О некоторых окружностях, связанных с треугольником

Алексей Мякишев

Автор рассматривает ряд красивых конструкций, связывающих замечательные точки и прямые треугольника с более сложными линиями — коническими сечениями, — обращая специальное внимание на случаи, когда это коническое сечение оказывается окружностью. Кроме того, статья содержит интересные замечания о психологии математического творчества.

Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел. Статья печатается с продолжением.

Tempus fugit, aeternitas manet[1].

Резюмируя наши положения, мы приходим к следующим выводам: в физиологическом отношении между нормальным состоянием гениального человека и патологическим — помешанного существует немало точек соприкосновения. Между гениальными людьми встречаются помешанные и между сумасшедшими — гении. Но было и есть множество гениальных людей, у которых нельзя отыскать ни малейших признаков умопомешательства, за исключением некоторых ненормальностей в сфере чувствительности.

Хотя моё исследование ограничивается скромными пределами психологических наблюдений, но я надеюсь, что оно может дать солидную экспериментальную точку отправления для критики артистических, литературных и, в некоторых случаях, даже научных произведений. Так, во-первых, оно заставит обратить внимание на чисто патологические признаки: излишнюю тщательность отделки, злоупотребление символами, эпиграфами и аксессуарами, преобладание одного какого-нибудь цвета и преувеличенную погоню за новизной. В литературе и учёных статьях такими же признаками служат претензии на остроумие, излишняя систематизация, стремление говорить о себе, склонность заменять логику эпиграммой, пристрастие к напыщенности в стихах, к созвучиям — в прозе и тоже погоня за оригинальностью.

(*Чезаре Ломброзо.* Гениальность и Помешательство.)

§1. О некоторых семействах коник, содержащих окружности. Постановка задачи

Так случилось, что последняя пара-тройка лет сложилась для автора этих строк не самым лучшим образом: ему пришлось пережить довольно-таки затяжной период творческого**[1]** бессилия — никак не удавалось придумать хотя какую-нибудь, сравнительно свежую и небанальную, геометрическую конструкцию**[2]**. Многие обстоятельства послужили тому причиной — здесь и довольно напряженная, но скучноватая, работа над учебником/задачником по геометрии, и берущие своё годы, и скорбные мысли о том, *а на кой ляд* (прошу прощения) *это всё нужно* — да мало ли что ещё! В *глобальных*, например, масштабах — сильно докучало жутковатое ощущение каких-то непоправимых сдвигов и трещин в самом фундаменте всего вообще мироздания**[3]**, что никак не способствовало ни бодрости духа, ни ясности ума. (Пожалуй, достаточно о причинах).

И вот, как бы оно там ни складывалось, прошлым летом решил я непременно кризис одолеть — и чего-нибудь эдакое открыть, доказав самому себе, что ещё на что-то годен. Причём, мало помалу, даже выкристаллизовалось (не знаю, почему) странное, но вполне конкретное желание открыть не абы что, а непременно и обязательно, некую *окружность*. Довольно сложно изобрести что-либо действительно новое (в любой сфере деятельности) — а особенно по заказу.

[1] “Время бежит, вечность остается” — народная латинская поговорка.

Но, как говорится, мобилизовав все скрытые ресурсы, я попытался. Об этих попытках и сопряженных с ними усилиях — прилагаемый ниже пространный (и, отчасти, *трагикомический*) отчёт.

Начал я с того, что освежил в памяти классические образчики окружностей, связанных с треугольником. Обнаружилось, что многие из них являются представителями того или иного семейства коник[4], проходящих через 6 определенных точек[5] и порождаемых по определенным правилам произвольной точкой (точками), расположенной в плоскости треугольника. При некоторых положениях точки (точек) коники вырождаются в окружность. Вот ряд примеров.

1.1 *Окружность Эйлера* ([3]: 5.129–5.137, [4]: 457–465)

Это окружность, содержащая основания высот и середины сторон треугольника. По количеству разнообразных замечательных свойств её следует считать «окружностью № 1» в геометрии треугольника.

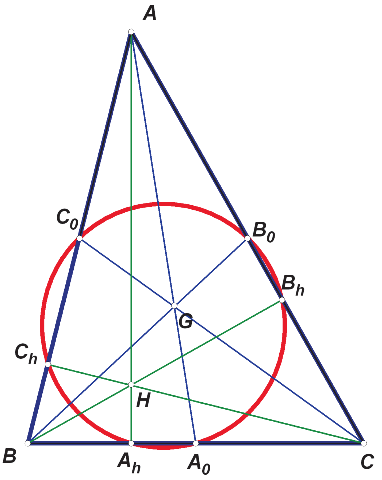

Рис. 1.

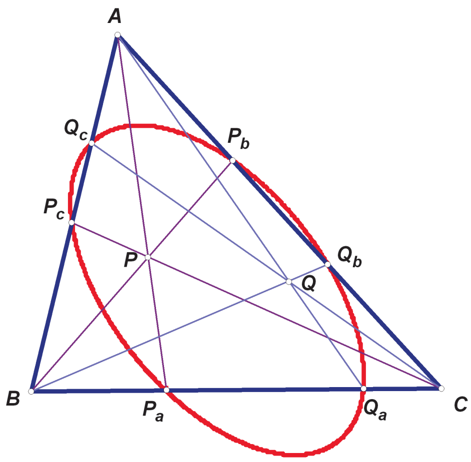

Рис. 2.

Соответствующее семейство коник образуют коники, содержащие основания чевиан двух произвольных точек. Коника из этого семейства вырождается в окружность Эйлера, если в качестве «стартовых» точек возьмем центроид G и ортоцентр H.

1.2 *Окружность Тейлора* ([7,8])

Если из оснований высот провести перпендикуляры к соответствующим сторонам (или их продолжениям) треугольника, то все шесть их оснований попадут на одну окружность.

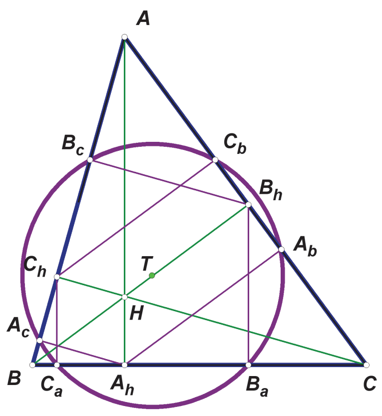

Рис. 3.

