

6	0	-6
$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

2. *Биномиальное распределение.*

$P(\xi = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n; p + q = 1$

3. *Геометрическое распределение* (или *распределение Фарри*).

$$P(\xi = k) = p \cdot q^k, k = 0,1,\ldots,n,\ldots; p + q = 1$$

4. *Обобщенное геометрическое распределение.*

$$P(\xi = a + k \cdot d) = p \cdot q^k, k = 0,1,\ldots,n,\ldots; p + q = 1$$

5. *Распределение Пуассона* (с параметром λ).

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, k = 0,1,\ldots,n,\ldots;$$

Проверьте, что во всех этих примерах $\sum_k P(\xi = k) = 1$.

Так, для распределения Пуассона имеем: $\sum_k P(\xi = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$.

Случайные величины можно *складывать и умножать*.

По определению, $(\xi_1 + \xi_2 + \Lambda + \xi_n)(\omega) = \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) + \Lambda + \xi_n(\omega)$;

$(\xi_1 \cdot \xi_2 \Lambda\, \xi_n)(\omega) = \xi_1(\omega) \cdot \xi_2(\omega) \Lambda\, \xi_n(\omega)$;

Например, если в опыте с подбрасыванием двух игральных костей ξ_1 - количество очков, выпавших на первой кости, а ξ_2 - на второй, то $\xi = \xi_1 + \xi_2$ - сумма выпавших очков. Если же ξ - количество успехов в схеме Бернулли, то $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где ξ_i - успех в i-ом испытании ($P(\xi_i = 1) = p; P(\xi_i = 0) = q$).

По аналогии с независимостью событий можно определить *независимость случайных величин*:

Случайные величины ξ и η независимы, если для всех их значений x_i, y_j выполняется соотношение $P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\xi = x$

(где $P(\xi = x_i; \eta = y_j) =$

$= P(A_{ij}), A_{ij} = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) = x_i; \eta(\omega) = y_j$)

Независимость n случайных величин в совокупности определяется подобно совокупной независимости группы событий (сформулируйте это определение самостоятельно). К примеру, успехи в отдельных испытаниях в схеме Бернулли - n независимых в совокупности случайных величин.

Математическое ожидание.

Если случайная величина ξ принимает значения $\{x_1,...,x_k,...\}$, то ее математическим ожиданием (или математическим

(если вторую сумму разбить на группы, содержащие одинаковые значения $\xi(\omega)$, а затем вынести их за скобки, то получится первая сумма).

Это определение совершенно естественно. Действительно, пусть случайная величина может принимать значения $x_1,...,x_m$ и пусть в n испытаниях число x_1 встретилось n_1 раз, ..., x_m - n_m раз. Тогда в среднем ξ принимает значение $\frac{x_1 \cdot n_1 + \Lambda\, x_m \cdot n_m}{n} = x_1 \cdot \frac{n_1}{n} + \Lambda\, x_m \cdot \frac{n_m}{n}, \frac{n_i}{n} \approx P(\xi = x_i)$ (и чем больше n, тем точнее эти равенства).

Иногда *математическое ожидание* называют *справедливой ценой игры.* Поясним происхождение этого названия на простом примере: бросается правильная кость. При выпадении 2 очков игрок выигрывает 6 долларов, в остальных случаях не выигрывает ничего. Вероятность выигрыша $\frac{1}{6}$, т.е. в среднем он выигрывает одну партию из шести, или 6 долларов за шесть партий или доллар за партию. Чтобы игра стала справедливой, он должен заплатить за каждую партию по доллару.

Перечислим основные свойства математического ожидания.

1. Пусть ξ - постоянная случайная величина, принимающая только одно значение c. Тогда $M\xi = c$.

2. Для любой случайной величины ξ и произвольного числа c

$M c \cdot \xi = c \cdot M\xi$

3. Для любых случайных величин $\xi_1,...,\xi_n$

$$M\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i$$

(математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий)

4. Если $\xi_1,...,\xi_n$ независимы в совокупности, то

$$M\left(\prod_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \prod_{i=1}^{n} M\xi_i$$

(математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий)

Первые два свойства совсем очевидны. Третье сразу вытекает из определения:

$$M\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i(\omega)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\omega\in\Omega}P(\omega)\cdot\xi(\omega)\right)==\sum_{i=1}^{n}M\xi_i .$$

Проверим выполнение четвертого свойства. Для простоты рассмотрим две независимые случайные величины, которые принимают по два значения (в общем случае метод доказательства такой же).

