Евгений Куланин, Алексей Мякишев

О некоторых кониках, связанных с треугольником

Москва
2007

1. Коники+треугольник: *Terra incognita ?* [1]
Три задачи.

Конические сечения (в просторечии – *коники*) были открыты, насколько это известно, еще в IV веке до н.э. древнегреческим математиком Менехмом (учеником самого Платона). Решая задачу об удвоении куба, Менехм рассматривал сечения конуса плоскостью, перпендикулярной его образующей. Затем весьма детальное (а в сущности, даже и полное) описание разнообразных свойств коник[2] дал знаменитый геометр Аполлоний Пергский (трактат из восьми книг «Конические сечения» был создан в конце III века до н.э.).
Без сомнения, в настоящее время каждый образованный человек, окончивший ВУЗ естественно-научного направления, хоть что-нибудь, хоть краем уха, а слышал о кониках. Кому-то повезло (впрочем, кому-то, может, и «повезло») повстречаться с ними еще в школе. Во всяком случае, в любом техническом ВУЗе свойства конических сечений обязательным порядком входят в стандартный курс аналитической геометрии.
Но вот что можно заметить: в институте ли, в школе – эти свойства изучаются обыкновенно в замкнутом, самодостаточном виде, как «вещь в себе» - рассказывается, разве что, о некоторых приложениях к задачам механики.
А между тем, многие сложные и содержательные утверждения *Геометрии Треугольника* тесно связаны с теми или иными кониками.[3] Зачастую, обозревая ландшафт треугольника с высоты соответствующего конического сечения, удается вскрыть самую *суть* проблемы, добраться, по словам поэта, «до оснований, до корней, до сердцевины».[4]
Отметим также, что возникающие здесь коники продолжают и развивают всевозможные *классические направления* в планиметрии, нередко взаимодействуя с такими, например, объектами, как *окружность Эйлера*, *прямая Валлиса – Симсона* и т.д. и т.п.
Конечно, эксперты[5] в области *Элементарной Геометрии* прекрасно осведомлены о всяческих замечательных свойствах этих коник - чего, увы, не скажешь об основной массе любителей[6].
В настоящей статье мы попытаемся ознакомить читателя с некоторыми кониками, связанными с треугольником и показать, как применяются они к решению задач. И с этой целью рассмотрим три утверждения (автором которых является Евгений Куланин):

1. Дан разносторонний треугольник. Докажите, что прямая, проходящая через точки Жергонна и Нагеля, параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда точка Фейербаха[7] лежит на медиане, проходящей через вершину, противоположную этой стороне.

---

[1] Имеется ввиду - условной планеты **Геометрия**.
[2] Легко представить себе тогдашнего школяра, изнемогшего в мучительных усилиях постичь эти самые свойства и в сердцах восклицающего: «Да кому это все нужно! Ведь никакой абсолютно связи с реальным миром!» Эта связь обнаружилась-таки без малого 20 столетий спустя, когда в начале XVII века Иоганн Кеплер открыл свои Законы. В частности, как выяснилось, все планеты при движении вокруг Солнца описывают эллипсы (Солнце располагается в одном из фокусов). Математический аппарат, описывающий эти явления, возник задолго до их открытия! (Разумеется, если придерживаться традиционного летоисчисления. Остроумные, но слегка болезненные фантазии, вроде того, что Аполлоний и Кеплер – одно и то же лицо, оставим Новым Хронологам и их адептам).
[3] Как правило, никак не фигурирующими в изначальной постановке задачи.
[4] Т.е. найти то самое доказательство из Книги, о которой любил говорить Пауль Эрдёш.
[5] А это сравнительно небольшой круг лиц.
[6] Наверное, почти каждый хороший школьный учитель принадлежит множеству любителей Элементарной Геометрии, хотя бы «по долгу службы».
[7] Если смысл какого-либо термина в условии этой и следующих задач непонятен – пугаться не следует! В следующем разделе будут даны соответствующие пояснения.

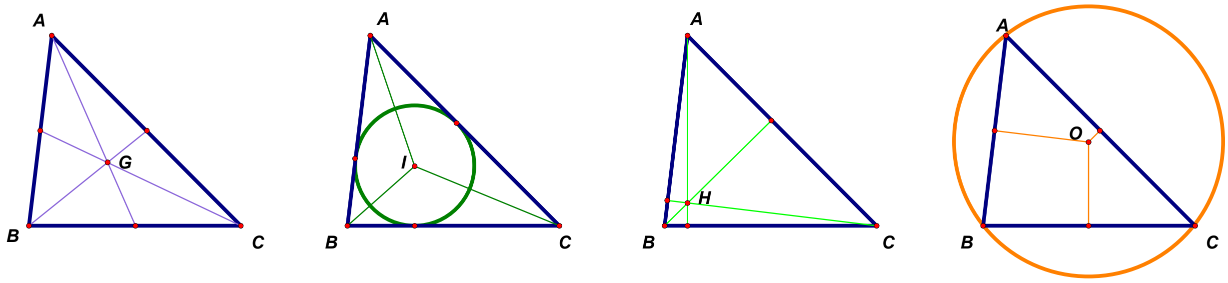
2. Дан разносторонний треугольник. Докажите, что прямая, проходящая через его центроид и точку Лемуана, параллельна одной из сторон треугольника тогда и только тогда, когда точка Штейнера лежит на медиане, проходящей через вершину, противоположную этой стороне.
3. Докажите, что гипербола Киперта касается описанного эллипса Штейнера тогда и только тогда, когда парабола Киперта касается вписанного эллипса Штейнера.

Прежде чем переходить к доказательствам, предлагаем совершить небольшое путешествие в *страну «треугольных» коник.*
Доказательство изложенных ниже фактов можно найти в [1],[2],[3],[5],[6],[8].
В первых трех работах упор делается именно на выявлении геометрического смысла происходящего, в то время как авторы трех остальных трудов (чрезвычайно богатых фактическим материалом) пользуются исключительно вычислениями. (*Барицентрические координаты* – о которых см. также [4] – могучий метод, посредством которого может быть доказана практически любая теорема геометрии треугольника. Жаль только - без малейшей геометрии, а чисто формальными выкладками).
Мы особенно рекомендуем книжку [1], где геометрия коник предстает во всей своей красе.

2. Некоторые сведенья из геометрии треугольника. Основные свойства «треугольных» коник.

2.1 Замечательные точки треугольника.

Строгого математического определения замечательной точки треугольника не существует. С интуитивной точки зрения, «степень замечательности» той или другой точки можно оценить дробью, в числителе которой – количество нетривиальных свойств, связанных с этой точкой, а в знаменателе – «сложность» ее построения[8].
Приведем некоторые примеры.
Первая четверка известна с незапамятных времен.
Точка пересечения медиан (*центроид)G,* точка пересечения биссектрис (центр *вписанной* окружности или *инцентр) I*, точка пересечения высот (*ортоцентр*) *H*, центр *описанной* окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника) *O*.

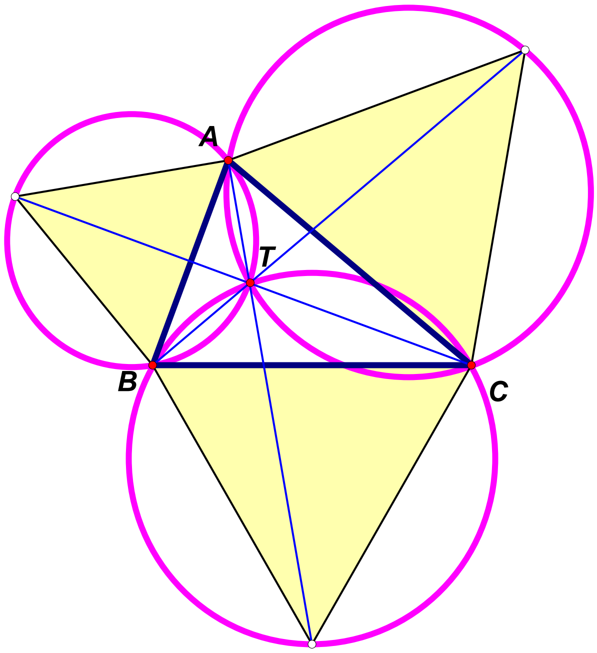


Пятой (согласно [5],[6]) была обнаружена т.н. *точка Ферма-Торричелли.*
Если построить на сторонах треугольника правильные треугольники *вовне*, то вершины этих треугольников образуют треугольник, *перспективный* исходному с перспектором *T*.
В этой же точке пересекаются все три окружности, описанные около правильных

---

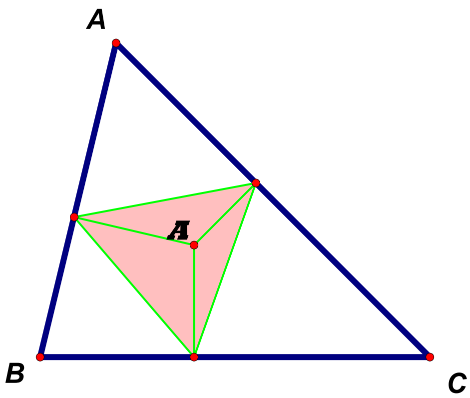
[8] Наподобие восточной мудрости « $Happiness = \dfrac{Production}{Desire}$ » (Jin Akiyama)

треугольников. Если T расположена внутри треугольника ABC (т.е. его углы не превосходят $\frac{2\pi}{3}$), то она минимизирует сумму расстояний до вершин.



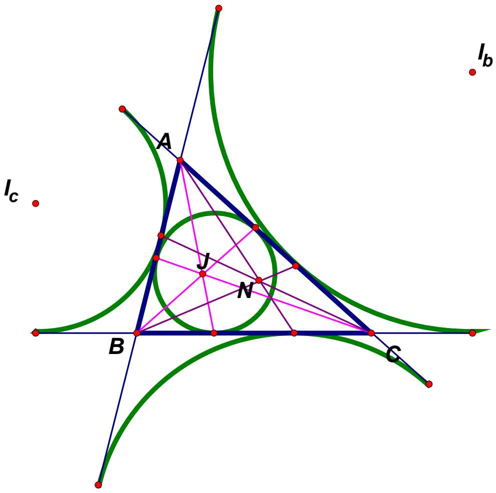
Дадим описание еще нескольких замечательных точек.

Точка Аполлония **A**– точка, *педальный* треугольник (образованный основаниями перпендикуляров, опущенной из данной точки на стороны треугольника или их продолжения) которой является правильным.

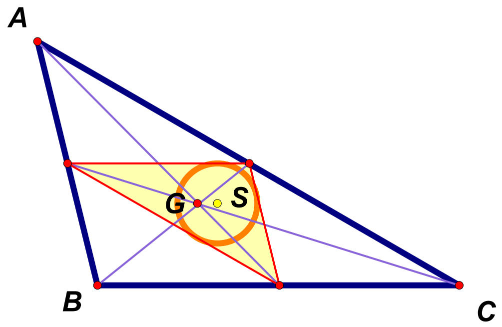


Точки Жергонна J и Нагеля N.

Треугольник, образованный точками касания вписанной (соответственно *вневписанных*) окружности перспективен исходному с перспектором в точке J (соответственно N).



Точка Шпикера S – центр окружности, вписанной в *серединный* треугольник (образованный серединами сторон).

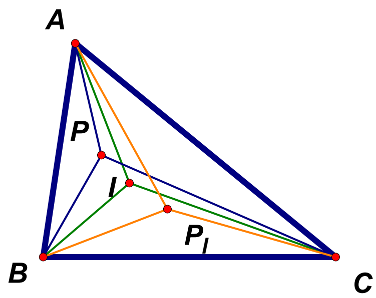


Является центром тяжести периметра треугольника (составленного из однородных стержней).

2.2 Изогональное и изотомическое сопряжения. Неподвижные точки.

Изогональное сопряжение.

Рассмотрим произвольную точку P в плоскости треугольника ABC и ее *чевианы* (т.е. тройку прямых, соединяющие вершины треугольника с этой точкой). Сделаем затем симметрию чевиан относительно соответствующих биссектрис. Тогда новая тройка прямых пересечется в точке P_I, называемой точкой, изогонально сопряженной точке P.