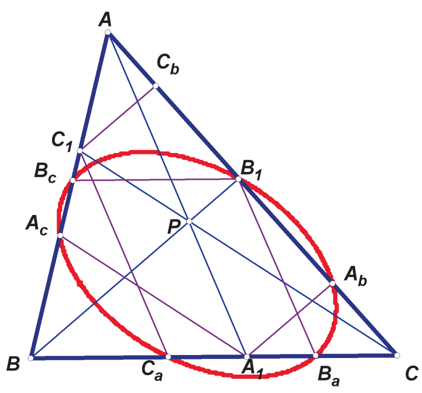

Рис. 4.

Семейство коник, содержащее эту окружность, строится по произвольной точке P следующим образом: из оснований чевиан, проходящих через точку P, проводятся прямые, параллельные соответствующим чевианам до пересечения с соответствующими прямыми, содержащими стороны треугольника. (C_a — точка пересечения CB и прямой, проходящей черезC_1 параллельно AA_1 и т. д.)

1.3 *Окружность Лемуана (первая)* ([3]:5.161,[7,8])

Здесь шесть *коциклических* точек получаются, если провести параллели через точку Лемуана K[6] до пересечения с соответствующими сторонами треугольника ABC. А порождающее эту окружность семейство коник получается, если рассматривать параллели, проходящие через произвольную точку P.

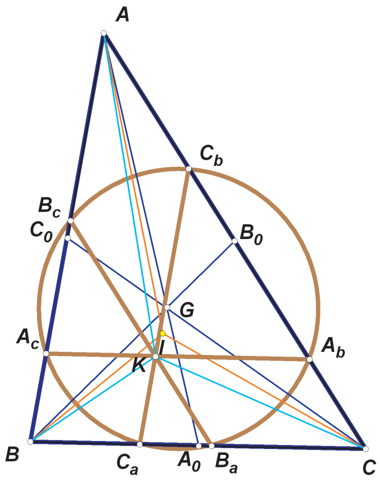

Рис. 5.

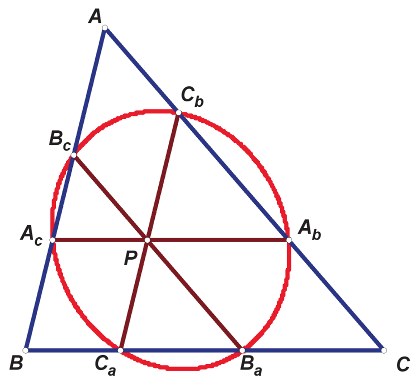

Рис. 6.

1.4 *Окружность Адамса* ([7])

А в этом случае коциклические точки возникают, если проводить параллели к сторонам *треугольника Жергонна*[7] через точку Жергонна J[8] — опять-таки, до пересечения со сторонами исходного треугольника ABC.

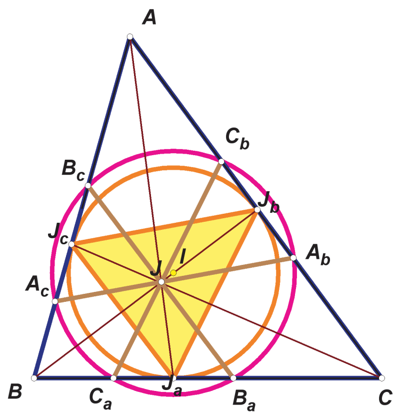

Рис. 7.

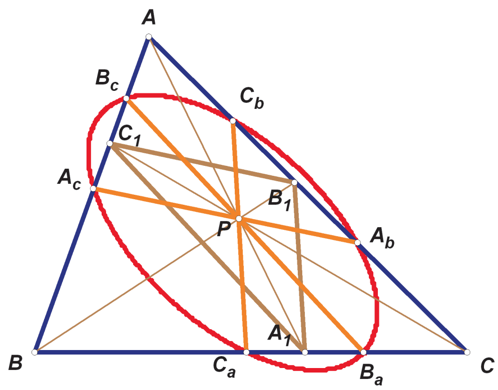

Рис. 8.

Соответствующие коники получаются, если проводить параллели к сторонам чевианного треугольника произвольной точки P. Существование коник доказать во всех приведенных конструкциях несложно и доказательства похожи, как четыре капли воды. В качестве главного орудия используется *теорема Карно:*

Пусть шесть точек попарно расположены на прямых, содержащих стороны некоторого треугольникаABC: $A_1, A_2 \in (BC)$; $B_1, B_2 \in (CA)$; $C_1, C_2 \in (AB)$. Тогда они принадлежат одной конике, если и только если выполнено *условие Карно* ([1,4,7]):

$$\left(\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{CA_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{BA_2}}{\overrightarrow{CA_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{AB_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{CB_2}}{\overrightarrow{AB_2}}\right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{BC_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{AC_2}}{\overrightarrow{BC_2}}\right) = 1.$$ [9]

В каждом из рассмотренных примеров выполнение условия Карно проверяется посредством применения в нужный момент теоремы Чевы ([3]: 5.85, [4]: 3.40, 3.41), а отношения вычисляются, исходя из соображений подобия.

Окружность Ламуна **([3]: 5.17)**

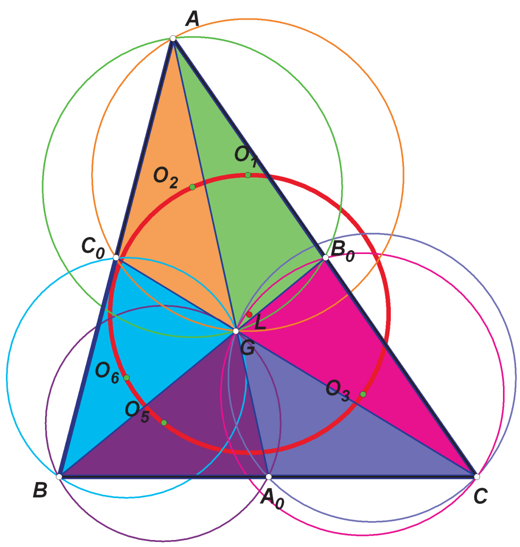

Рис. 9.

Здесь коцикличными являются центры окружностей, описанных около шести треугольников, на которые исходный треугольник разбивается своими медианами.