ξ :

x_1	x_2
$P(\xi = x_1) = t_1$	$P(\xi = x_2) = t_2$

η :

y_1	y_2
$P(\eta = y_1) = r_1$	$P(\eta = y_2) = r_2$

Составим таблицу распределения случайной величины $\xi\cdot\eta$. Полагая, что все числа вида $x_i\cdot y_j$ различны, и используя независимость, получим:

$P(\xi\eta = x_i y_j) = P(\xi = x_i; \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$

$\xi\cdot\eta$:

$x_1\cdot y_1$	$x_1\cdot y_2$	$x_2\cdot y_1$	$x_2\cdot y_2$
$t_1\cdot r_1$	$t_1\cdot r_2$	$t_2\cdot r_1$	$t_2\cdot r_2$

Поэтому $M\xi\eta = x_1 y_1 t_1 r_1 + x_1 y_2 t_1 r_2 + x_2 y_1 t_2 r_1 + x_2 y_2 t_2 r_2 =$
$= x_1 t_1 (y_1 r_1 + y_2 r_2) + x_2 t_2 (y_1 r_1 + y_2 r_2) = M\xi \cdot M\eta$

(Изменится ли что-нибудь в доказательстве, если, скажем, $x_1 y_1 = x_2 y_2$? Подумайте.)

Последние два свойства математического ожидания довольно часто помогают при решении задач, когда случайную величину удается представить в виде суммы или произведения более простых случайных величин. Так, чтобы найти среднее число очков при бросании двух игральных костей, достаточно сложить средние при бросании каждой кости по отдельности и немедленно получить 3,5+3,5=7.

Найдем математические ожидания случайных величин, рассмотренных в примерах предыдущего параграфа.

1. $M\xi = \frac{1}{6}\cdot 6 + \frac{5}{9}\cdot 0 + \frac{5}{18}\cdot(-6) = -\frac{2}{3}$.

(Заметим, что если случайная величина принимает только целые значения, математическое ожидание ее, конечно же, не обязано выражаться целым числом .)

2. Если воспользоваться непосредственно определением, то нужно подсчитать $\sum_{k=0}^{n} k \cdot C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ (см. упражнение 2.14 б)). Однако гораздо удобнее представить ξ в виде $\xi_1 + \ldots \xi_n$ (где ξ_i - успех в i-ом испытании, причем $M\xi_i = p$) и применить свойство 3 математического ожидания: $M\xi = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = n \cdot p$.

3. По определению, $M\xi = p \cdot q \cdot (1 + 2q + 3q^2 + \ldots)$. Сумма, стоящая в скобках, есть производная суммы $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots$
равной $\frac{1}{1-q}$ (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Значит,

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots = \left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Таким образом, $M\xi = \frac{p \cdot q}{p^2} = \frac{q}{p}$.

(Конечно, на самом деле следует обосновать правомерность почленного дифференцирования этой бесконечной суммы. Соответствующие теоремы доказываются в курсе математического анализа).

4. Эту случайную величину можно представить как $\eta = a + d \cdot \xi$, где ξ - величина из

предыдущего пункта. Используя правила 2 и 3, сразу получим, что $M\eta = a + d \cdot \dfrac{q}{p}$.

5. $M\xi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda}{1!} + 2e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^2}{2!} + 3e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^3}{3!} + \Lambda =$

$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(\sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^m}{m!} \right) = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda.$

Санкт-петербургский парадокс.

В начале 17 века Академия Наук в Санкт-Петербурге опубликовала статью Д. Бернулли. В статье рассматривалась задача, получившая впоследствии название *санкт-петербургского парадокса.* Вот ее формулировка:

Правильная монета бросается до появления первого герба. Если это событие происходит на k-ом броске, то игрок получает 2^k долларов. Каково математическое ожидание его выигрыша? Другими словами, сколько ему следует по справедливости заплатить за участие в игре?

Имеем случайную величину ξ с распределением $P\left(\xi = 2^k\right) = \dfrac{1}{2^k}, k = 1,2,...$ и тогда $M\xi = 1 + 1 + 1 + \Lambda = +\infty$.

Результат, если поразмыслить, довольно странный - он означает, что при любом вступительном взносе игрок всегда в среднем будет оставаться в выигрыше. С другой стороны, совершенно очевидно, что мало кто, будучи в здравом уме, отважился бы заплатить за участие в игре, скажем, долларов 100 (т.к. с вероятностью $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} +$ $+ \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$ выигрыш составит меньшую сумму).