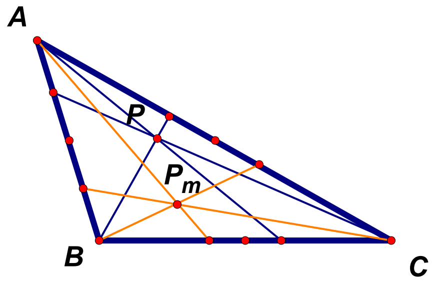
(Если точка P расположена на прямой, содержащей сторону треугольника, и отлична от вершины треугольника, то, руководствуясь соображениями непрерывности, следует считать, что она переходит в противолежащую вершину треугольника).

Таким образом, имеем отображение F_I плоскости на себя (однозначность нарушается для точек, расположенных на продолжении сторон исходного треугольника), такое что

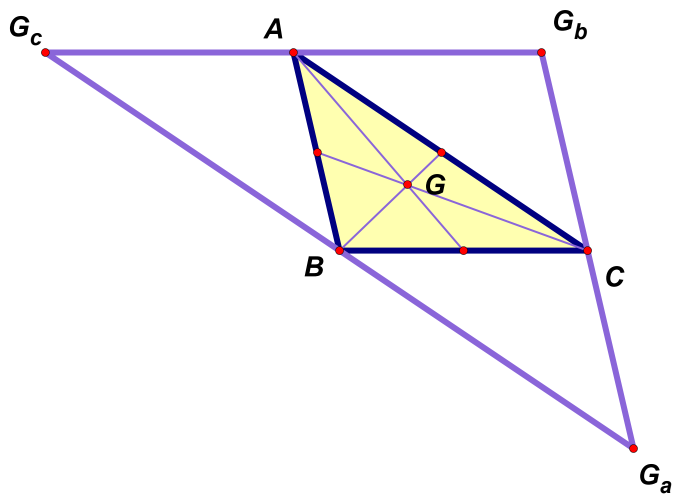
$F_l \circ F_l = E$ (тождественное преобразование). Очевидно, неподвижными точками этого отображения являются центр вписанной и центры трех вневписанных окружностей (I, I_a, I_b, I_c).

Изотомическое сопряжение.

Рассмотрим произвольную точку P в плоскости треугольника ABC и ее чевианы . Сделаем затем симметрию оснований чевиан относительно середин соответствующих сторон. Тогда новая тройка прямых пересечется в точке P_m, называемой точкой, изотомически сопряженной точке P.



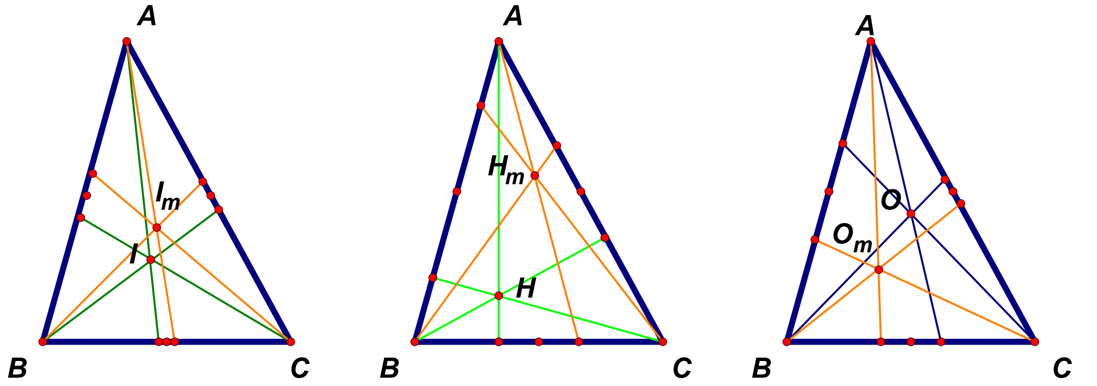
И здесь возникает отображение F_m плоскости на себя (однозначность также нарушается для точек, расположенных на продолжении сторон исходного треугольника), такое что $F_m \circ F_m = E$. Неподвижными точками являются центроид и вершины *антидополнительного* треугольника (образованного прямыми, проходящими через вершины исходного треугольника параллельно соответствующим сторонам) G, G_a, G_b, G_c.



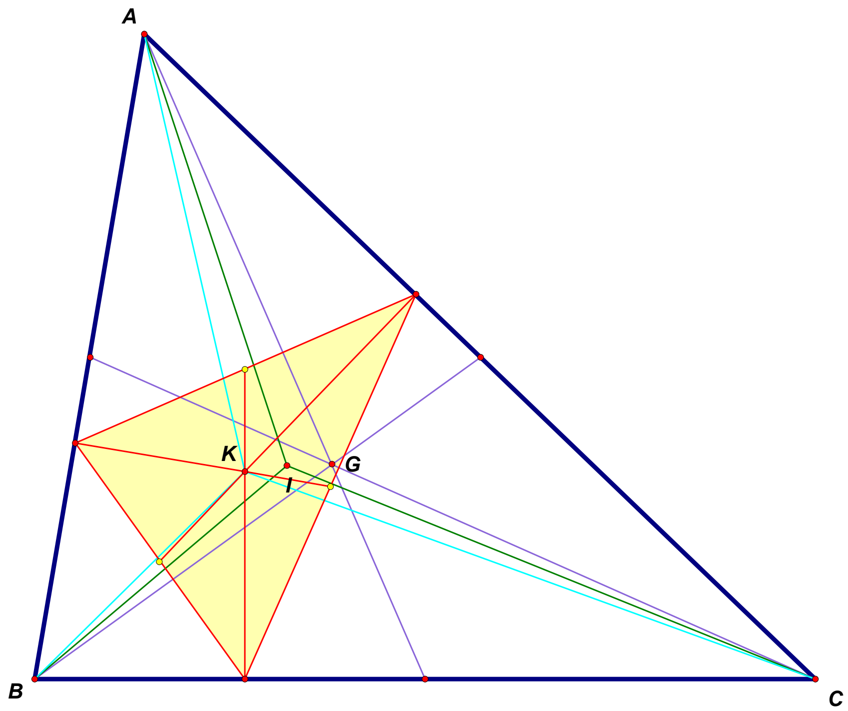
2.3 Еще несколько замечательных точек.

Можно заметить, что многие замечательные точки «ходят парами». Так, например, изогонально сопряженными являются пары H и O (ортоцентр и центр описанной окружности), T и $\mathbf{A}$ (точка Ферма-Торричелли и точка Аполлония). Точки J и N (Жергонна и Нагеля) сопряжены изотомически.

Рассматривая изогональные или изотомические сопряжения некоторых других точек, получим новые замечательные точки. Так появляются I_m (*антиинцентр* – точка, изотомически сопряженная к инцентру), H_m (*антиортоцентр* - изотомически сопряженная ортоцентру) и O_m (*антицентр описанной окружности* - изотомически сопряженная к O).



Точки G_l и N_l, изогонально сопряженные точкам Жергонна и Нагеля, совпадают с центрами гомотетий, переводящих описанную и вписанную окружности друг в друга. Точка *K*, изогонально сопряженная центроиду *G*, называется *точкой Лемуана*.

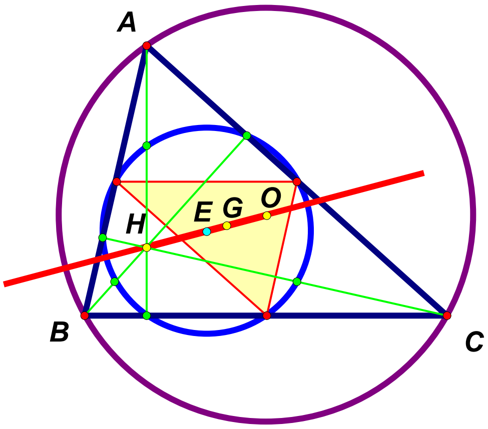


Это – единственная точка, являющаяся центроидом своего педального треугольника. Можно показать, что она минимизирует сумму квадратов расстояний до сторон треугольника.

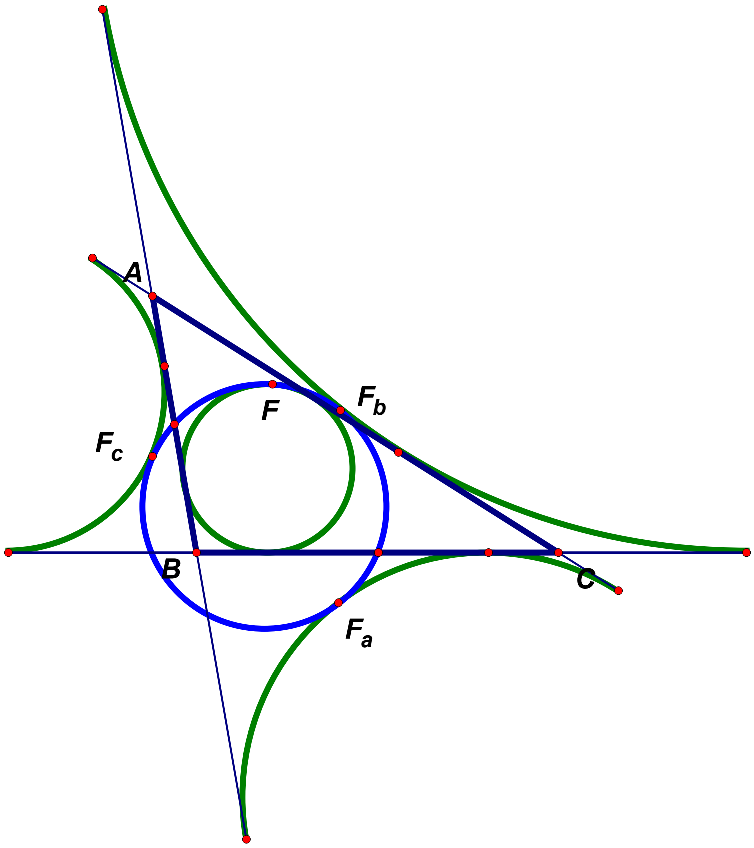
2.4 Прямая и окружность Эйлера. Теорема Фейербаха. Точки Фейербаха.

Справедлива следующая теорема:
Точки *H, G* и *O* расположены на одной прямой – т.н. *прямой Эйлера* (считаем треугольник неравносторонним – иначе все три точки совпадают), причем $\dfrac{HG}{GO}=\dfrac{2}{1}$.

На этой же прямой расположен *центр окружности Эйлера E* (или *окружности девяти точек*), причем точка *E* делит отрезок *OH* пополам. Окружность Эйлера содержит середины сторон треугольника, основания высот, а также середины отрезков, соединяющие ортоцентр с вершинами.



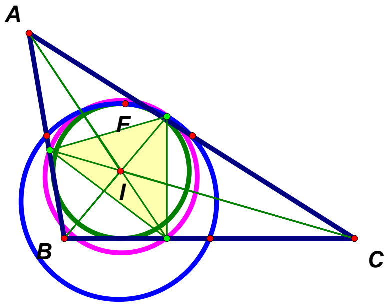
В 1822 году немецкий математик Карл Фейербах опубликовал одну из самых поразительных теорем геометрии треугольника:
Окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей (точки касания обозначают F, F_a, F_b, F_c соответственно, первую из них называют *точкой Фейербаха*, а остальные три – *добавочными точками Фейербаха*).
Исключительно геометрическое доказательство этой теоремы можно найти в статье Владимира Протасова «Вокруг теоремы Фейербаха» (в приложении к журналу «Квант» №1/98 – «Математический кружок. Геометрия»).



А в 2002 году в журнале «Математическое просвещение» (выпуск 6) была опубликована статья Льва и Татьяны Емельяновых «*Семейство Фейербаха»*[9]. Авторам удалось выявить

[9] Еще в 1952 году вышла книга, название которой отчасти перекликается с названием статьи Емельяновых, (но книга совсем о другом): Theodor Spoerri, *Genie und Krankheit: Eine psychopathologische Untersuchung der Familie Feuerbach*, S.Karger,Basel,!952. Несложно сообразить, что речь тут идет о вещах весьма печальных.