Соответствующие коники образуются центрами окружностей, описанных около шести треугольников, на которые исходный разбивается чевианами произвольной точки P. Этот пример[10] несколько отличается от предыдущих: точки, порождающие конику, не попадают (вообще говоря) на стороны треугольника. Соответственно, и доказательство ее существования не опирается на теорему Карно — тут следует воспользоваться *обратной теоремой Паскаля* ([1,5,8]): Если точки пересечения прямых, содержащих противоположные[11] стороны некоторого шестивершинника[12] лежат на одной прямой, то его вершины лежат на одной конике. В данном случае получаем, очевидно, всякий раз шестиугольник, у которого противоположные стороны *параллельны* (как перпендикуляры к одной и той же чевиане), т. е., с проективной точки зрения, точки их пересечения лежат на *бесконечно удаленной прямой.* ([1,2])

Итак, цель определилась:*отыскать какие-нибудь сходные и относительно новые конструкции, аналогичные рассмотренным.*

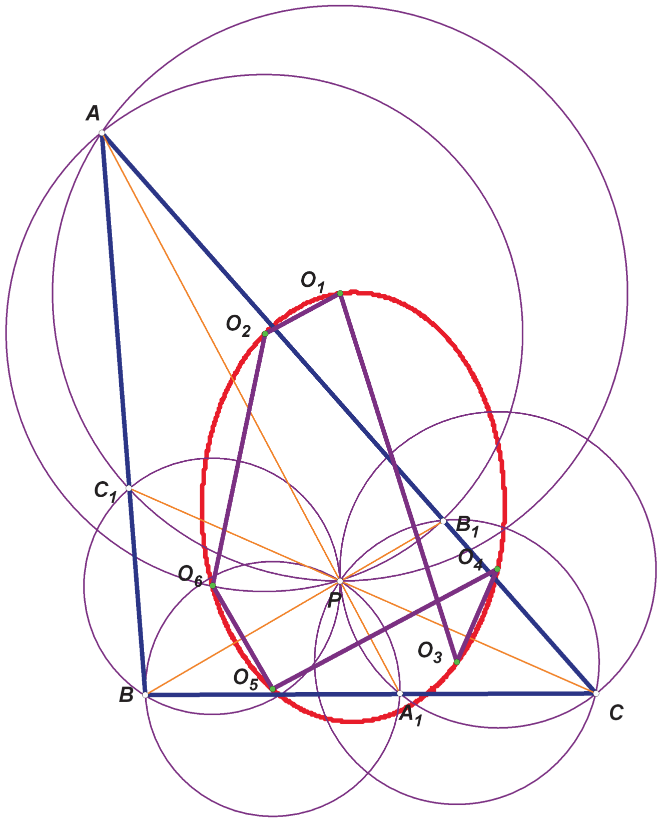

Рис. 10.

§2. На подступах — дальних и не очень: некоторые попытки создания аналогичных конструкций

Повезло не сразу. Вначале были рассмотрены следующие три.

2.1

Будем проводить прямые, выходящие из вершин исходного треугольника ABC параллельно соответствующим чевианам произвольной точки P, до пересечения с прямыми, содержащими стороны исходного треугольника. Так, C_a есть точка пересечения BC и прямой, проходящей через вершину A параллельно чевиане CC_1 и т. д.

Несложно проверить, что для построенной таким образом шестерки точек условие Карно выполняется. А если проделать вычисления, аналогичные тем, что подробно проделаны в §3, то получим для барицентрических координат[13] точки P следующее условие *коцикличности*:

$$\frac{p^3\,(q+r)}{a^2}=\frac{q^3\,(r+p)}{b^2}=\frac{r^3\,(p+q)}{c^2}.$$

Решить эту систему (как и следующие две) нам не удалось — уж больно высокие степени выскакивают[14].

2.2

А тут рассмотрены коники, проходящие через основания чевиан двух *изотомически сопряженных* точек[15] P, P_m.

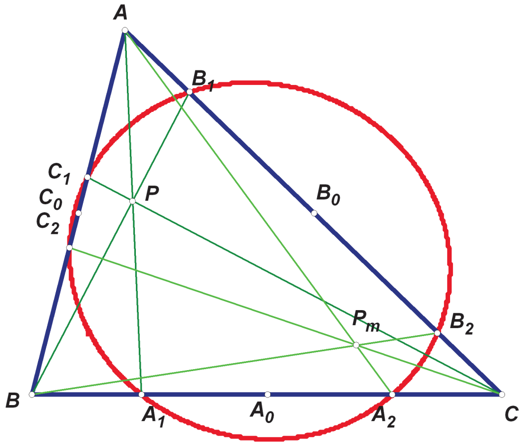

Рис. 11.

Вот результат, тоже не очень утешительный.

$$\frac{p\,(q+r)^2}{a^2}=\frac{q\,(r+p)^2}{b^2}=\frac{r\,(p+q)^2}{c^2}$$

2.3

Изогональное сопряжение также не порадовало:

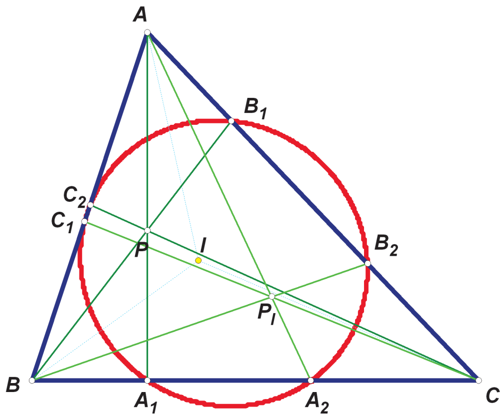

Рис. 12.

$$p\,(q+r)\left(qc^2+rb^2\right)=q\,(r+p)\left(ra^2+pc^2\right)=r\,(p+q)\left(pb^2+qa^2\right).$$

§3. Улыбка фортуны: конструкция первая

Наконец, удалось набрести на конструкцию, оказавшуюся-таки успешной — в смысле поисков соответствующей окружности. Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, но не лежащая на прямых, содержащих его стороны. Пусть, далее, $A_1\in(BC)\,,B_1\in(CA)\,,C_1\in(AB)$ — основания чевиан этой точки. Через точку A_1 проведем прямые, параллельные сторонам AB и AC — и отметим точки A_b, A_c пересечения этих прямых с прямыми, содержащими стороны AC и AB соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично.

Утверждение 3.1. Точки $A_b, A_c,\ B_a, B_c, C_a, C_b$ всегда принадлежат одной конике[16].