Бертран предлагал такое объяснение: если играть миллиарды миллиардов лет подряд (он советовал для удобства сделать ставкой молекулы водорода - денег может и не хватить), то, в конце концов, игрок окажется в выигрыше, какова бы ни была стоимость игры. Можно, как указал Бюффон, исходить из предположения, что ресурсы банка ограничены: допустим, что в банке 10^6 долларов и игра кончается, если выигрыш превысит эту сумму. Т.к. $2^{19} < 10^6$ и $2^{20} > 10^6$, то

$M\xi = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \Lambda + \frac{1}{2^{19}} \cdot 2^{19} + \left(\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \Lambda\right) \cdot 10^6 \approx 19 + 1{,}90... < 21.$ Следовательно, при вступительном взносе в 21 доллар игра становится в некоторой степени выгодна банку.

Внезапное появление числа e.

В четвертой главе была разобрана задача о подарках, связанная с числом e. Вот еще один пример, в котором это число возникает совершенно неожиданно.

Выбираются наугад действительные числа из отрезка $[0;1]$, до тех пор, пока их сумма не превысит единицы. Чему равно среднее значение числа выбранных слагаемых?

Ответ: среднее значение равно e.

Попробуем разобраться, в чем здесь дело.

Выбор действительного числа из отрезка $[0;1]$ на i-ом шаге можно интерпретировать как равномерное распределение точки ξ_i в этом отрезке ($P(\xi_i \in A \subset [0;1] = \mu(A))$, где $\mu(A)$ - длина любого измеримого подмножества отрезка). Пусть η - число выбранных слагаемых, сумма которых превышает единицу *в первый раз*, т.е. при условии, что предыдущие суммы не превосходят 1. Случайная величина η принимает только натуральные значения. Воспользуемся тем, что для любой такой величины $M\eta = \sum_{k=1}^{\infty} P(\eta \geq k)$.

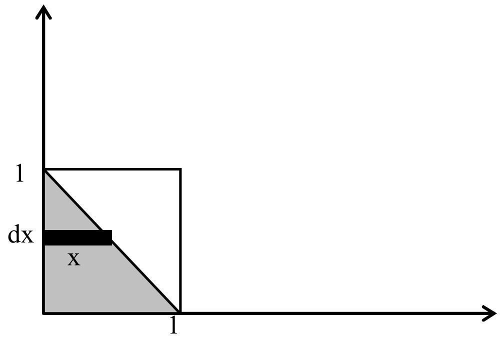
(Т.к. $\sum_{k=1}^{\infty} P(\eta \geq k) = P(\eta \geq 1) + P(\eta \geq 2) + P(\eta \geq 3) + \ldots = (P(\eta = 1) + P(\eta = 2) + P(\eta = 3) + \ldots) +$ $+(P(\eta = 2) + P(\eta = 3) + \ldots) + (P(\eta = 3) + \ldots) + \ldots = 1 \cdot P(\eta = 1) + 2 \cdot P(\eta = 2) + 3 \cdot P(\eta = 3) + \ldots = M\eta$).

Тогда

$$M\eta = P(\eta \geq 1) + P(\eta \geq 2) + P(\eta \geq 3) + P(\eta \geq 4) + \ldots =$$
$$1 + 1 + P(\eta > 2) + P(\eta > 3) + \ldots = 1 + 1 + P(\xi_1 + \xi_2 \leq 1) + \quad P(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq 1) + \ldots$$

Осталось заметить, что $P(\xi_1 + \ldots + \xi_k \leq 1) = \dfrac{1}{k!}$ (отсюда будет следовать, что $M\eta = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$). Проверим эти соотношения для $k = 2$ и $k = 3$ (для остальных значений их можно получить при помощи кратных интегралов).