некий набор *чевианных треугольников, описанные окружности которых проходят через точку Фейербаха.* (Глубокая геометрия, стоящая за этим открытием, описана в [1] и [2]) В частности, через точку Фейербаха проходит окружность, описанная около оснований биссектрис.



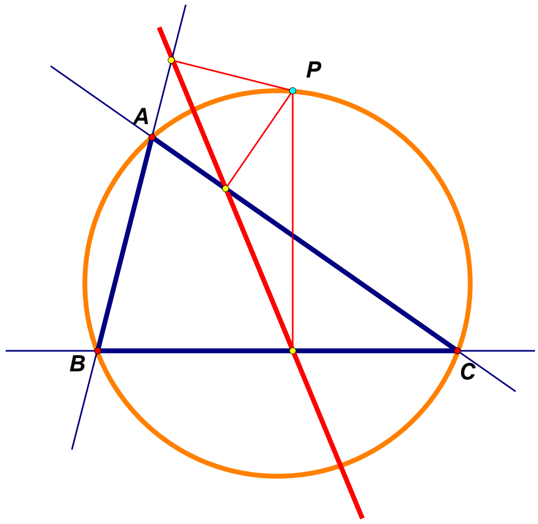
.

2.5 Еще несколько замечательных прямых.

Помимо прямой Эйлера существуют и многие другие, содержащие различные замечательные точки. Вот некоторые примеры:
Прямая Нагеля.
Точки *N, G* и *I* расположены на одной прямой (если исходный треугольник не является равносторонним – иначе все три точки совпадают), причем $\frac{NG}{GI} = \frac{2}{1}$.
На этой же прямой расположена точка Шпикера *S*, которая делит отрезок *NI* пополам.
Ось Брокара.
Прямая, которая содержит точки *O, K* и **A**.
Линия центров описанной и вписанной окружностей.
Прямая, проходящая через центры гомотетий G_l и N_l, переводящих описанную и вписанную окружности друг в друга. Естественно, содержит также точки *O* и *I*.
Прямая Жергонна.
На этой прямой расположены точки G, N, H_m, I_m
Прямая Лемуана.
Прямая, содержащая точки *K, G,* H_m , причем $\frac{H_m G}{GK} = \frac{2}{1}$

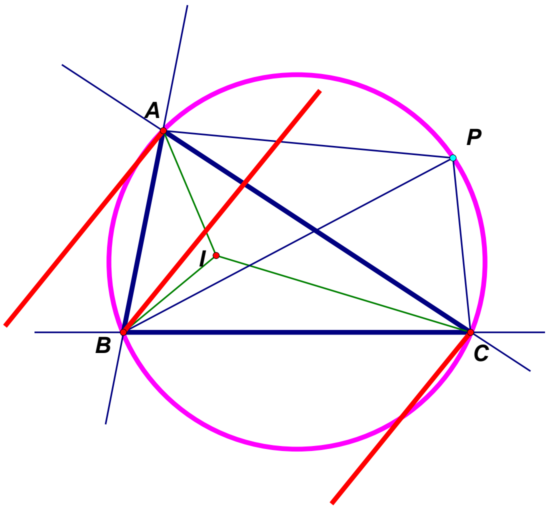
2.6 Прямая Валлиса – Симсона.

Педальный треугольник точки *P* вырождается в отрезок тогда и только тогда, когда точка *P* лежит на описанной около исходного треугольника окружности. Прямая, проходящая через основания перпендикуляров, называется прямой *Валлиса-Симсона.*



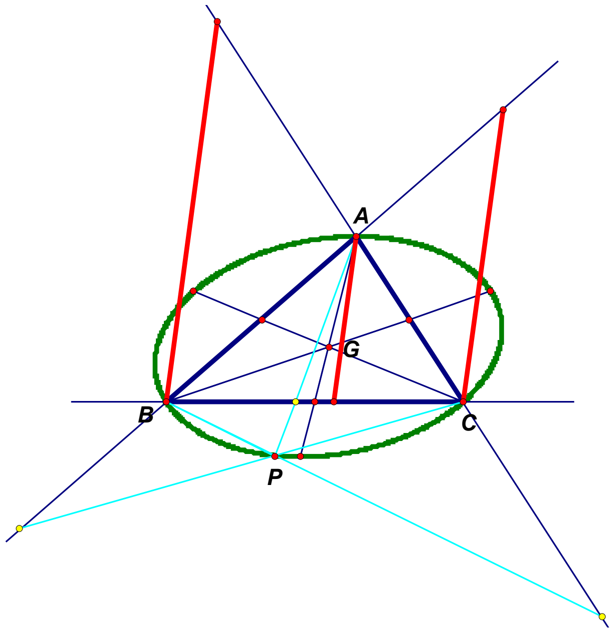
2.7 Бесконечно удаленные точки. Бесконечно удаленная прямая и сопряжения.

С точки зрения *проективной геометрии*, пучок параллельных прямых на обычной евклидовой плоскости пересекается в *бесконечно удаленной точке*. Все бесконечно удаленные точки образуют на проективной плоскости *бесконечно удаленную прямую.* Оказывается, изогональное сопряжение переводит в бесконечно удаленную прямую описанную окружность (и наоборот).



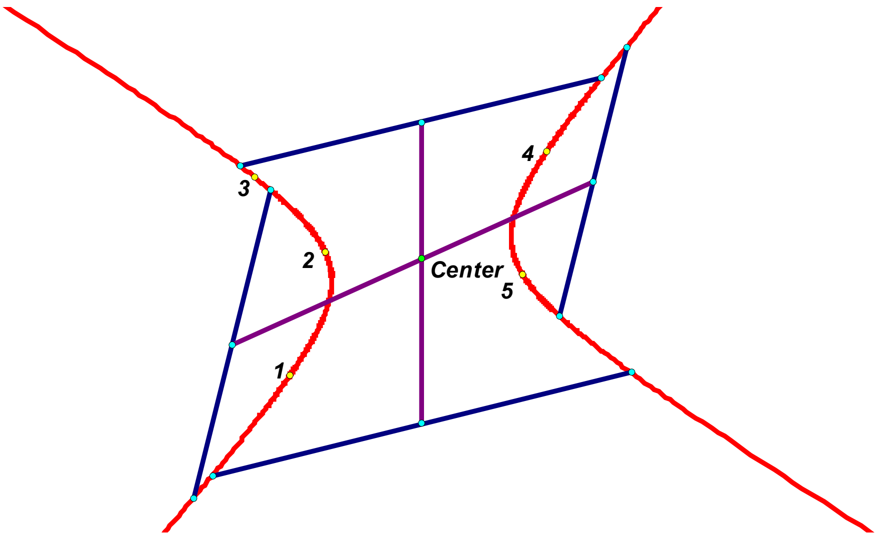
Изотомическое сопряжение переводит в бесконечно удаленную прямую *описанный эллипс Штейнера*[10]. Это – эллипс, описанный около исходного треугольника, с центром в точке пересечения медиан G и содержащий также точки, симметричные центроиду относительно середин соответствующих сторон.

[10] Подробнее о его свойствах – в пункте **2.10**



2.8 Некоторые общие свойства конических сечений.

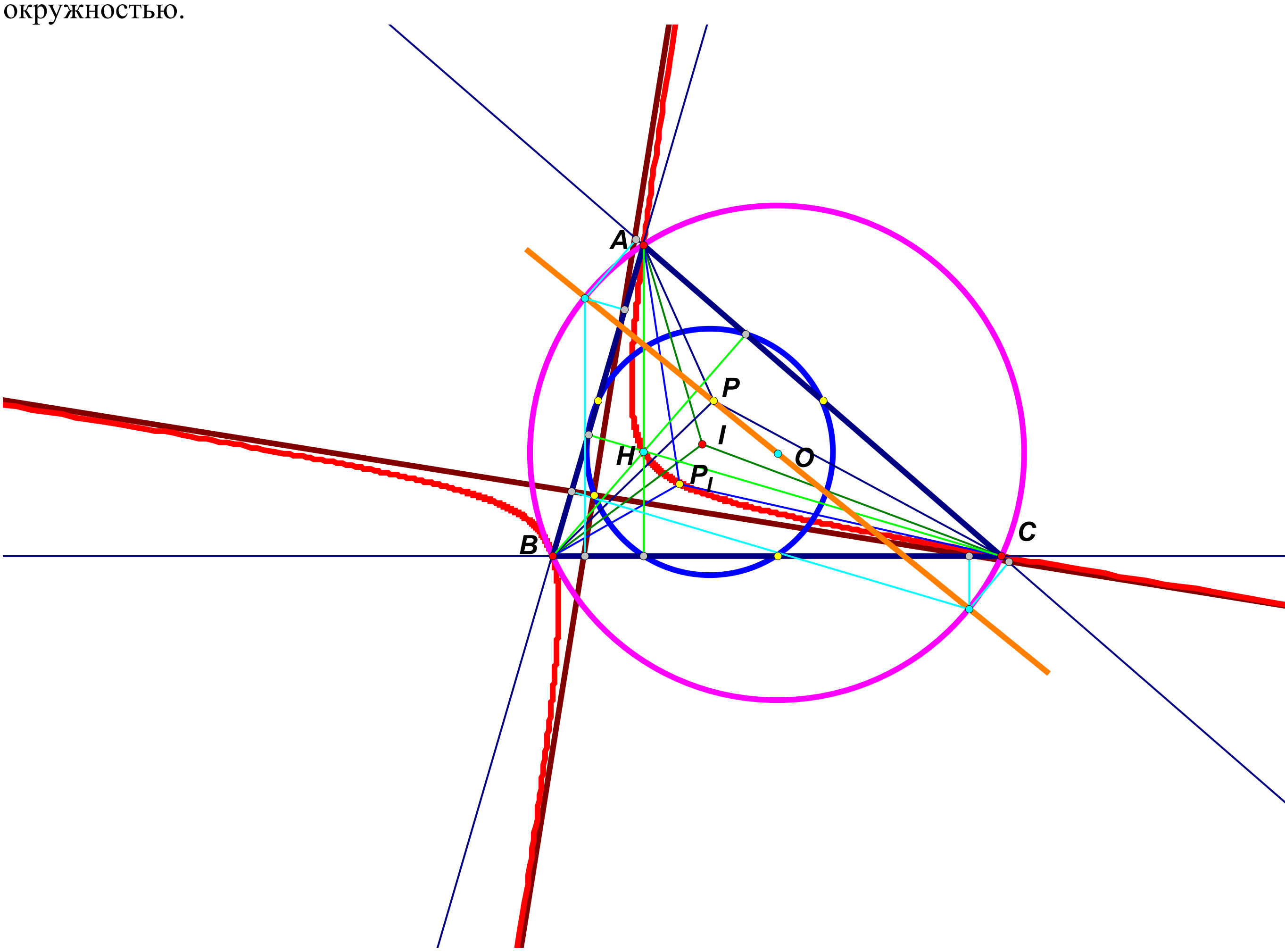
Все коники *проективно эквивалентны*, т.е. переводятся друг в друга подходящим проективным *преобразованием*.[11] При этом *гипербола* пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках, *парабола* ее касается*,* а *эллипс* не имеет с ней общих точек.
Любые *пять точек общего положения* (т.е. среди которых отсутствуют тройки *коллинеарных* точек) лежат на некоторой конике, однозначно определенной этими точками.
Двойственное к этому утверждение состоит в том, что *пять прямых общего положения* (т.е. среди них нет троек *конкурентных* прямых) однозначно задают конику, их касающуюся.
Эллипс и гипербола имеют *центр симметрии* (который в случае параболы удаляется в бесконечность – точку пересечения прямых, параллельных *оси* параболы). Любая прямая, соединяющая середины двух параллельных хорд коники, проходит через ее центр (в случае параболы имеем прямую, параллельную оси параболы), т.е. является *диаметром* коники.



[11] Проективное преобразование – преобразование, переводящее *на проективной плоскости прямые в прямые*.