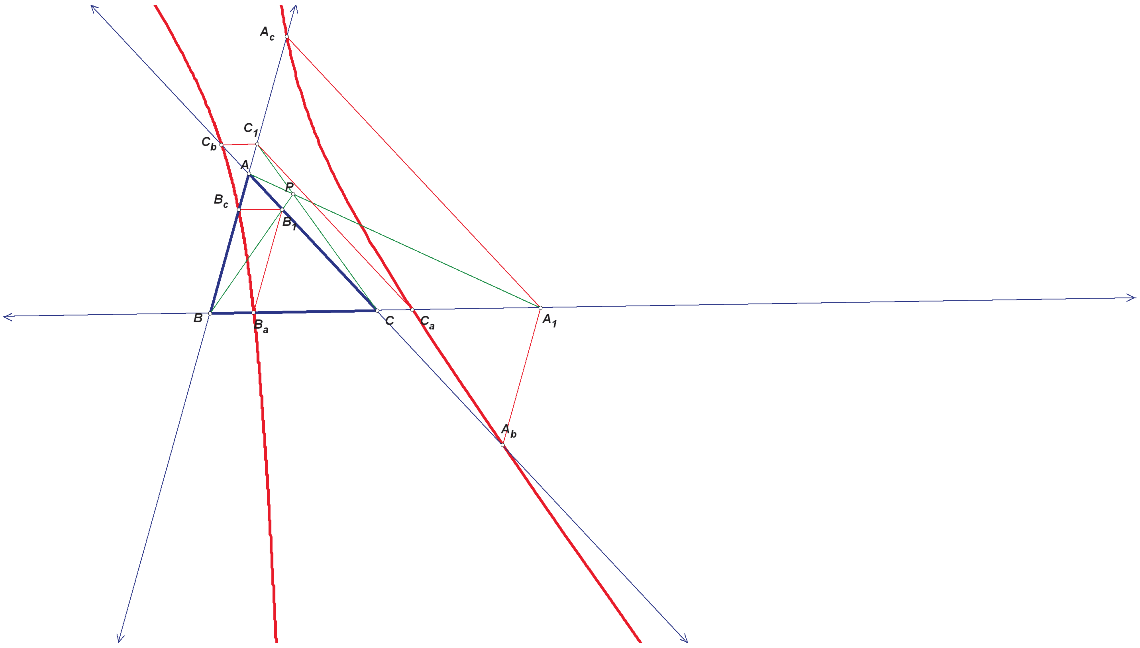

Рис. 13.

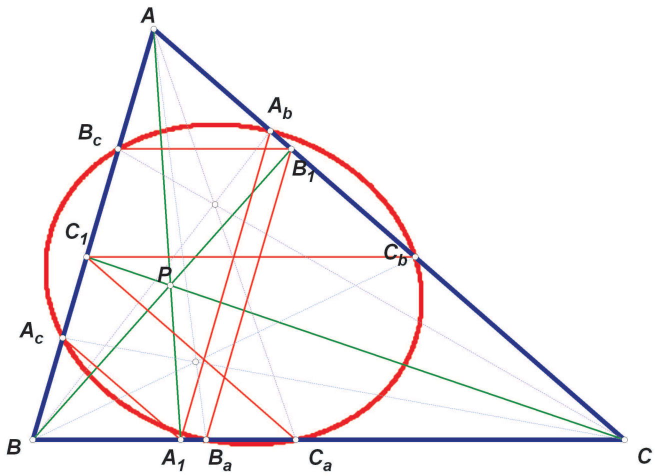

Рис. 14.

Доказательство: Выпишем левую часть условия *Карно*, заменим входящие в него отношения по подобию, и применим теорему Чевы[17].

$$\left(\frac{BB_a}{CB_a}\cdot\frac{BC_a}{CC_a}\right)\cdot\left(\frac{CC_b}{AC_b}\cdot\frac{CA_b}{AA_b}\right)\cdot\left(\frac{AB_c}{BB_c}\cdot\frac{AA_c}{BA_c}\right)=$$
$$=\left(\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\right)\cdot\left(\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}\right)\cdot\left(\frac{AB_1}{CB_1}\cdot\frac{CA_1}{BA_1}\right)=$$
$$=\left(\frac{CA_1}{BA_1}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{AB_1}{CB_1}\right)^2=1.$$[18]

Утверждение 3.2. Пусть $P=(p:q:r)$ [19]. Тогда барицентрические координаты рассматриваемых шести точек имеют вид:

$$B_a=(0:p:r)\,,\qquad B_c=(p:r:0)\,,\qquad C_a=(0:q:p)\,,$$
$$C_b=(p:0:q)\,,\qquad A_b=(q:0:r)\,,\qquad A_c=(r:q:0)\,.$$

Доказательство: Действительно, очевидно, что

$$\frac{BB_a}{CC_a}=\frac{AB_c}{BB_c}=\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{r}{p}\Rightarrow B_a=(0:p:r)\,,B_c=(p:r:0)\,.$$

Для остальных точек рассуждения аналогичны.

Теперь выведем уравнение коники, проходящей через эти точки. Как известно, в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид: $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$[20]. (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель ([5,8]).

Утверждение 3.3. Коэффициенты коники, проходящей через точки $B_a=(0:p:r)$, $B_c=(p:r:0)$, $C_a=(0:q:p)$, $C_b=(p:0:q)$, $A_b=(q:0:r)$, $A_c=(r:q:0)$, могут быть представлены в виде:

$$u=-2rq;\qquad v=-2pr;\qquad w=-2pq;$$
$$f=p^2+qr;\qquad g=q^2+rp;\qquad h=r^2+pq.$$

Доказательство: Подставив координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти уравнений[21]:

$$\begin{cases} B_a: vp^2+wr^2+2fpr=0, & (1)\\ C_a: vq^2+wp^2+2fqp=0, & (2)\\ C_b: up^2+wq^2+2gpq=0, & (3)\\ A_b: uq^2+wr^2+2gqr=0, & (4)\\ A_c: ur^2+vq^2+2hrq=0, & (5)\\ B_c: up^2+vr^2+2hpr=0. & (6)\end{cases}$$

Из первых двух имеем:

$$v\left(\frac{p}{r}-\frac{q}{p}\right)=\omega\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{p}\right)\Leftrightarrow\frac{v}{r}\left(p^2-qr\right)=\frac{w}{q}\left(p^2-qr\right).$$

Это значит, что либо $\frac{v}{r}=\frac{w}{q}$, либо $p^2-qr=0$. Третье и четвертое уравнение ведет к развилке $\frac{w}{p}=\frac{u}{r}$ или $q^2-rp=0$. И, наконец, пятое и шестое — $\frac{u}{q}=\frac{v}{p}$ или $r^2-pq=0$.

Будем пока считать, что «правые» альтернативы не имеют места. (Равенства правых частей нулю будут рассмотрены в §4 — и там же мы поговорим подробнее о том, почему одновременное равенство нулю всех трех выражений соответствует совпадению исходной точки P с центроидом G).

Далее, в силу однородности уравнения коники, можно считать, что $h = 1$ [22]. Тогда, подставив выражение $v = \frac{p}{q}u$ в (5), получим: $ur^2 + \frac{p}{q}q^2u + 2rq = 0 \Rightarrow u = -\frac{2qr}{pq+r^2}$. Значит, $w = \frac{p}{r} \cdot u = -\frac{2pq}{pq+r^2}$; $v = \frac{r}{q}w = -\frac{2pr}{pq+r^2}$. Наконец, отыщем f и g. Подстановки в (3) и (1) быстро ведут к цели:

$$\frac{-2rq \cdot q^2 - 2pq \cdot r^2}{pq + r^2} = -2gqr \Rightarrow g = \frac{rp + q^2}{pq + r^2} \quad \text{и,} \quad \text{аналогично,} \quad f = \frac{qr + p^2}{pq + r^2}.$$

Чтобы получить теперь искомые формулы для коэффициентов, остается домножить их всех на величину $k = pq + r^2$.