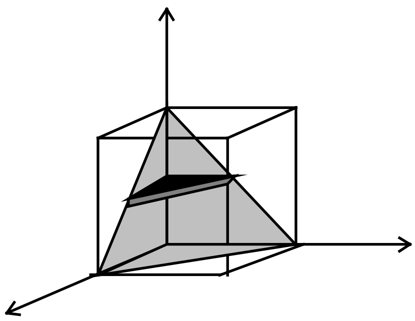
При $k = 2$ имеем равномерное распределение точки $(\xi_1; \xi_2)$ в единичном квадрате. Условию $\xi_2 \leq 1 - \xi_1$ отвечает треугольник, изображенный на рисунке:



Ясно, что его площадь равна $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$. Ее можно найти и более хитрым способом: как сумму площадей прямоугольников со сторонами x и dx , т.е

$$P(\xi_1+\xi_2\le 1)=\int_0^1 x dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}\ .$$

При $k=3$ рассмотрим равномерное распределение точки $(\xi_1;\xi_2;\xi_3)$ в единичном кубе. Условию $\xi_3\le 1-\xi_1-\xi_2$ отвечает тетраэдр, изображенный на рисунке:



Объем его равен $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{3!}$.

Это число можно также получить, просуммировав объемы треугольных призм с высотой dx и площадью основания $\frac{1}{2}x^2$:

$$P(\xi_1+\xi_2+\xi_3\le 1)=\int_0^1\frac{x^2}{2!}dx=\left.\frac{x^3}{3!}\right|_0^1=\frac{1}{3!}\,.$$

Выявленная закономерность распространяется и на другие значения k . При $k=4$

$$P(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\le 1)=\int_0^1\frac{x^3}{3!}dx=\left.\frac{x^4}{4!}\right|_0^1=\frac{1}{4!}\ \text{и т.д.}$$

Дисперсия.

Для дальнейшего изучения случайных величин важно научиться не только вычислять средние значения, но и отклонения от них. Возникает вопрос: какую характеристику удобно выбрать для меры разброса случайной величины?

Неудачной является попытка в качестве такой характеристики взять “среднее из отклонений от среднего значения”, т.е. $M(\xi - M\xi)$, поскольку оно всегда равно нулю. Значительно удачней рассмотреть $M|\xi - M\xi|$, но это выражение не слишком подходит для вычислений. Поэтому:

Основной характеристикой отклонения случайной величины от среднего значения является выражение

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 =$

Чем больше *дисперсия* (или *среднее квадратичное отклонение*), тем больше в среднем случайная величина отклоняется от среднего значения, и наоборот.

Сформулируем основные свойства дисперсии:

1. Если $\xi = const$, то $D\xi = 0$.

2. Для любой случайной величины ξ и произвольного числа c:

$$Dc\xi = c^2 D\xi$$

3. Для любой величины ξ и произвольных чисел a и d:

$$D(a + d\xi) = d^2 D\xi$$

4. Если $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - независимы в совокупности, то

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i$$

(для независимых величин дисперсия их суммы равна сумме дисперсий).

Все эти свойства легко выводятся из свойств математического ожидания и определения дисперсии. Например, докажем свойство 4 для $n = 2$:

$$D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - (M(\xi + \eta))^2 = M(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - (M\xi + M\eta)^2 = M\xi^2 + 2M\xi M\eta$$

(воспользовались независимостью) $+ M\eta^2 - (M\xi)^2 - (M\eta)^2 - 2M\xi M\eta = D\xi + D\eta$.

Вычислим дисперсии случайных величин, рассмотренных в примерах первого параграфа.

1. Величина ξ^2 принимает значения 36 и 0 соответственно с вероятностями $\frac{4}{9}$ и $\frac{5}{9}$.

Поэтому $M\xi^2 = 36 \cdot \frac{4}{9} = 16$. Так как $M\xi = -\frac{2}{3}$, то $D\xi = 16 - \frac{4}{9} = 15\frac{5}{9}$.

2. $\xi = \xi_1 + ... + \xi_n$ (где ξ_i - успех в i-ом испытании; $M\xi_i^{\,2} = p$).

$D\xi_i = p - p^2 = p \cdot q$. Используя независимость отдельных успехов, получим

$D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i = n \cdot p \cdot q$.

3. $M\xi^2 = 1^2 pq + 2^2 pq^2 + 3^2 pq^3 + ... = pq(1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + ...)$ Выражение в скобках есть производная от $q(1 + 2q + 3q^2 + ...)$. Сумма $(1 + 2q + 3q^2 + ...)$ была уже ранее вычислена

(см. второй параграф): она равна $\frac{1}{(1-q)^2}$. Тогда $1^2 + 2^2 q + 3^2 q^2 + ... =$

$$= \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)' = \frac{(1-q)^2 + 2(1-q)q}{(1-q)^4} = \frac{p + 2q}{p^3} .$$

$$D\xi = \frac{pq(p + 2q)}{p^3} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2} .$$

4. Согласно свойству 3 для дисперсий и предыдущему пункту,

$$D\eta = D(a + d\xi) = d^2 \frac{q}{p^2} .$$

5.