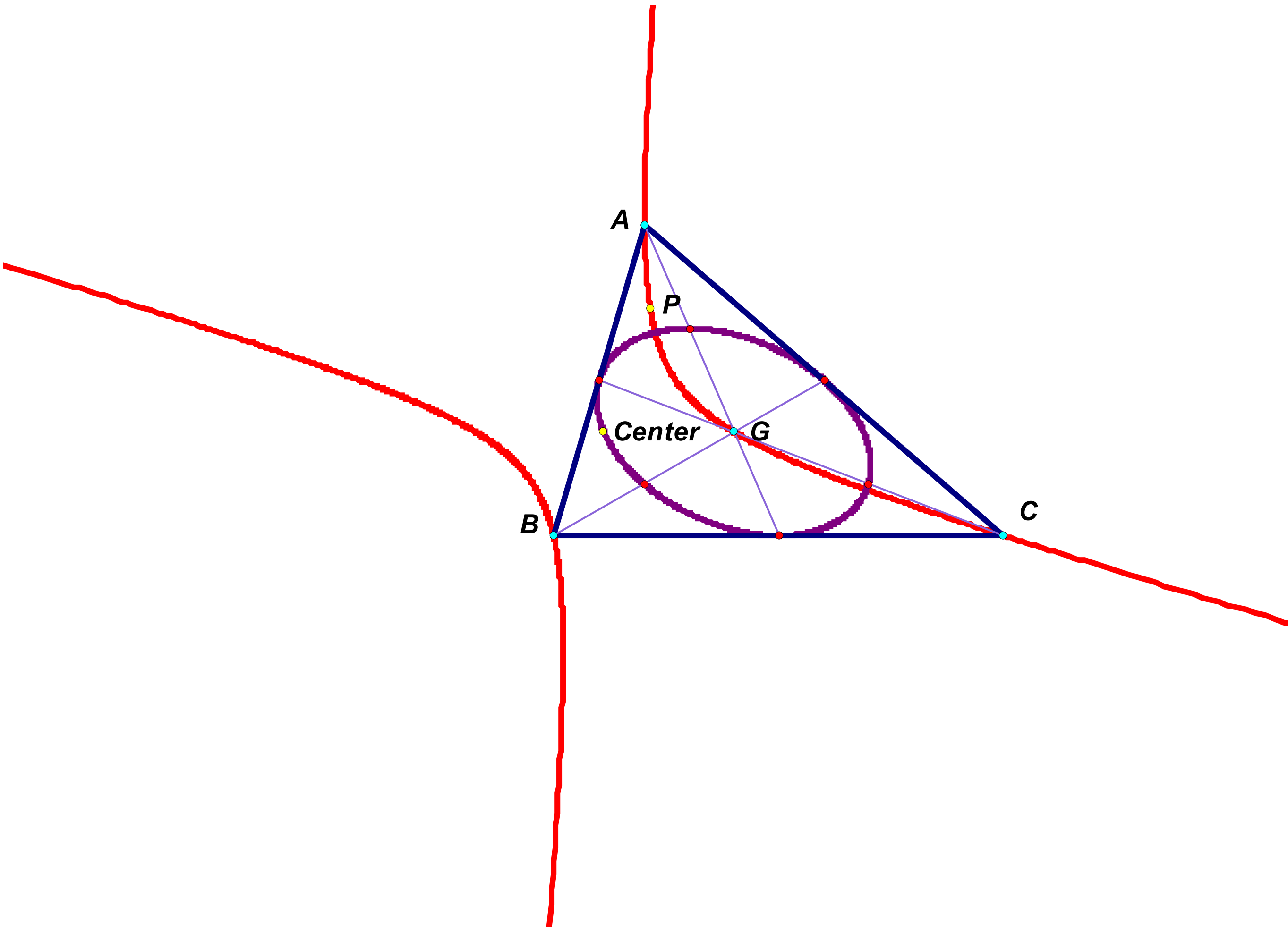
2.9 Коники, описанные около треугольники и вписанные в него.

Коника, содержащая вершины треугольника *ABC*, называется *описанной* около этого треугольника.
Каждая такая коника может быть получена как *изогональный* (или *изотомический*) образ некоторой *прямой*. При этом возникают гипербола, парабола или эллипс в зависимости от количества точек пересечения прямой (соответственно 2,1 или 0) с *описанной около треугольника окружностью* (а в случае изотомического сопряжения нужно рассмотреть *описанный эллипс Штейнера*).
Гипербола, описанная около треугольника, является *равносторонней* (т.е. имеет *перпендикулярные асимптоты*) тогда и только тогда, когда на гиперболе лежит *ортоцентр* треугольника *H*. *Центр* такой гиперболы расположен на *окружности Эйлера*, асимптоты же совпадают с *прямыми Валлиса-Симсона* диаметрально противоположных точек, образованных пересечением изогонального образа гиперболы с описанной окружностью.

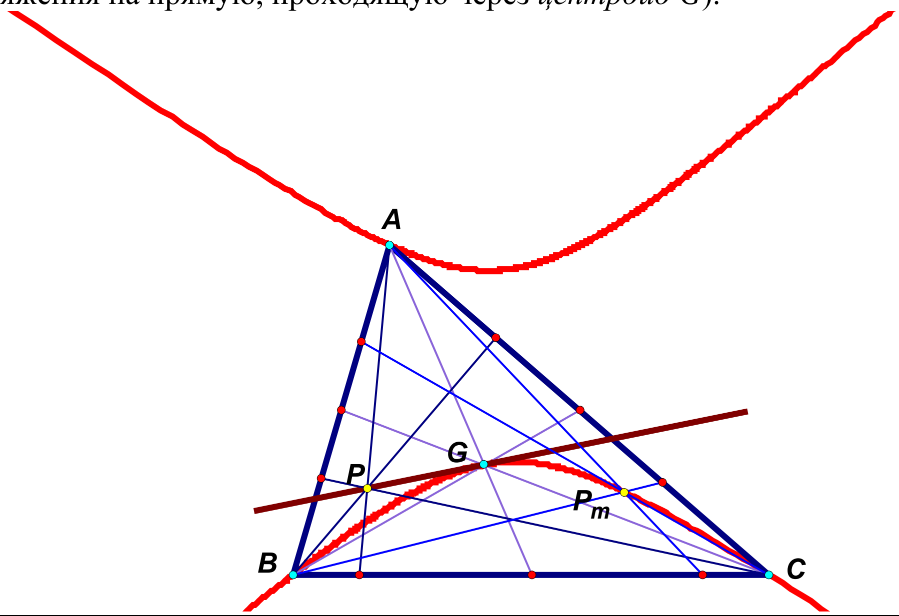


Центр описанной гиперболы, проходящей через *центроид G*, всегда расположен на *вписанном эллипсе Штейнера*[12] (это – *вписанный* в треугольник эллипс, касающийся его сторон в серединах и с центром в *G*).

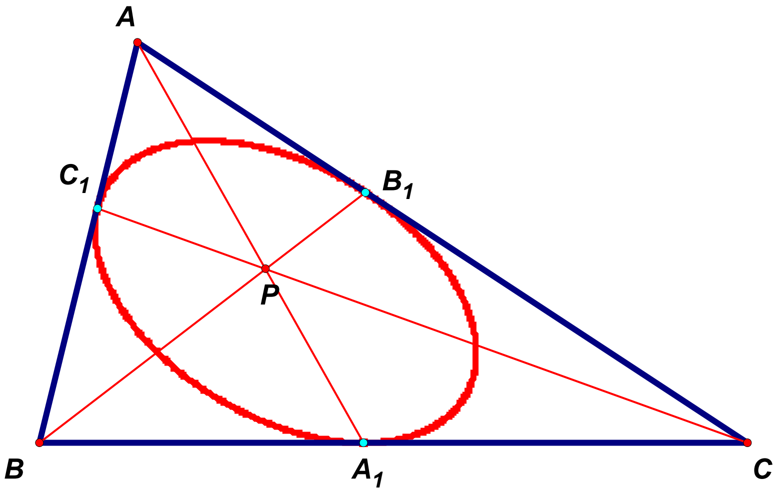
[12] О котором далее – см. пункт **2.10**



Наконец, если описанная коника получена соответствующим сопряжением из некоторой прямой, содержащей его *неподвижную точку*, то эта прямая будет *касаться* коники в неподвижной точке (на рисунке изображена коника, полученная под действием изотомического сопряжения на прямую, проходящую через *центроид* G).



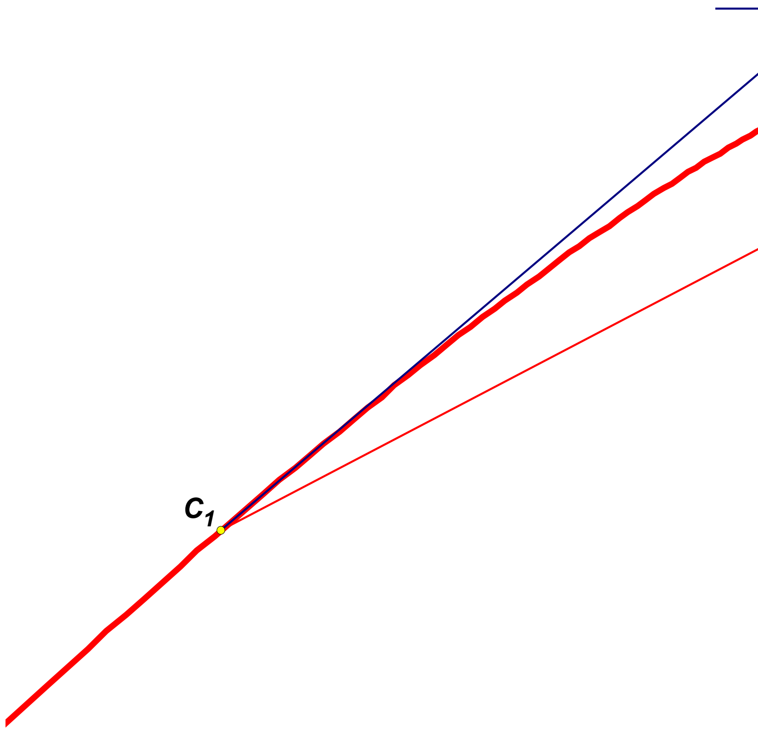
Коника, *касающаяся прямых, содержащих стороны треугольника*, называется *вписанной*.



13

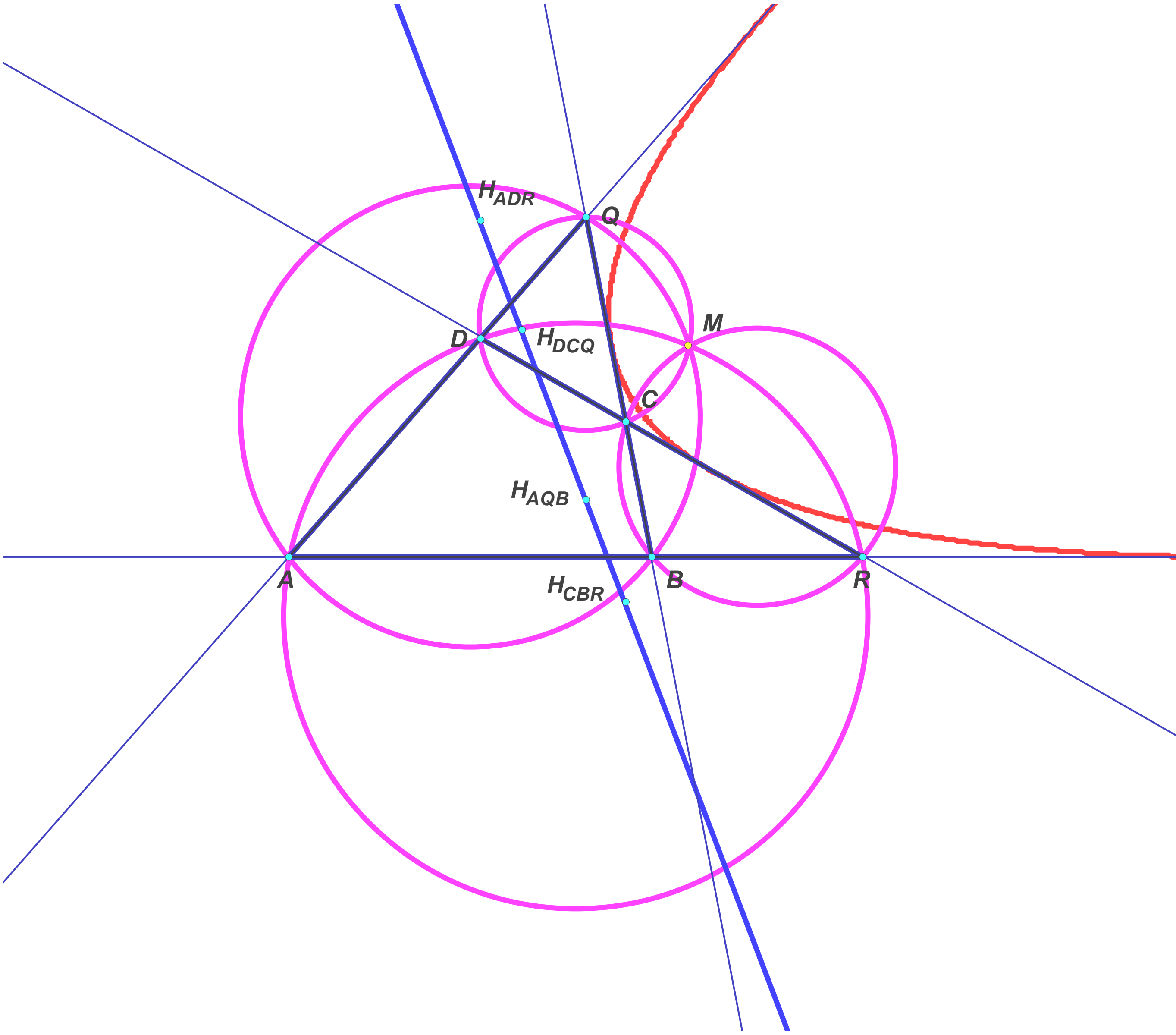
Треугольник, образованный точками касания, всегда будет *перспективен* исходному. Полученную точку именуют *перспектором вписанной коники*.[13]