Согласно [5], коника вырождается в окружность, если и только если выполняются следующие равенства: $\frac{v+w-2f}{a^2} = \frac{w+u-2g}{b^2} = \frac{u+v-2h}{c^2} = \lambda\,(\neq 0)$ [23]. Ими и воспользуемся для доказательства основного результата:

Утверждение 3.4. Рассматриваемое семейство коник содержит единственную окружность. Ее порождает точка $X\,(194) = \left(\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right)$ [6].

Доказательство. Поскольку

$$v + w - 2f = p^2 + pr + qp + rq = p\,(p + r) + q\,(p + r) = (p + r)\,(r + q)\,,$$

и остальные числители выражаются аналогично, то условие вырождения коники в окружность запишется в виде:

$$\frac{(p + r)\,(p + q)}{a^2} = \frac{(q + p)\,(q + r)}{b^2} = \frac{(p + r)\,(q + r)}{c^2}.$$

Или, разделив все равенства на $k = (q + r)\,(r + p)\,(p + q)$,

$$\Leftrightarrow \frac{1}{q + r} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{r + p} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p + q} \cdot \frac{1}{c^2} = \lambda.$$

Пусть $s = p + q + r$. В этих обозначениях приходим к системе:

$$\begin{cases} s - p = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{a^2} \\ s - q = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{b^2} \\ s - r = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{c^2} \end{cases} \Rightarrow s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right); \quad q = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right); \quad r = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right).$$

Отбросив (сократив на) общий множитель, получаем, наконец:

$$X_{194} = (\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)) \text{ [24]}.$$

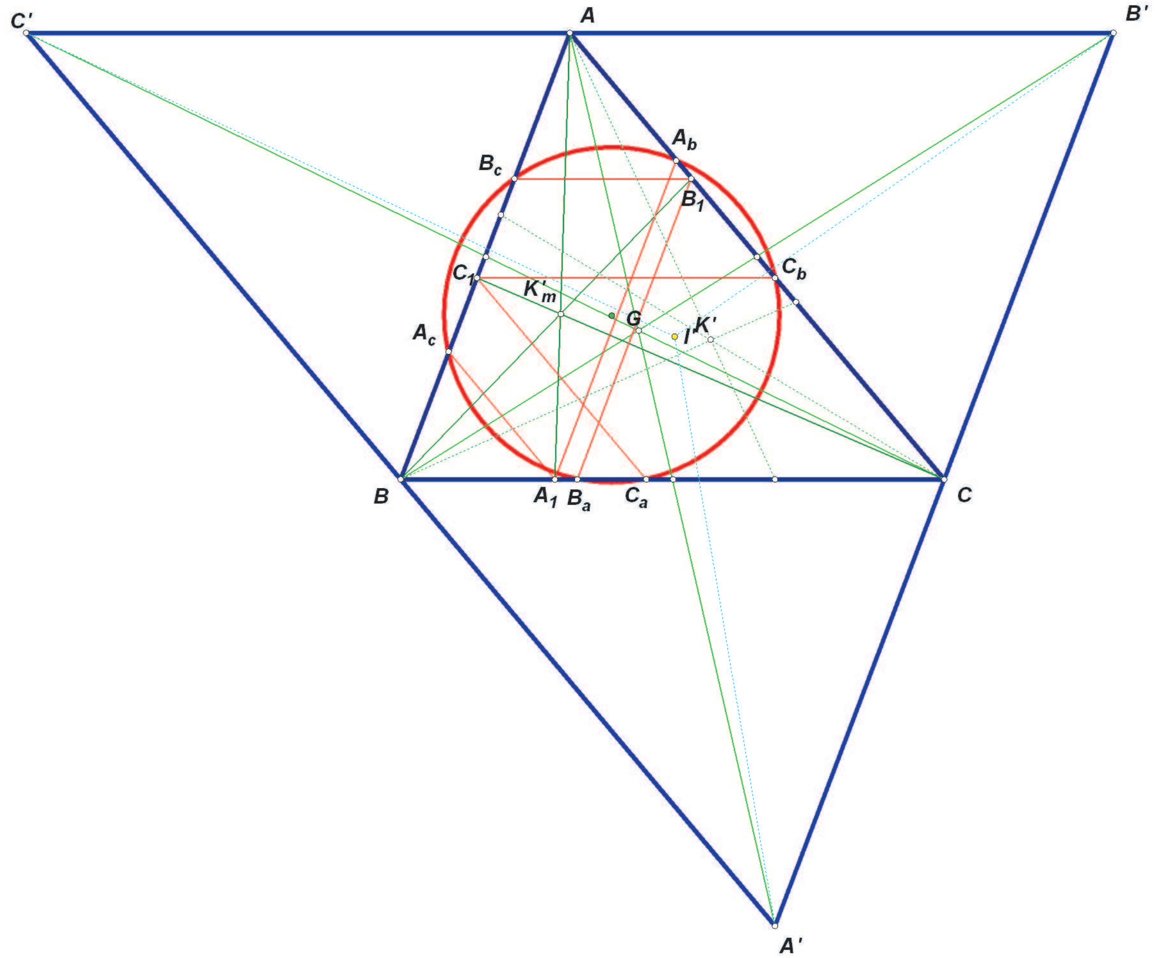

Рис. 15.

Оказывается, найденная точка имеет недурной геометрический смысл. А именно, справедливо

Утверждение 3.5. Точка

$$X_{194} = \left(\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) : \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)\right)$$

есть *точка, изотомически сопряженная точке Лемуана антидополнительного треугольника* $A'B'C'$[25] (изотомия также рассматривается относительно антидополнительного треугольника).

Доказательство. Отметим один факт, из которого наше утверждение получается сразу.

Лемма: Пусть заданы две точки Q и Q', имеющие относительно треугольника ABC следующие барицентрические координаты:

$$Q = (p : q : r)\,, \qquad Q' = (q + r - p : r + p - q : p + q - r)\,.$$

Тогда гомотетия с центром в центроиде G и коэффициентом -2 переводит точку Q в Q':

$$Q' = \mathrm{H}_G^{-2}(Q)\,.$$

А поскольку та же самая гомотетия переводит исходный треугольник ABC в его антидополнительный треугольник $A'B'C'$ (ведь центроиды обоих треугольников совпадают, а медианы делятся в отношении $2:1$, считая от соответствующих вершин) и, будучи подобием, замечательные точки переводит в одноименные — другими словами можно сказать, что точка Q'

будет играть для треугольника $A'B'C'$ ту же роль, какую играет для треугольника ABC точка Q.