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda}{1!} + \frac{2 \cdot 2 \cdot e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} + \frac{3 \cdot 3 \cdot e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} + ... =$$

$$= e^{-\lambda}\lambda + \frac{(1+1)e^{-\lambda}\lambda^2}{1!} + \frac{(2+1)e^{-\lambda}\lambda^3}{2!} + ... = e^{-\lambda}\lambda\left(1 + \tfrac{\lambda}{1!} + \tfrac{\lambda^2}{2!} + ...\right) + + e^{-\lambda}\lambda^2\left(1 + \tfrac{\lambda}{1!} + \tfrac{\lambda^2}{2!} + ...\right) = \lambda + \lambda^2 .$$

$$D\xi = (\lambda + \lambda^2) - \lambda^2 = \lambda .$$

Неравенство Чебышева и закон больших чисел.

Докажем неравенство, открытое великим русским математиком Чебышевым:

Для любого положительного числа ε $\quad P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

(эквивалентная формулировка $P(|\xi - M\xi| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$).

Неравенство Чебышева является следствием простого утверждения:

Пусть имеется случайная величина ξ, принимающая только неотрицательные значения. Тогда для любого положительного числа ε $P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{M\xi}{\varepsilon}$ (или $P(\xi \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{M\xi}{\varepsilon^2}$).

Действительно, $M\xi = \sum_{\omega|\xi(\omega)\geq\varepsilon} P(\omega)\cdot\xi(\omega) + \sum_{\omega|\xi(\omega)<\varepsilon} P(\omega)\cdot\xi(\omega) \geq\ \geq \sum_{\omega|\xi(\omega)\geq\varepsilon} P(\omega)\cdot\xi(\omega)$ (так как все слагаемые неотрицательные)$\geq \varepsilon\cdot \sum_{\omega|\xi(\omega)\geq\varepsilon} \xi(\omega) = \varepsilon\cdot P(\xi\geq\varepsilon)$.

Для вывода неравенства Чебышева достаточно положить $\xi' = (\xi - M\xi)^2$ и $\varepsilon' = \varepsilon^2$. Тогда, по только что доказанному свойству, $P(\xi'\geq\varepsilon)\leq\frac{M\xi'}{\varepsilon'}$ или

$P\left((\xi-M\xi)^2\geq\varepsilon^2\right)\leq\ \frac{M(\xi-M\xi)^2}{\varepsilon^2}$ или $P\left(|\xi-M\xi|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.

Из неравенства Чебышева немедленно следует важная теорема, именуемая ***законом больших чисел***:

Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ - последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин (т.е. $M\xi_i = a$ и $D\xi_i = \sigma^2$ при всех натуральных значениях i).

Рассмотрим $\xi(n) = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_n}{n}$. Тогда для любого положительного числа ε

$P\left(|\xi(n)-a|\geq\varepsilon\right)\to 0$ при $n\to\infty$ (или, что равносильно, $P\left(|\xi(n)-a|\leq\varepsilon\right)\to 1$ при $n\to\infty$).

В самом деле, в соответствии с неравенством Чебышева,

$P\left(|\xi(n)-M\xi(n)\geq\varepsilon|\right)\leq\frac{D\xi(n)}{\varepsilon^2}$, но, с учетом одинаковой распределенности и независимости, $M\xi(n) = a; D\xi(n) = n\cdot\frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$.

Поэтому $P\left(|\xi(n)-a|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}\to 0$ при $n\to\infty$.

Применим закон больших чисел к схеме Бернулли:

$k(n)$ - количество успехов, тогда $k(n) = \xi_1+\ldots+\xi_n$, где ξ_i - успех в i-ом испытании и $M\xi_i = p; D\xi_i = p\cdot q$. Из закона больших чисел вытекает, что $P\left(\left|\frac{k(n)}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\to 0$ при $n\to\infty$ (или $P\left(\left|\frac{k(n)}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\to 1$ при $n\to\infty$).

Получили, что вероятность того, что отношение количества успехов ко всем испытаниям сколь угодно близко к p , стремится к единице с ростом n - в этом смысле *закон больших чисел для схемы Бернулли* **формализует** *частотный* (или *статистически*) подход к вероятностям.