Перспектор вписанной параболы расположен на *описанном эллипсе Штейнера.*



Директриса вписанной параболы всегда проходит через *ортоцентр H* треугольника, а ее *фокус* лежит на *описанной* около треугольника *окружности*.
Отсюда вытекает прямо-таки *концептуальное* доказательство двух красивых фактов, связанных с *полным четырехсторонником*:
Пусть имеются четыре прямые общего положения, образующие четыре треугольника. Оказывается, их *ортоцентры* лежат на одной прямой (т.н. *прямая Штейнера-Обера* полного четырехсторонника), а описанные около этих треугольников окружности пересекаются в одной точке (т.н. *точка Микеля* полного четырехсторонника).

[13] Поскольку подходящим проективным преобразованием любую *конику* можно перевести в *окружность*, перспектор действительно существует и является проективным образом *точки Жергонна* некоторого треугольника.



В самом деле, обязательно должна найтись *парабола*[14], касающаяся всех четырех прямых (ибо *пятой* прямой, которой касается парабола, будет *бесконечно удаленная прямая*). Таким образом, эта парабола будет вписана во все четыре треугольника, а значит, их ортоцентры лежат на директрисе, а описанные окружности проходят через фокус.

2.10. Пять замечательных коник треугольника.

Ниже мы перечислим пять *именных* коник (названных в честь некоторых выдающихся геометров) и перечислим их основные свойства.

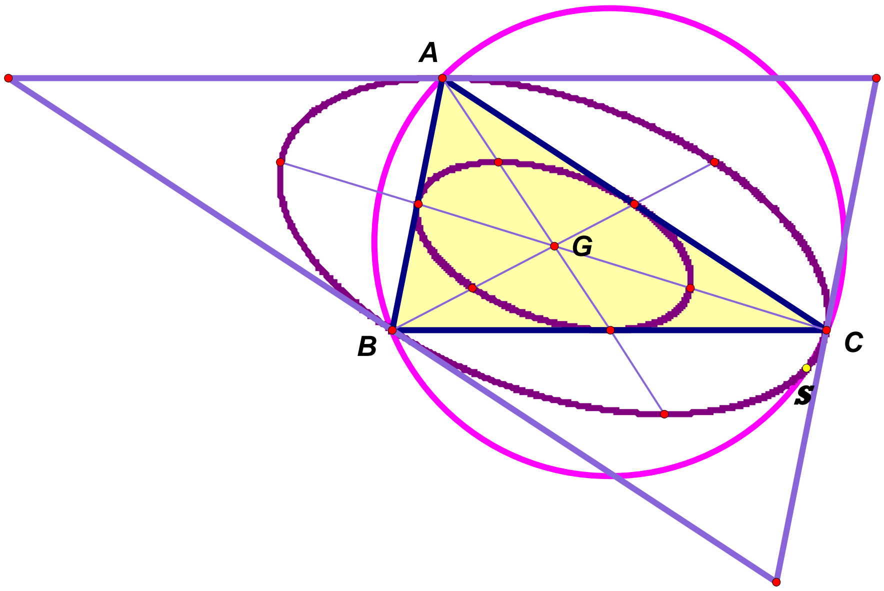
Описанный и вписанный эллипсы Штейнера. Точка Штейнера **S**.

Определения этих коник были уже даны ранее (см. **2.7** и **2.9**). Они эквивалентны тому, что описанный и вписанный эллипсы Штейнера есть *аффинные* [15]образы, соответственно, описанной около некоторого *правильного* треугольника окружности, и вписанной в него.

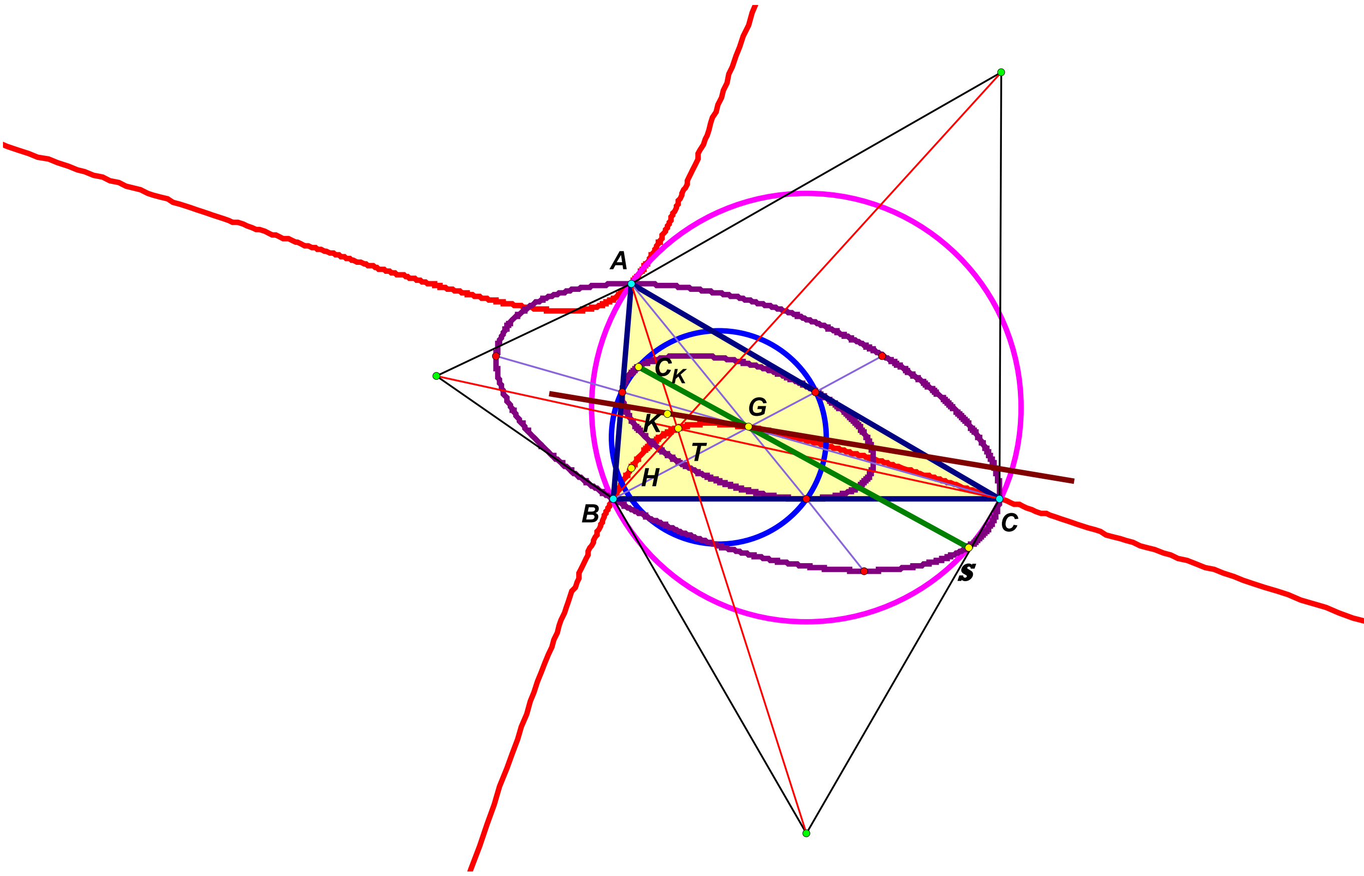
[14] Вот где *коника* зарыта!

[15] Аффинное преобразование можно определить как преобразование обычной плоскости, переводящее прямые в прямые. Будучи расширенным до проективного, оно отображает бесконечно удаленную прямую на себя.

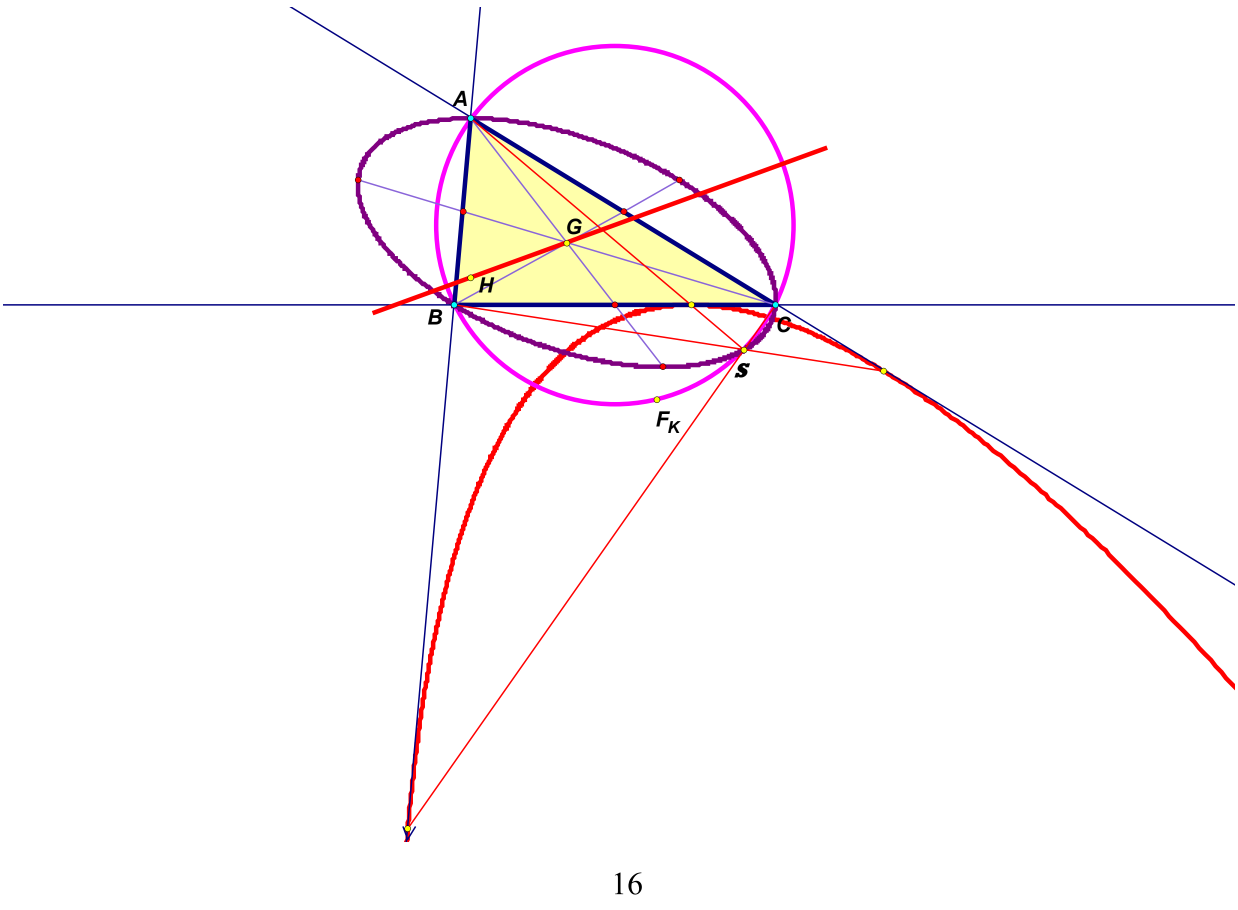
Гомотетия с центром в точке пересечения медиан G и коэффициентом -2 переводит вписанный эллипс Штейнера в описанный (между прочим, та самая гомотетия, которая переводит окружность Эйлера в описанную окружность).
Стороны антидополнительного треугольника касаются описанного эллипса в вершинах исходного треугольника.
Точкой Штейнера **S** называют *четвертую точку пересечения описанной окружности и описанного эллипса Штейнера.*