Доказательство леммы: Пусть $s = p+q+r$. Тогда $Q' = (s-2p : s-2q : s-2r)$, а суммарная масса этой точки равна $S' = 3s - 2s = s$. Координаты Q можно записать как $Q = (2p : 2q : 2r)$ с суммарной массой $S = 2\,(p+q+r) = 2s$.

Рассмотрим систему материальных точек sA, sB, sC с центром масс в центроиде $G = (s : s : s)$. Эту систему можно разбить на две подсистемы: $2pA, 2qB, 2rC$ (с центром масс в Q и суммарной массой $2s$) и $(s-2p)\,A, (s-2q)\,B, (s-2r)\,C$(с центром в Q' и суммарной массой s. Из правил группировки и рычага тогда получим, что $2s \cdot QG = s \cdot Q'G \Leftrightarrow \frac{Q'G}{QG} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow Q' = \mathrm{H}_G^{-2}\,(Q)$ (т. к. суммарные массы одного знака, деление отрезка QQ' точкой G осуществляется *внутренним* образом).

В нашем случае $Q = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$. Хорошо известно, что точка эта является изотомически сопряженной к точке K Лемуана исходного треугольника ABC. ([6] — X_{76}, X_6).

§4. Случай касания и сопутствующие калькуляции[26]

Как известно ([5,8]), по заданному уравнению коники $ux^2+vy^2+\omega z^2+2fyz+2gzx+2hxy = 0$, координаты ее центра можно отыскать по формулам:

$$U + G + H : V + F + H : W + F + G,$$

где

$$U = vw - f^2, V = uw - g^2, W = uv - h^2, F = gh - uf, G = fh - vg, H = fg - wh.$$

Пользуясь этими соотношениями, можно вычислить координаты центра найденной нами окружности. С помощью программы *Mathematica* 5.1 мы получили следующее выражение для первой координаты (остальные две получаются из нее циклическими сдвигами $a \to b \to c \to a$).

$$8a^4b^2c^2\left(-a^2\left(b^2+c^2\right)\left(b^4-5b^2c^2+c^4\right)+a^4\left(b^4-4b^2c^2+c^4\right)+b^2c^2\left(b^4-4b^2c^2+c^4\right)\right)$$

Эта точка отсутствует в ETC ([6]).

Теперь вернёмся к обсуждению условий вида $p^2 - qr = 0$,$q^2 - rp = 0$, $r^2 - pq = 0$, возникших в предыдущем параграфе. Заметим, что одновременное выполнение любых двух равенств автоматически влечет за собой и выполнение третьего. В самом деле, пусть, например, справедливы первые два. Тогда

$$\begin{cases} p^2 = qr \\ q^2 = rp \end{cases} \Rightarrow p^2q^2 = r^2pq \Rightarrow r^2 = pq \Rightarrow r^2 - pq = 0.$$

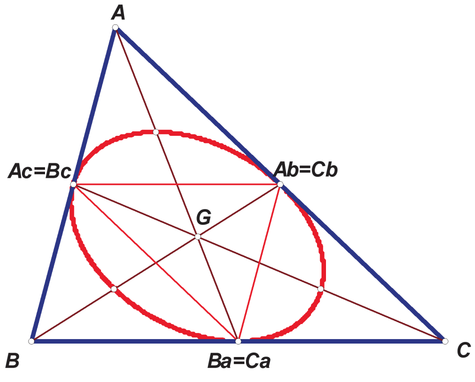

Рис. 16.

Итак, пусть выполнены все три (или два, что то же) из рассматриваемых равенств.

$$\begin{cases} r^2 = pq \\ p^2 = qr \\ q^2 = rp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^3 = pqr \\ q^3 = pqr \\ r^3 = pqr \end{cases} \Rightarrow p^3 = q^3 = r^3 \Rightarrow p = q = r.$$

В этом случае получаем вписанный в треугольник эллипс, касающийся его сторон в серединах[27] и с центром в точке пересечения медиан G — объект, хорошо известный в геометрии: т. н. *вписанный эллипс Штейнера*, имеющий уравнение $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=0$. ([5,8])

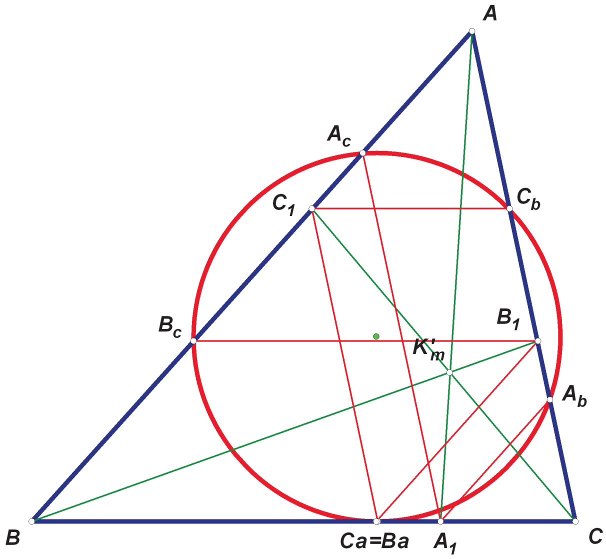

Рис. 17.

Пусть теперь выполняется ровно одно равенство из трех, к примеру $p^2-qr=0q^2-rp\neq 0r^2-pq\neq 0$. Тогда $\frac{w}{p}=\frac{u}{r}$и $\frac{u}{q}=\frac{v}{p}$ (см. §3). После перемножения этих двух равенств получаем, однако, что и $\frac{v}{r}=\frac{w}{q}$. Значит, мы можем рассуждать в точности, как в предыдущем параграфе, и получим в результате все ту же окружность, правда с ограничениями на длины сторон исходного треугольника вида $p^2-qr=0$. Вся та же программа приводит выражение в левой части равенства к виду

$2a^2\left(-b^2c^2\left(b^2+c^2\right)+a^2\left(b^4+c^4\right)\right)$[28], т. е. получаем условие $\left(b^4+c^4\right)=2b^2c^2\left(b^2+c^2\right)$. Геометрически же равенство $p^2=qr$ означает, что точки C_a и B_a совпадают, т. е. что наша окружность касается стороны BC в этой «сдвоенной» точке.