Скажем несколько слов об одной типичной, но ложной трактовке закона больших чисел (т.н. *ошибка игрок*). Ярким примером этого заблуждения служит следующий отрывок из рассказа Э.По "Тайна Мари Роже":

... обычного читателя почти невозможно убедить, что при игре в кости двукратное выпадение шестерки делает почти невероятным выпадение ее в третий раз и дает все основания поставить против этого любую сумму. Заурядный интеллект не может этого воспринять, он не может усмотреть, каким образом два броска, принадлежащие уже прошлому, могут повлиять на бросок, существующий пока только в будущем.

В математических терминах утверждение Э.По (мы заменим, для пущей наглядности, кости монетой) звучит примерно так: из закона больших чисел следует, что при больших n вероятность того, что отношение количества выпавших гербов к количеству всех испытаний близко к $\frac{1}{2}$, велика; значит, велика вероятность, что отношение количества выпавших гербов к количеству решек близко к единице. Значит, велика вероятность, что гербов выпадет примерно столько же, сколько и решек, а тогда, если выпало подряд несколько гербов, то в следующих нескольких бросках следует ожидать преобладания решек, чтобы скомпенсировать разницу.

Вроде бы рассуждения безупречны, и остается предположить, что монеты каким-то образом помнят о прошлом - получается сплошная мистика и чертовщина, которыми, кстати сказать, пронизаны многие произведения мрачного американца. В чем же ошибка?

Оказывается, в том, что из того, что отношение двух последовательностей приближается к единице, еще не следует, что числитель приближается к знаменателю! (простой пример: $a_n = n; b_n = n-1; \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1,$ но $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 1 \neq 0$) Поэтому к единице сходится лишь вероятность того, что близким будут *логарифмы* числителя и знаменателя.

Упражнения.

8.1

Согласно статистическим данным, вероятность того, что 25-летний гражданин одной из благополучных европейских стран проживет еще один год, равна 0, 992 (поговаривают, что для многих т.н. *новых русских* эта вероятность, напротив, близка к нулю). Страховая компания предлагает такому человеку застраховать свою жизнь на год на сумму 1000 долларов. Страховой взнос равен 10 долларам. Какова ожидаемая прибыль компании?

8.2 *Приведенная случайная величина.*

ξ - произвольная случайная величина. $\xi' = \dfrac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}$ - т.н. *приведенная* случайная величина. Найти $M\xi'$ и $D\xi'$

8.3 *Усеченное геометрическое распределение*

n раз бросают неправильную монету с вероятностью успеха p в отдельном испытании. ξ - длина серии успехов, начиная с первого. Определить $M\xi$ и $D\xi$.

8.4 *Гипергеометрическое распределение*

а) Из урны, содержащей 7 шаров - 5 красных и 2 синих, выбираются случайным образом без возвращения 3 шара. Найти математическое ожидание числа синих шаров.

б) Из урны, содержащей n_1 красных и n_2 синих шара, выбирают случайным образом без возвращения k шаров. Найти математическое ожидание числа красных шаров (для этого попробуйте представить данную случайную величину в виде суммы более простых, математические ожидания которых легко находятся; вспомните *задачу об экзамене* из пятой главы).

8.5

Правильную монету бросают до появления первого герба. Определить среднюю продолжительность игры и среднее квадратичное отклонение.

8.6

В схеме Бернулли ξ - длина серии (все равно, из успехов или неудач), начавшейся при первом испытании. Определить $M\xi$ и $D\xi$.

8.7

Некий человек хочет открыть дверь, имея n ключей (из которых только один подходит к замку). По неизвестным причинам он пробует эти ключи независимо и случайно.[6]

---

[6] И, быть может, сквозь зубы выдавливает при этом что-нибудь вроде:

Перешагни, перескочи,
Перелети, пере-что хочешь –
Но вырвись: камнем из пращи,
Звездой, сорвавшейся в ночи…
Сам потерял – теперь ищи…
Бог знает, что себе бормочешь,
Ища пенсне или ключи.
(В.Ходасевич)

Найти математическое ожидание и дисперсию числа попыток, если:

а) уже испробованный ключ не устраняется из дальнейшего выбора;

б) устраняется

8.8 *Цепь Маркова*

В вершине A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится букашка, а в вершине C притаился паук. Букашка стартует из вершины A_1 и движется по ребрам куба со скоростью 1 ребро в минуту, на развилках выбирая дорогу с вероятностью $\frac{1}{3}$. Определить среднюю продолжительность жизни букашки и среднее квадратичное отклонение.

Ответы и решения.

8.1

$M\xi = 10 \cdot 0{,}992 - 990 \cdot 0{,}008 = 2$

8.2

$M\xi' = 0; D\xi' = 1$

8.3

$P(\xi = k) = q \cdot p^k$ при $k = 0,1,\ldots,n-1$ и $P(\xi = n) = p^n$. Подсчет ожидания и дисперсии аналогичен случаю геометрического распределения (разве что более утомителен). В результате получим

$M\xi = \dfrac{(1-p^n)\cdot p}{q}; D\xi = \dfrac{p-(2n+1)\cdot p^{n+1}\cdot q - p^{2n+2}}{q^2}$, что при $n \to \infty$ совпадает с ожиданием и дисперсией геометрического распределения.

8.4

а) $M\xi = \frac{C_5^3}{C_7^3}\cdot 0 + \frac{C_5^2\cdot C_2^1}{C_7^3}\cdot 1 + \frac{C_5^1}{C_7^3}\cdot 2 = \frac{6}{7}$.

б) $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, где $\xi_i = 1$, если на i-ом шаге вынут красный шар, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Согласно *задаче об экзаменах* (пример 2 главы 5) $P(\xi_i = 1) = \dfrac{n_1}{n_1 + n_2} = M\xi_i$.

Следовательно, $M\xi = \dfrac{k \cdot n_1}{n_1 + n_2}$.

8.5

$P(\xi = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k = 1,2,\ldots; M\xi = 2; \sqrt{D\xi} = \sqrt{2}$

8.6

$P(\xi = k) = p \cdot q^k + q \cdot p^k, k = 1,2,...; M\xi = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}; D\xi = \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2;$

8.7

а) $P(\xi = k+1) = p \cdot q^k; k = 0,1,...; p = \frac{1}{n}; q = \frac{n-1}{n}$.

$M\xi = 1 + \frac{n-1}{n} \cdot n = n; D\xi = \frac{n-1}{n} \cdot n^2 = (n-1) \cdot n$

б) $\xi = 1,2,...,n. P(\xi = 1) = \frac{1}{n}; P(\xi = 2) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n}$ и т.д.

$M\xi = \frac{1}{n} \cdot (1 + 2 + ... + n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$.

$D\xi = \frac{1}{n} \cdot (1^2 + 2^2 + ... + n^2) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}$ 8.8

Пусть ξ - продолжительность жизни букашки. Тогда с помощью индукции можно показать (это не очень просто), что $P(\xi = 2k+3) = p \cdot q^k; p = \frac{2}{9}; k = 0,1,2,...;$ Возникает обобщенное геометрическое распределение с известными параметрами, и потому $M\xi = 10;\ D\xi = 63;$

Заметим, что блуждания букашки полностью определяются четырьмя ее состояниями (за три шага до смерти, за два и т.д.), причем легко находятся вероятности перехода из одного состояния в другое. Это - типичный пример т.н. *цепи Маркова*, но обстоятельная беседа об этих вещах потребовала бы написания еще одной главы, если не книги.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борель Э. Вероятность и достоверность. М., Наука, 1969 г.
2. Виленкин И. Я. Комбинаторика. М., Наука, 1969 г.
3. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. М.,Наука,1981 г
4. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. М., Мир, 1971 г.
5. Гарднер М. А ну-ка, догадайся. М., Мир, 1984 г.
6. Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном. М., Знание, 1981 г.
7. Конягин С.В.,Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. Зарубежные математические олимпиады. М., Наука, 1987 г.
8. Кордемский Б.А. Математика изучает случайности. М., Просвещение, 1975 г.
9. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей, т.1. М., Наука, 1987 г.
10. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М., Мир, 1969 г.

11. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., И.Л., 1957 г.

12. Реньи А. Письма о вероятности. М., Мир, 1970 г.

13. Рыбников К.А. История математики. М., МГУ, 1994 г.

14. Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М., МГУ, 1987 г.

15. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М., Мир, 1990 г.

16. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П., Зубков А.М. Сборник задач по теории вероятностей. М., Наука, 1980 г.

17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения (Дискретные распределения). М., И.Л., 1952 г.

18. Хонсбергер Р. Математические изюминки. М., Наука, 1992 г.