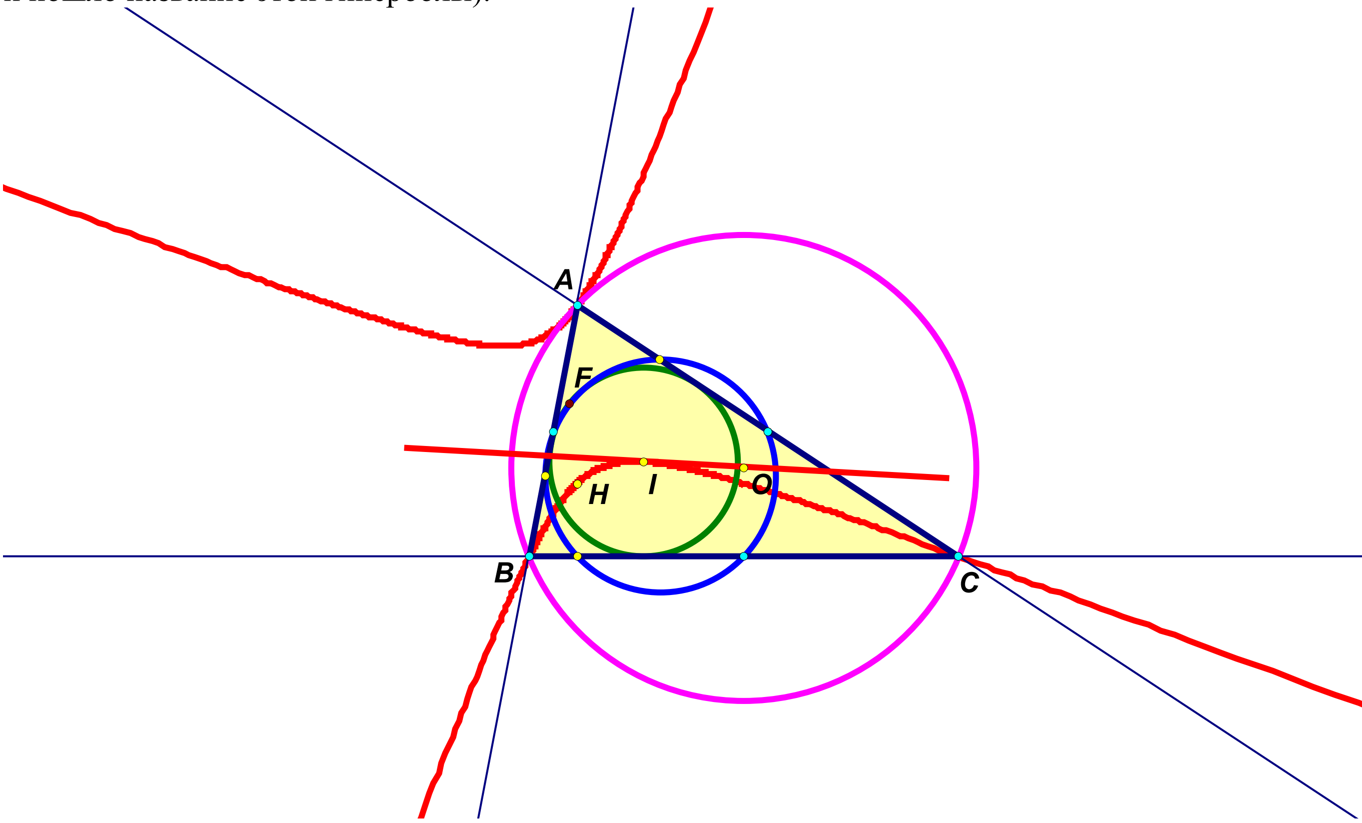
Еще отметим, что среди всех описанных и вписанных эллипсов эллипсы Штейнера имеют, соответственно, *наименьшую* и *наибольшую площади.*
Гипербола Киперта.
Это описанная около треугольника равносторонняя гипербола, проходящая через центроид G и ортоцентр H. Ее можно получить как изогональный образ *оси Брокара* или изотомический образ *прямой Лемуана* (см. **2.5**), причем последняя касается гиперболы в центроиде (см. **2.9**). Гипербола Киперта может также быть получена как множество перспекторов исходного треугольника и треугольников, составленных из вершин *равнобедренных треугольников, построенных на сторонах данного,* с одним и тем же углом при основании (причем вершины одновременно откладываются или вовне или вовнутрь). Поэтому на гиперболе Киперта лежит, например, точка Ферма-Торричелли T, а центроид и ортоцентр соответствуют двум предельным случаям – когда углы при основании равны, соответственно, 0 и $\dfrac{\pi}{2}$.
Согласно результатам, изложенным в **2.9**, *центр гиперболы Киперта* C_K лежит на *четвертой точке пересечения окружности Эйлера и вписанного эллипса Штейнера,* а значит, при гомотетии с центром в G, и коэффициентом -2 переходит в точку Штейнера **S**. Т.е., точки **S**, G, C_K *коллинеарны*, причем $\dfrac{SG}{GC_K} = \dfrac{2}{1}$.



Парабола Киперта.
Это – *вписанная* в треугольник парабола, *директриса* которой совпадает с *прямой Эйлера*. Ее *перспектор* совпадает с точкой Штейнера $\mathbf{S}$. Можно также показать, что фокус параболы Киперта (расположенный на описанной окружности), получается в результате композиции $F_l \circ F_m(\mathbf{S})$.

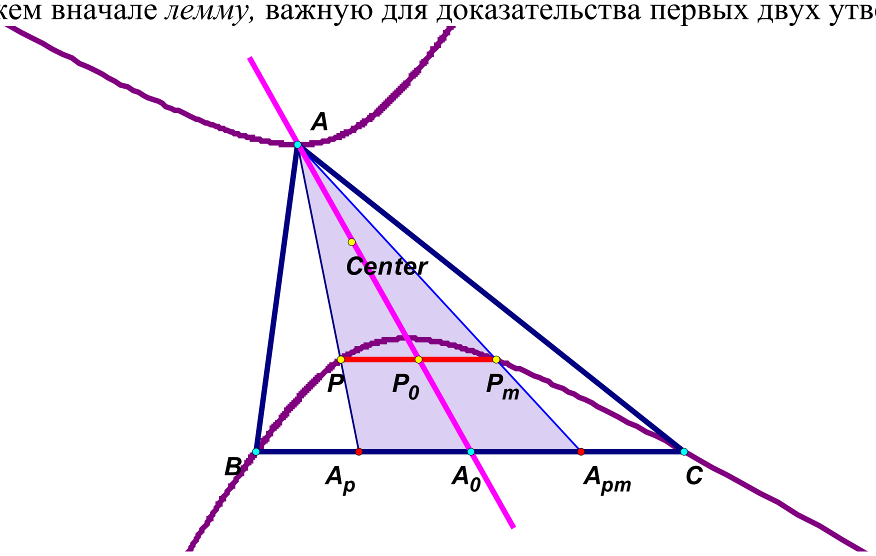


Гипербола Фейербаха.
Это описанная около треугольника равносторонняя гипербола, проходящая через инцентр I и ортоцентр H. Ее можно получить как изогональный образ *прямой OI* (и эта прямая касается гиперболы в инцентре) или изотомический образ *прямой Жергонна* (см. **2.5**), а потому на ней расположены точки Жергонна J и Нагеля N.
Центром гиперболы Фейербаха является, натурально, самая *точка Фейербаха F* (отсюда и пошло название этой гиперболы).



3. Решение задач

Все теперь готово, чтобы обсудить три задачи, сформулированные в пункте **1**.
Докажем вначале *лемму,* важную для доказательства первых двух утверждений.



Лемма:

Пусть P и P_m - изотомически сопряженные точки относительно треугольника ABC. Тогда прямая PP_m параллельна прямой BC если и только если центр коники, описанной около ABC и проходящей через P и P_m лежит на медиане AA_0.

Доказательство:

Согласно **2.8**, конику через пять точек провести можно. Предположим, что прямая PP_m параллельна прямой BC. Тогда, поскольку P и P_m - изотомически сопряжены, середина отрезка BC, точка A_0 будет также и серединой отрезка $A_P A_{P_m}$ с концами в основаниях соответствующих чевиан (т.к. основания чевиан симметричны относительно A_0). Поэтому медиана AA_0 будет пересекать отрезок PP_m в его середине P_0. Итак, A_0 и P_0 - середины параллельных хорд коники. Значит (см. **2.8**), медиана AA_0, содержащая точку P_0, также будет проходить и через центр коники (в случае параболы – параллельно ее оси).

В обратную сторону доказательство аналогично.

□

Вернувшись теперь к первым двум задачам, заметим, что в случае *равнобедренного* треугольника (к примеру, если $AB = AC$) прямые JN и GK совпадут с серединным перпендикуляром к BC, и никакой речи о параллельности идти не может.

Решение первой задачи.

Точки J и N изотомически сопряжены (см.**2.2**, **2.3**). Описанная коника, проходящая через эти точки, является *гиперболой Фейербаха*, центр которой и есть *точка Фейербаха* (согласно **2.10**). Осталось только воспользоваться *леммой*.

□

Решение второй задачи.

Пусть прямая GK параллельна стороне BC. На сей раз рассмотрим *гиперболу Киперта*. Согласно **2.10**, прямая *GK касается* гиперболы в центроиде G. И снова применим нашу *лемму* (в данном случае P совпадает с P_m и совпадает с G). Тогда получим, что GK параллельна $BC \Leftrightarrow$ центр гиперболы Киперта C_K лежит на медиане AA_0 (конечно, содержащей и точку G). Однако (см. **2.10**) точки **S**, G, C_K *коллинеарны*. Отсюда и вытекает справедливость нашего утверждения.

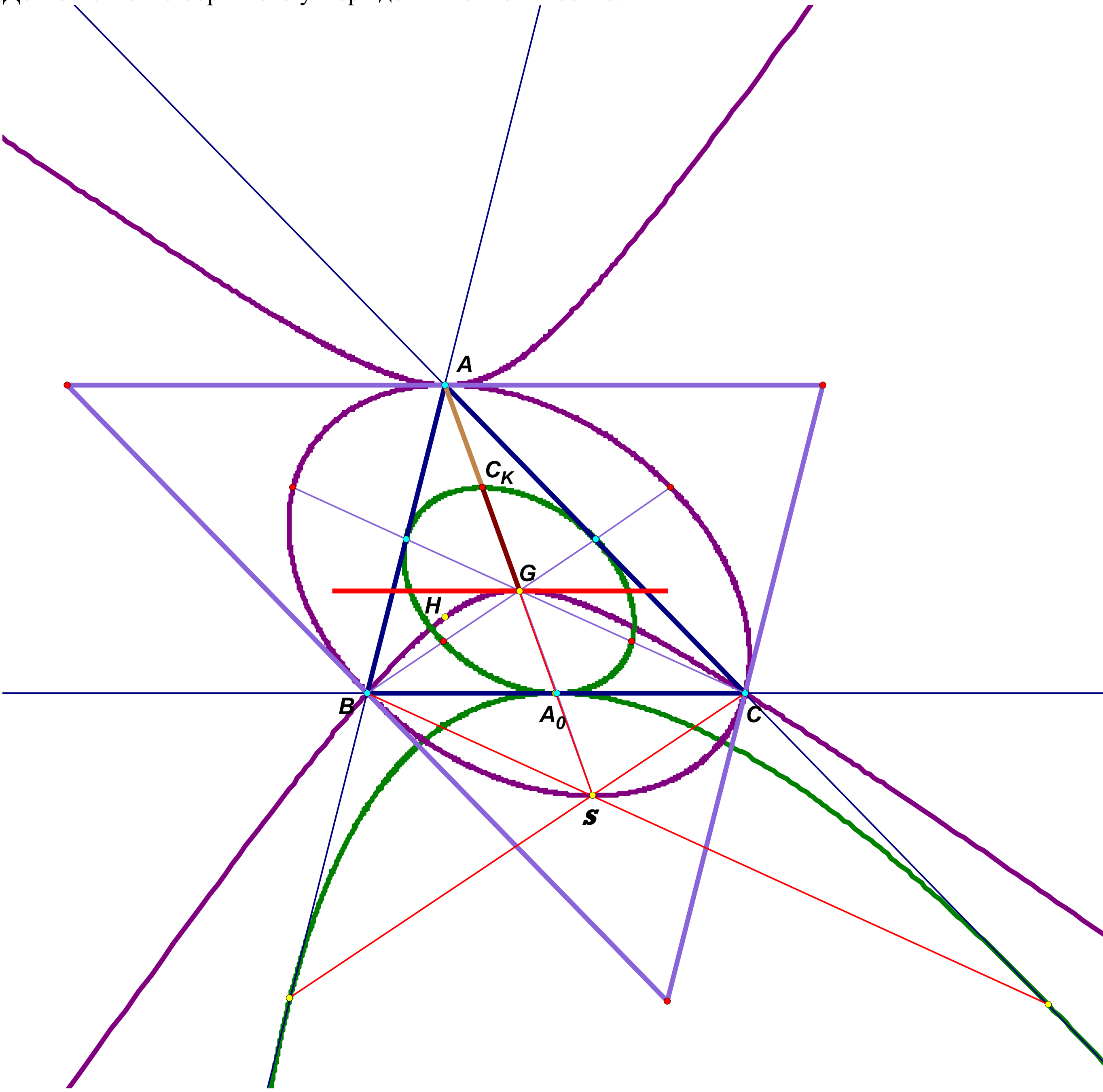
□

Решение третьей задачи.

Понятно, что две описанные около треугольника коники могут касаться друг друга лишь в одной из его вершин (т.к. пять точек определяют конику однозначно, обе коники проходят через три вершины, а касание означает «двойную» точку, и если бы она - не вершина, коники обязаны были бы совпадать).

Пусть, например, описанный эллипс Штейнера касается гиперболы Киперта в вершине A. Т.к. касательная к описанному эллипсу в точке A – прямая, параллельная BC (соответствующая сторона антидополнительного треугольника), то эта же прямая будет касаться гиперболы Киперта. Поскольку отрезок BC – хорда гиперболы, и A_0 - ее середина, то центр гиперболы C_K должен лежать на медиане AA_0, ведь в случае касательной середина второй параллельной хорды вырождается в точку касания. (Более точно, можно даже подметить, что C_K - середина отрезка AG, поскольку при симметрии относительно центра гипербола переходит в себя и центроид лежит на пересечении гиперболы и медианы). В силу того, что точки **S**, G, C_K *коллинеарны*, получаем, что точка Штейнера **S** лежит на медиане AA_0.

Вспомним теперь (см. **2.10**), что перспектором параболы Киперта является точка Штейнера **S**. Это означает, что вписанная парабола касается стороны BC в ее середине A_0.
Но там же касается стороны BC и вписанный эллипс Штейнера.
Доказательство обратного утверждения точно такое же.

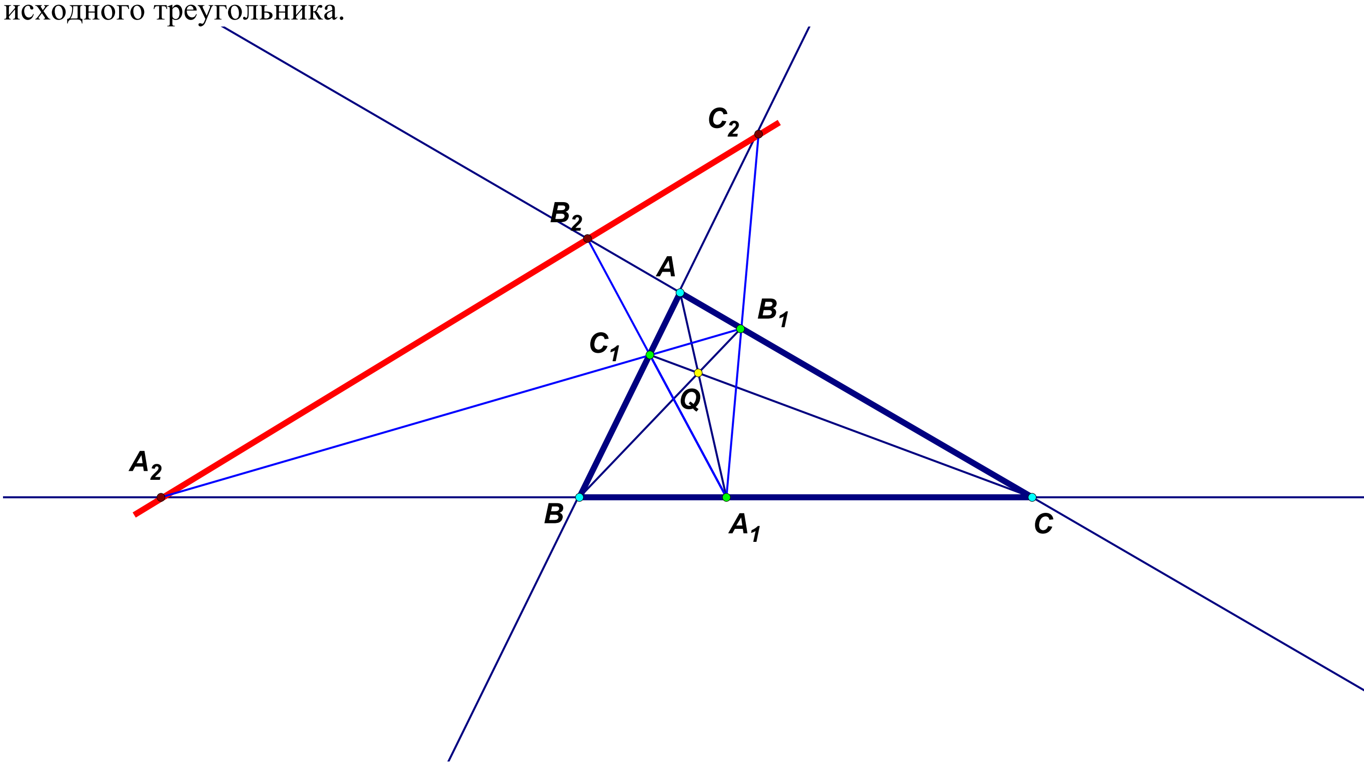


□

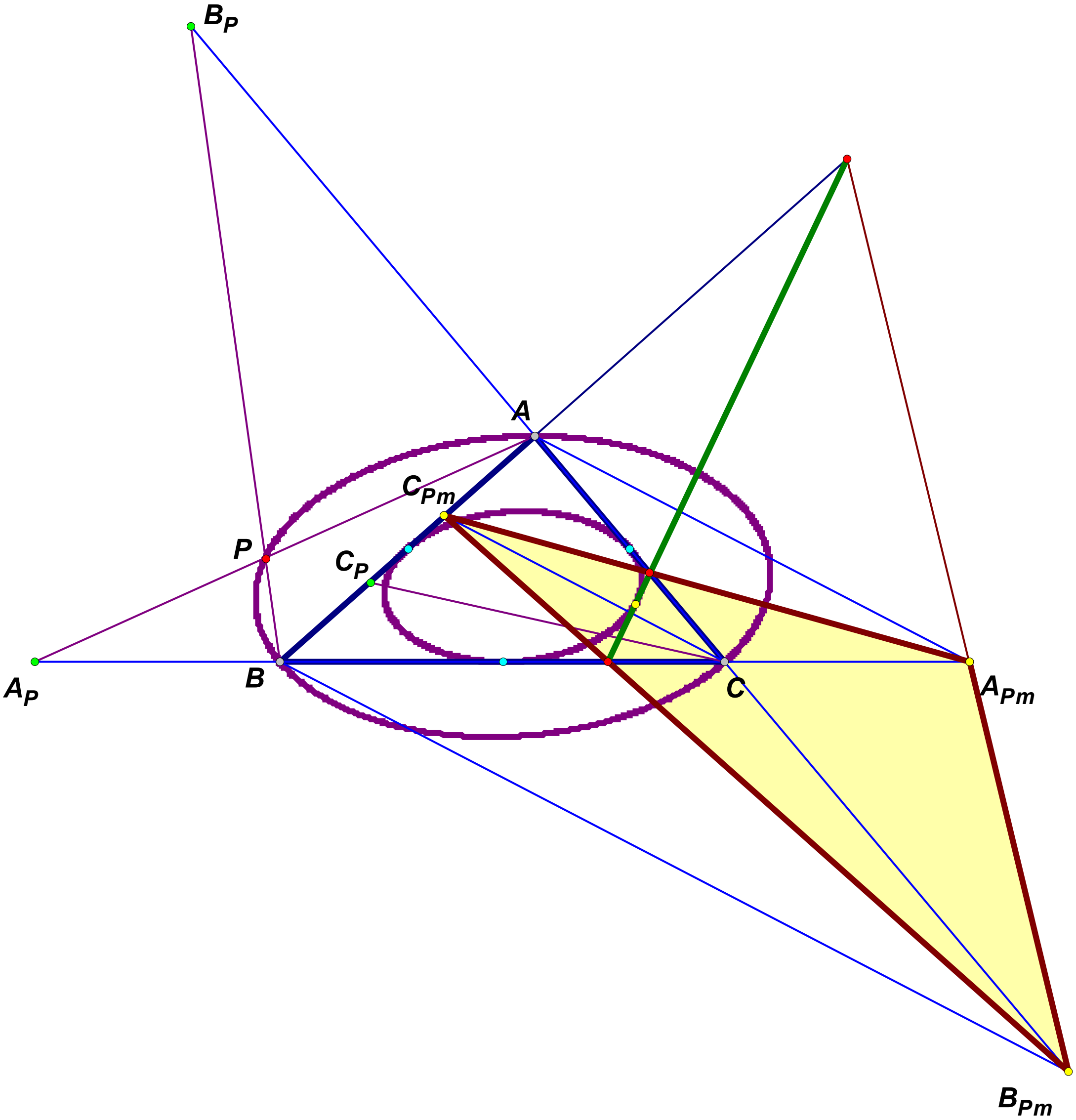
Замечание по поводу третьей задачи.
На самом деле третье утверждение является следствием более общей теоремы.
Теорема:
Пусть K_1 и K_2 - пара коник, а $\overline{K_1}$ и $\overline{K_2}$ - коники, им *двойственные* относительно треугольника *ABC*.
Тогда K_1 касается $K_2 \Leftrightarrow \overline{K_1}$ касается $\overline{K_2}$.
В свою очередь, коники K_1 и $\overline{K_1}$ называют двойственными, если каждой точке на первой конике, имеющей относительно треугольника *ABC* барицентрические координаты

$(p:q:r)$, соответствует прямая c уравнением $px+qy+rz=0$, являющаяся *касательной* к конике $\overline{K_1}$ (и наоборот). (О барицентрических координатах см. [4],[5],[6],[8]) При этом коника, двойственная описанной, является вписанной (обратное утверждение также справедливо).

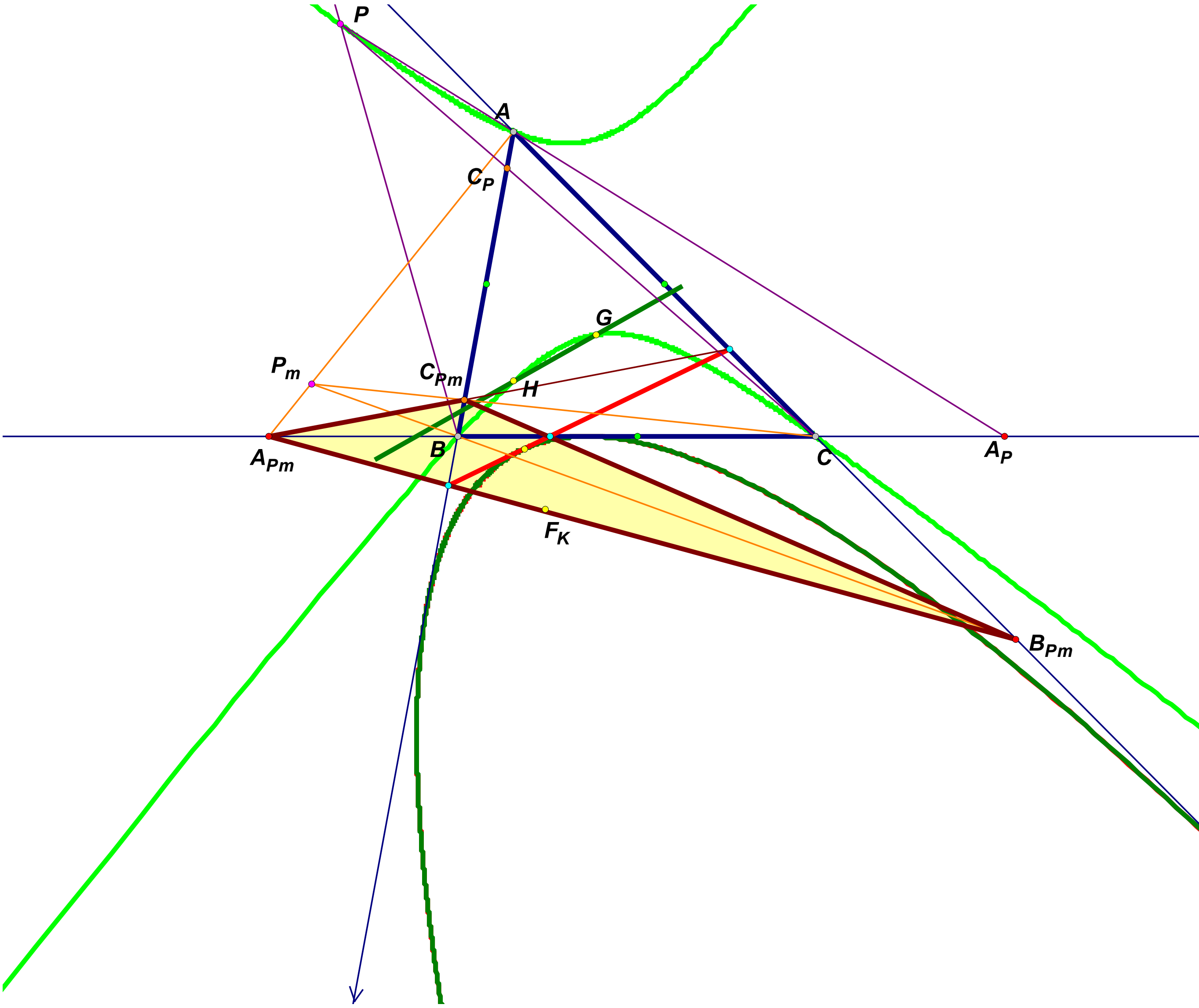
Какой же геометрический смысл прямой, двойственной точке относительно треугольника *ABC*? Оказывается, чтобы построить прямую p, *двойственную* точке *P*, надо сначала рассмотреть *изотомически сопряженную* точку P_m, а затем ее *трилинейную поляру*. Трилинейная поляра произвольной точки Q относительно треугольника ABC - это прямая, содержащая точки пересечения прямых, проходящих через стороны чевианного треугольника точки Q - с прямыми, проходящими через соответствующие стороны исходного треугольника.



Оказывается, двойственными являются вписанный и описанный эллипс Штейнера, а также вписанная парабола Киперта и описанная гипербола Киперта.



(Произвольная точка P, лежащая на описанном эллипсе Штейнера, при изотомическом сопряжении переходит в бесконечно удаленную, чевианный треугольник которой, с вершинами в точках A_{Pm}, B_{Pm}, C_{Pm}, изображен на рисунке).



4. Приложение: *Жизнь Замечательных Людей*

Использованные при решении наших задач коники названы по фамилиям трех выдающихся геометров. Приведем краткие биографические данные о каждом из них. (Следуя, в основном, сведениям, изложенным в[7]).

Якоб Штейнер (Jakob Steiner)
1796 – 1863

Один из величайших геометров всех времен. Родился (18 марта 1796 года) в Утцендорфе неподалеку от Золотурна (Швейцария), выходец из крестьянской семьи. Читать и писать научился в возрасте четырнадцати лет. Следующие четыре года занимался самообразованием (в свободное от основных занятий – пасти коров и пахать землю - время). В восемнадцать, вопреки родительской воле, поступает в знаменитую педагогическую школу (Ивердон, Швейцария), основанную Песталоцци и уже в двадцать лет ему доверяют преподавать математику в этой школе. Вскоре заведение (ввиду финансовых затруднений) закрылось и в 1818 году Штейнер перебирается в Гейдельберг, (Германия). Там он изучает труды французских геометров и обучается в тамошнем университете, а скудные средства на жизнь добывает, как раньше говорили, частными уроками (сейчас более распространен термин «*репетиторство*»).

В молодые годы

Однако в немецких педагогических кругах интерес к системе Песталоцци не угас, и три года спустя Штейнера приглашают в Берлин, где он и занимает в течение многих лет различные учительские посты. Наконец, в 1834 Штейнер становится *экстраординарным профессором* Берлинского Университета. Эту должность (специально учрежденную именно для него) он занимает до конца жизни. (Исключая последний год, когда Штейнер вернулся в родную Швейцарию, где и скончался 1 апреля 1863 года в Берне).

Его манеры читать лекции вошли в легенду. Штейнер был решительно против применения алгебры и анализа[16]. Вообще на занятиях никогда не пользовался никакими чертежами[17], полагая, что по этой причине воображение учащихся разовьется быстрее всего. Рассказывают также, что обыкновенно он не готовился к лекции заранее - когда же, как следствие, возникали проблемы с доказательствами, бывало, Штейнер позволял себе в сердцах крепкое словцо.

Областью его научных интересов была *проективная геометрия* – и вклад Штейнера в эту область математики весьма значителен.

на склоне лет

Что касается геометрии элементарной– список *всех* задач[18], так или иначе связанных с именем Штейнера, отнял бы немало места. Перечислим лишь некоторые:

Поризм Штейнера, теорема Штейнера-Лемуса, эллипсы и точки Штейнера, прямая Штейнера-Обера, тройки Штейнера, дельтоид Штейнера, сети Штейнера (задача о

[16] «Вычисление заменяет мышление, тогда как геометрия стимулирует его» (Штейнер).
[17] И потому наша статья едва ли пришлась ему бы по вкусу. А возможно, и не только потому.
[18] Зачастую Штейнер публиковал лишь их условия, опуская доказательства.

кратчайшей сети дорог для некоторых многоугольников на плоскости вполне элементарна) и т.д. и т.п.

Карл Вильгельм Фейербах (Karl Wilhelm Feuerbach)

1800 - 1834

Родился в Иене (Германия) 30 мая 1800 года. Его отец, Пауль Риттер фон Фейербах, доктор юриспруденции, был одним из авторов Баварского Уголовного Кодекса. Дети у Пауля (ни много, ни мало – 8 сыновей) получились *странные*: незаурядно одаренные, но вместе с тем, не совсем психически уравновешенные.[19] И Карл в этом смысле не являлся исключением. В 22 года он с отличием окончил университет во Фрейбурге, а затем получил должность преподавателя математики в Эрлангской. Гимназии. Недолгая (около 6 лет, с перерывами, вызванными приступами заболевания) карьера педагога не сложилась – болезнь препятствовала нормальному и размеренному образу жизни, которым вообще знамениты немцы. Дело кончилось тем, что в 1828 году его уволили - во время одного из занятий Фейербах пригрозил своим подопечным ножиком.[20] Последние шесть лет своей жизни он прожил в Эрлангене затворником.

Свой блестящий результат (см. **2.4**) Карл Фейербах напечатал (1822 год) в небольшой брошюре (но зато с длинным названием) «Свойства некоторых особых точек в плоскости треугольника и некоторых линий и фигур, с ними связанных: аналитическо-тригонометрический подход».

Еще одна книга вышла в 1827 году: «Основы аналитической теории тетраэдра». В ней, независимо от Мебиуса, опубликовавшего в том же году, но чуть раньше, свое «Барицентрическое исчисление», вводятся барицентрические координаты.

Умер Фейербах 12 марта 1834 года в Эрлангене.

Фридрих Вильгельм Август Людвиг Киперт

(Friedrich Wilhelm August Ludwig Kiepert)

1846 - 1934

[19] А самым знаменитым представителем семейства Фейербахов считается философ Людвиг (1804 – 1872) – непримиримый противник религии и, в каком-то смысле, предтеча Маркса и марксизма. Поэтому в советские времена, когда марксизм являлся официальной идеологией, а школьное образование было всеобщим и обязательным, детишкам навязывали упрощенные и опосредованные выжимки из сочинений Людвига, как говорится, с молодых ногтей. С произведениями Карла дела, в этом смысле, обстояли много хуже. Ныне, кажется, для большинства школьников фамилия «Фейербах» - пустой звук. Так что, в этой среде, братья сравнялись по «индексу цитирования», близкому к нулю.

[20] Действия, конечно, недопустимые, но в значительной степени, чисто по-человечески, понятные. Думается, многие педагоги согласятся с тем, что понятные.

О жизни этого математика известно немного.[21]

Фридрих Киперт родился в Бреслау, а окончил свои дни в Ганновере, в весьма преклонном возрасте. С 1879 по 1921 гг. занимал должность профессора математики в Ганноверском Высшем Техническом Училище (а в период с 1901 по 1904 гг. был ректором). Докторскую степень получил в Берлинском Университете (1870) - под научным руководством Карла Вейерштрасса.

Свою гиперболу Киперт открыл в 1869 г., решив задачу еще одного корифея элементарной геометрии *Эмиля Лемуана*: восстановить треугольник по трем вершинам равносторонних треугольников, построенных на его сторонах (см. L.Kiepert, Solution de question 864, *Nouvelles annals de Mathematiques*, 8 (1869), 40-42).

В 1863 выпустил пособие по математическому анализу, с тех пор выдержавшее более четырнадцати изданий.

[21] И отсюда можно заключить, что жизнь удалась. Уж наверное Киперт никогда не запугивал студентов холодным оружием и выражался всегда прилично – в противном случае что-нибудь непременно просочилось бы в средства массовой информации. Например, нынче в этих средствах практически не отыщешь никаких новостей о таких странах, как Австралия или Канада. Напрашивается вывод, что с Австралией и Канадой все в порядке.

Список литературы:

[1] *Акопян А., Заславский А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Куланин Е.* Об описанных окружностях чевианных и педальных треугольников и некоторых кривых, связанных с треугольником. // Математическое просвещение. 2005. № 9.

[3] *Куланин Е.* О прямых Симсона, кривой Штейнера и кубике Мак-Кэя. // Математическое просвещение. 2006. № 10.

[4] *Мякишев А.* Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2002.

[5] *Kimberling C.* Encyclopedia of triangle centers "ETC". [http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/].

[6] *Kimberling C.* Triangle centers and central triangles. Winnipeg: Utilitas Mathematica Publ., 1998.

[7] *Kimberling C.* Triangle Geometers. [http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/tg.html]

[8] *Yiu P.* Introduction to the Geometry of the Triangle. [http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html]

Авторы:

Евгений Дмитриевич Куланин,
Московский Городской Психолого-Педагогический Университет.
lucas03@mail.ru

Алексей Геннадьевич Мякишев,
Московский Химический Лицей.
alex_geom@mtu-net.ru