Действительно,

$$C_a=(0:q:p)=(0:qr:pr)=\left(0:p^2:pr\right)=(0:p:r)=B_a.$$

И, обратно,

$$C_a=(0:q:p)=(0:p:r)=B_a\Rightarrow\frac{q}{p}=\frac{p}{r}\Rightarrow p^2=qr.$$

Оказывается, существует бесконечное множество треугольников, длины сторон которых удовлетворяют условию касания.

В самом деле, поскольку

$$\left(b^4+c^4\right)=2b^2c^2\left(b^2+c^2\right)\Leftrightarrow\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4}=2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

(после деления обеих частей равенства на $b^4 \cdot c^4$), то, совершив замену $\frac{1}{b^2} = x > 0, \frac{1}{c^2} = y > 0$, придем к уравнению, задающему полуокружность с центром в точке $O\,(1;1)$ и радиуса $R = \sqrt{2}$:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}, \quad \text{т. к.} \quad x^2 + y^2 - 2x - 2y \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2.$$

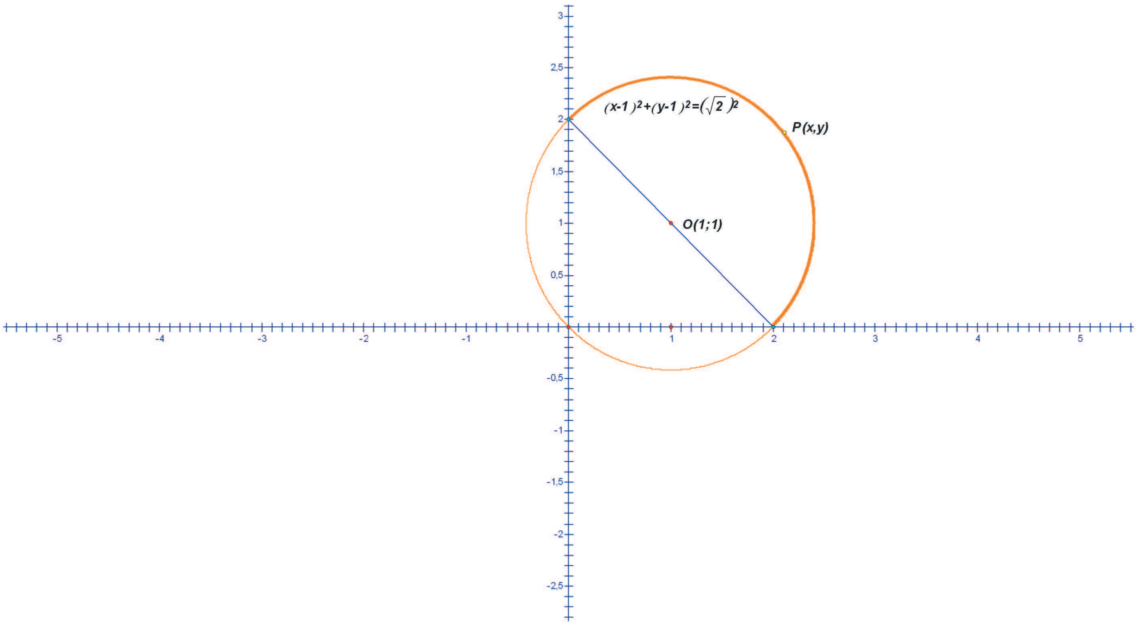

Рис. 18.

Для любой точки $P\,(x,y)$ этой полуокружности можно подобрать бесконечно много треугольников, для которых *условие касания* имеет место. Нужно только проследить, чтобы выполнялись все три неравенства треугольника. А для этого достаточно положить $b = \frac{1}{\sqrt{x}}, c = \frac{1}{\sqrt{y}}$ и $a \in \left(\max\left(\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right), \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right)\right); \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}\right)$. Очевидно, что для такой тройки чисел(a,b,c) система неравенств $\begin{cases} b + c > a \\ c + a > b \\ a + b > c \end{cases}$ будет выполняться.

Цитированная литература

1. А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

2. А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. М.: МЦНМО, 2009.

3. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

4. И. Шарыгин. Геометрия. Планиметрия (задачник 9-11). М.: Дрофа, 2001.

5. C. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal, and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.

6. C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

7. R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

8. P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

Примечания

[1] На всякий случай: именно *творческого*, но никаким боком не *креативного*! (довольно противное (ну, испорченное, если точнее) словцо, обильно тиражируемое всевозможными СМИ и модное в определенных (натурально, *креативных*) кругах, с которыми автор нипочем не хотел бы ассоциироваться).

– Пойдешь ко мне в штат? ...

... – Кем? — спросил он.

– Криэйтором.

- -Это творцом? — переспросил Татарский. — Если перевести? Ханин мягко улыбнулся.

– Творцы нам тут [...] не нужны, – сказал он. — Криэйтором, Вава, криэйтором.

(Виктор Пелевин. Generation P.)

[2] Но надо надеяться, что всё же Элементарная Геометрия от этого простоя не особо пострадала.

Я забыл, в чём была суть фельетона. Помнится смутно его начало:

«На Парнасе было скучно.

– Чтой-то новенького никого нет, – зевая, сказал Жан-Батист Мольер.

– Да, скучновато, - отозвался Шекспир...»

Помнится, дальше открывалась дверь, и входил я — черноволосый молодой человек с толстеннейшей драмой под мышкой.

Надо мной смеялись, в этом не было сомнений, – смеялись злобно все. И Шекспир, и Лопе де Вега, и ехидный Мольер, спрашивающий меня, не написал ли я чего-либо вроде «Тартюфа», и Чехов, которого я по книгам принимал за деликатнейшего человека, но резвее всех издевался автор фельетона, которого звали Волкодав.

(Михаил Булгаков. Театральный роман.)

[3] Ощущения, разумеется, субъективные (и как бы хотелось верить — что иллюзорные), но многим, увы, не чуждые.

В поэтической форме их (ощущения эти) доходчиво передаёт несомненно талантливый (но уж больно *провокативный* и *ядовитый*) Всеволод Емелин. Вот некоторые фрагменты, заимствованные из его произведений:

И, смотря на весь этот мультикультурализм,
Где слились все народы, традиции, веры,
Я подумал, что есть наша жизнь?
И понял: она есть химера.

Или такой, весьма *злободневный*, пассаж:

В Ливии, охваченной миротворческим угаром,
Разбомбили колонну союзных инсургентов.
В Ингушетии ликвидировали Доку Умарова
Как минимум на 75%.
Зато остальные 25% Доку Умарова
Привезли в столицу на генетическую экспертизу.
Мы существуем в чем-то вроде кошмара,
Все к этому привыкли, и сверху, и снизу.
В Ливии, чтобы демократию установить,
Свергнуть диктатора-кровопийцу,
Надо плохих ливийцев убить,
Оставить только хороших ливийцев.
Вот настала весна, прилетели грачи.
Грача легко отличить от синицы.
А ты попробуй в истребителе отличи
Хорошего ливийца от плохого ливийца.

Или взять такие, *воистину пронзительные*, строки, посвященные как раз *Среднему* (сиречь, *Креативному*) *Классу*:

Пускай пока весь его внешний вид
Являет собой некоторую странность,
В дальнейшем он многопартийность нам сулит,
А главное, сулит нам толерантность.
Он армию контрактную сулит,
Но главное, сулит нам толерантность.
Пускай не завтра и не послезавтра,
Но всё равно ведь все-таки сулит.
Ведь правда же сулит?
Сулит? Скажи, сулишь?
Сулишь? Сулишь, скотина?
Сулит.

Собственно, если сохранять чувство юмора, к автору серьезных претензий быть не может; его вирши — довольно естественная *защитная реакция* на происходящее вокруг (каков вопрос — таков ответ). Емелин поступает в точности, как знаменитый чукча (оленевод?) из анекдота: *что видит, о том и поёт.*

(Анекдот, на всякий случай, в одной из версий, звучит так:
Чукчу посадили, а он сидит и целыми днями поет. Его спрашивают:
– Ты о чем все поешь?
– Однако, что вижу, то пою.
Охране надоело, выключили свет, а он опять поет.
– Ну а теперь-то ты что видишь?
– Однако, темнота вижу.)

Разного рода попрёки и упрёки следует, вероятно, в большей степени отнести к этому самому *вокруг*.

[4] Мы будем называть так кривую второго порядка, представляющую собой в невырожденном случае эллипс, параболу или гиперболу. Известно, что коника однозначно задается 5-ю точками плоскости.

[5] как правило, расположенных на прямых, содержащих стороны рассматриваемого треугольника.

[6] Это — точка, изогонально сопряженная центроиду G. В *ETC* ([6]) она выступает под шестым номером: X_6.

Точка P_l, изогонально сопряженная точке P, получается в результате отражения чевиан данной точки P относительно соответствующих биссектрис — как пересечение новой тройки прямых, содержащих отраженные чевианы.

[7] Так называют треугольник с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника.

[8] J — точка пересечения прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими точками касания вписанной окружности. Она же — X_7 в *ETC* ([6]).

[9] т. е. точки разбиваются на две тройки, и для каждой из них надо записать условие, фигурирующее в теореме Чевы, а после эти условия перемножить

[10] Но привести его очень хотелось: дело в том, что указанная окружность была открыта сравнительно недавно, в начале этого века, нидерландским математиком Ламуном (*Floor van Lamoen*). Это свидетельствует о том, что в элементарной геометрии всё еще остается место подвигу.

[11] т. е. идущих через две.

[12] т. е. замкнутой шестизвенной ломанной, возможно, с самопересечениями.

[13] Здесь и далее все выкладки ведутся именно в них. Подробнее о барицентрических координатах см. [2,3]: глава 14; [5,8].

[14] Хотя во всех случаях компьютер показывает наличие окружности. Однако мы не занимались вопросами существования или отсутствия решений, вырождающих конику в окружность — задача была именно в том, чтобы отыскать явные решения.

[15] Точка P_m, изотомически сопряженная точке P, получается в результате отражения оснований чевиан данной точки P относительно середин соответствующих сторон — как пересечение новой тройки прямых, соединяющих вершины треугольника с противолежащими им отраженными основаниями.

[16] Во всех предыдущих случаях на рисунках изображался эллипс, но вовсе не потому, что коника обязательно имеет именно такой вид — вовсе нет. И парабола, и гипербола также возможны — просто эллипс как-то более радует глаз на рисунке. Ну, вот, ради разнообразия, здесь помещаем одну картинку с гиперболой.

[17] Для удобства вычислений мы считаем здесь и далее (разумеется, не ограничивая общности), что точка P расположена *внутри* треугольника. Для внешних точек результат не меняется.

[18] Кстати, отсюда также следует (по теореме Чевы) *конкурентность* двух троек прямых: AB_a, BC_b, CA_c и AC_a, BA_b, CB_c.

[19] Так как мы исключили из рассмотрения точки, лежащие на прямых, содержащих стороны исходного треугольника, т. е. в тройку координат точки P не могут входить нули.

[20] И является однородным как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[21] Одно из которых, конечно, является следствием остальных. Но, для полноты, выпишем их все.

[22] Несложно убедиться (рассмотрев соответствующую систему уравнений) в том, что случай $f = g = h = 0$ не может быть реализован для рассматриваемого семейства коник.

[23] Эти соотношения легко вывести, располагая уравнением коники и уравнением окружности $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + x)(u_0x + v_0y + z_0x) = 0$ (см. [5,8]).

[24] Чувства, охватившие автора при виде зримого претворения праздной мозговой игры (по выражению Андрея Белого) в проявившуюся на экране ноутбука и Бог весть из недр какого бытия-небытия извлеченную *окружность* — лучше всего, пожалуй, можно описать ёмким словом *«катарсис»*.

Которое, в развернутом и отчасти приземленном переводе с древнегреческого, означает примерно следующее:

– Да, – промолвил Манилов, – уж она, бывало, всё спрашивает меня: «Да что же твой приятель не едет?» – «Погоди, душенька, приедет». А вот вы наконец и удостоили нас своим посещением. Уж такое, право, доставили наслаждение... майский день... именины сердца... (Николай Гоголь. Мертвые души.)

[25] Т. е. такого, для которого исходный треугольник ABC является *серединным*.

[26] *– А не посчитать ли нам, ученые кроты?*

– как говаривали одноименные персонажи замечательного отечественного мультфильма «Дюймовочка» – безусловно, все, как один – *грамотные потребители*, обильное взращивание и пестование которых министр образования Фурсенко (теперь уже бывший) объявил приоритетной задачей российской школы. Представляется, что таковой она (задача) и продолжает оставаться — после отставки Фурсенко.

[27] Это и без всяких вычислений ясно. Вспомнив, как мы определяли нашу конику, видим непосредственно, что в случае центроида каждая из середин сторон исходного треугольника встречается среди точек пересечения соответствующих параллелей (ими будут средние линии) со

сторонами ровно дважды — т. е. имеем, как ни крути, три «двойные» точки в серединах сторон. И если мы в коэффициенты коники подставим $G\,(1:1:1)$, то получим всё то же уравнение вписанного эллипса Штейнера — в чем легко убедиться непосредственно.

[28] После приведения всех координат к общему знаменателю и последующего на него сокращения.

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru