О некоторых окружностях, связанных с треугольником (продолжение)

Алексей Мякишев

Продолжение статьи, начатой в предыдущем номере журнала. Примечания к основному тексту вынесены в конец — в отдельный раздел. Окончание статьи будет опубликовано в следующем номере.

§5. Ничто не ново под луной

5.1. Окружности Дроз-Фарни и Гаврилюка

Заботы авторов (созидателей)[1] чего-либо о собственных *приоритетах* выглядят порою, мягко говоря, *забавно*[2] и не всегда понятны стороннему и далекому от этих дел наблюдателю[3].

Тем не менее, им, авторам, подобное поведение отчего-то свойственно. Ну, и я, со своим, хоть и незначительным, но всё же, как ни крути, открытием, исключения не составил — и попытался навести соответствующие справки. Результаты получились самые поначалу радужные и оптимистические. Во-первых, найденной мною окружности не обнаружилось ни в каких известных мне книжках по элементарной геометрии (не буду «*оглашать весь список*» — но только замечу, что собрал, за пару десятилетий, довольно обширную и неплохую *планиметрическую* библиотеку). Во-вторых, новизну всей конструкции подтвердили такие отечественные эксперты, как *А. В. Акопян, А. А. Заславский, Е. Д. Куланин, Д. П. Мавло* и *Д. В. Прокопенко.*

Было ещё «и в третьих» — некое «косвенное» свидетельство[4] в пользу оригинальности обнаруженной окружности. Распространюсь об этом подробнее, поскольку не следует лишать читателя возможности ознакомиться с замечательной теоремой, в нашей литературе вроде бы отсутствующей.

Осенью прошлого года Д. П. Мавло поведал мне об одной задаче с *Международной Математической Олимпиады-2008*, проходившей в Мадриде. Вот её формулировка:

Пусть H — ортоцентр остроугольного[5] *треугольника ABC. Окружность Γ_A с центром в середине отрезка BC и проходящая через H, пересекает прямую BC в точках A_1, A_2. Точки B_1, B_2, C_1, C_2 определяются аналогично. Докажите, что точки $A_1, A_2, B_1,$ B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. (Андрей Гаврилюк, Россия).*

Информация эта, что греха таить, пришлась мне не очень-то по душе — ведь из неё как будто бы следовало, что сотворение новых окружностей[6] — событие не такое уж и примечательное, вполне себе заурядное. Своеобразная, что ли, *ревность* взыграла[7], если не хуже — *гордыня.*

К тому же не оставляло сразу возникшее ощущение *дежавю* — где-то мне уже что-то подобное встречалось!

Спустя некоторое время удалось вспомнить, где именно: в превосходной книжке Хонсбергера [8]. В одной из её глав как раз рассказывается об *окружностях Дроз-Фарни,* частным случаем которых и является «олимпиадная» окружность[8].

Теорема Дроз-Фарни об окружностях.

Пусть P, P_l — пара изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC, и $P_aP_bP_c$, $P_{l_a}P_{l_b}P_{l_c}$ — педальные треугольники[9], отвечающие этим точкам. Рассмотрим три окружности с центрами в вершинах педального треугольника точки P (т. е. в точках P_a, P_b, P_c) и проходящие через P_l и отметим точки пересечения этих окружностей со сторонами BC, CA, AB соответственно: $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$. Тогда всё эти шесть точек лежат на одной окружности с центром в точке P. Аналогично, если поменять ролями точки $P \leftrightarrow P_l$ — получим шесть точек $A_{1l}, A_{2l}, B_{1l}, B_{2l}, C_{1l}, C_{2l}$, расположенных на окружности с центром в точке P_l. При этом обе окружности *одинаковы*, т. е. имеют один и тот же радиус[10], рис. 1.

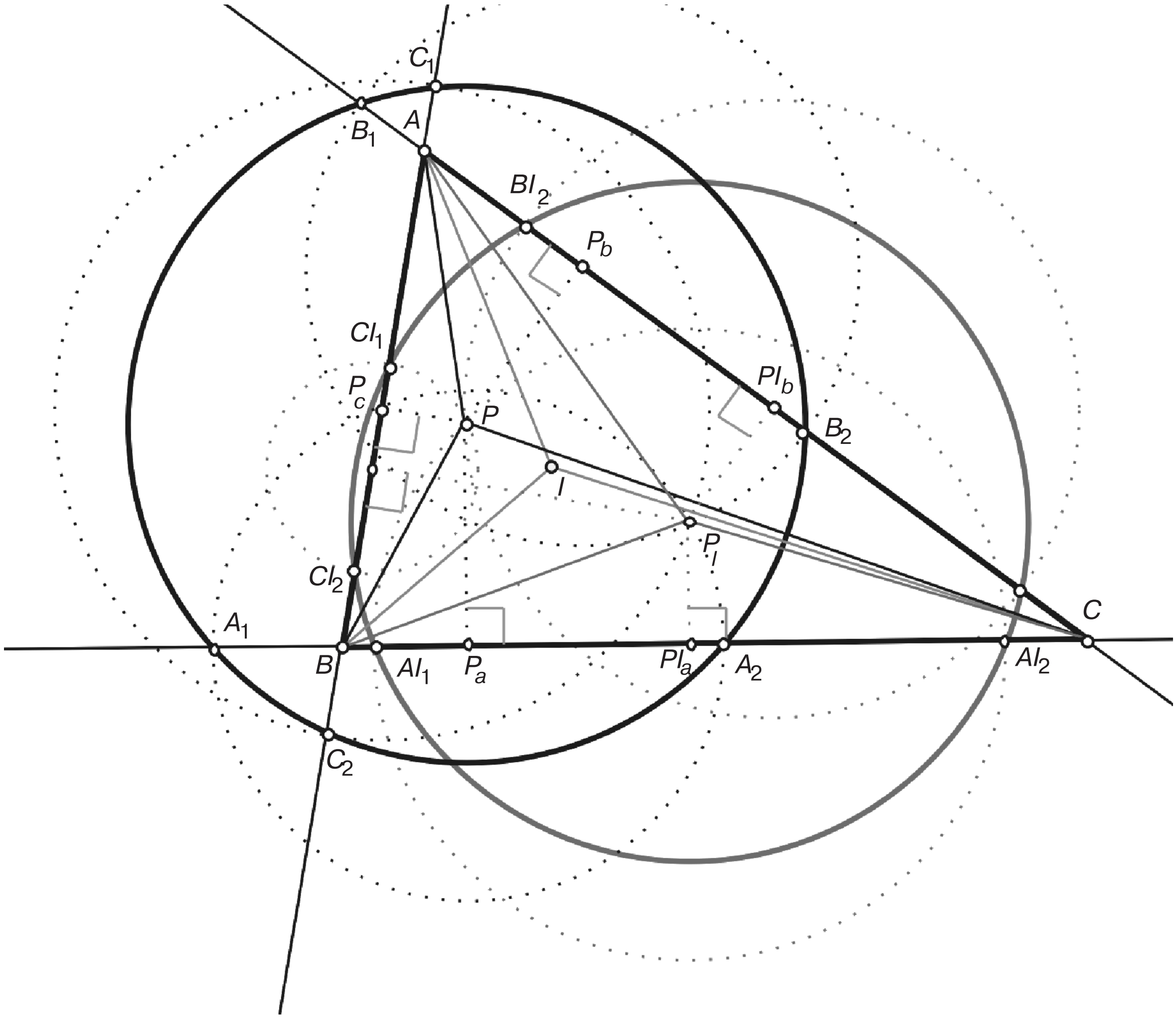


Рис. 1

Поскольку точки O и H *изогонально сопряжены* (см. [1],[2] [3] – задача 2.1), то, как видим, окружность Гаврилюка есть не что иное как одна из окружностей Дроз-Фарни для этой пары точек (ведь педальный треугольник центра описанной окружности O в точности и есть серединный треугольник $A_0B_0C_0$ треугольника ABC), рис. 2.

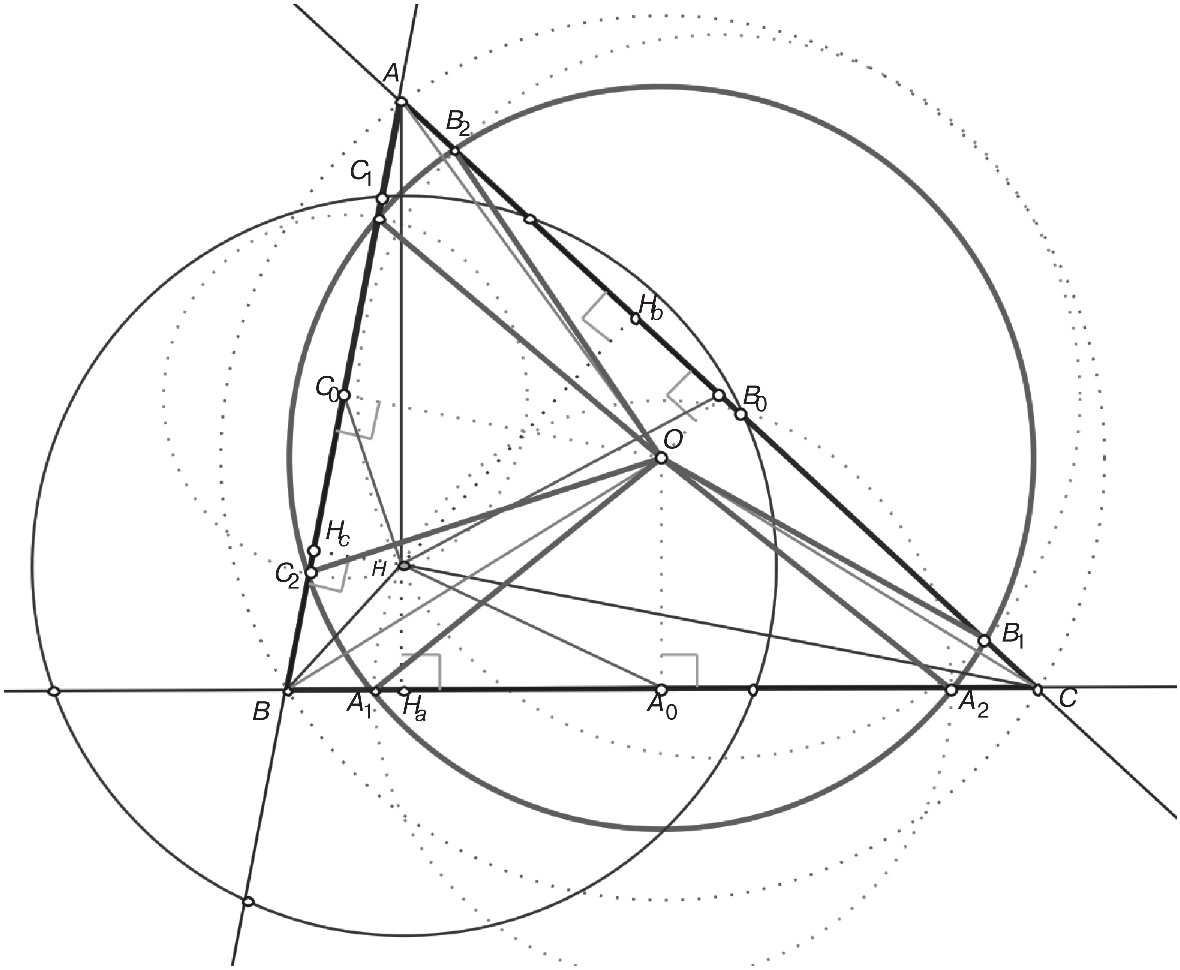
Доказательство теоремы Дроз-Фарни подкупает свой нежданной простотой, и потому мы не можем здесь его не привести.

Понадобится, впрочем, пара вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (*об общей окружности, описанной около педальных треугольников изогонально сопряженных точек* (см.[3], задача 5.125 а)), рис. 3.

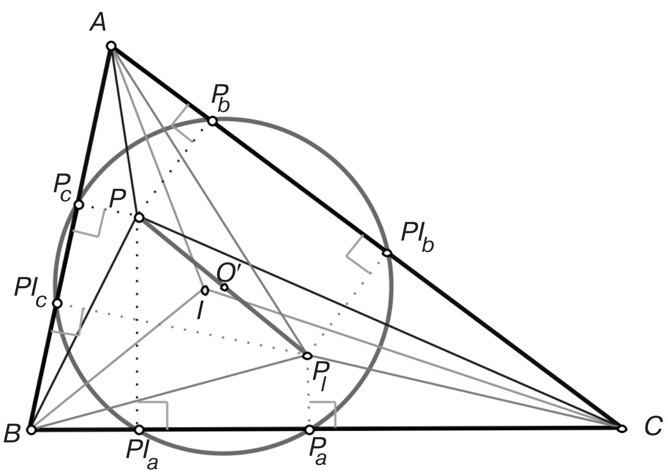
Пусть P, P_l — пара изогонально сопряженных точек относительно треугольника ABC, и $P_aP_bP_c$, $P_{l_a}P_{l_b}P_{l_c}$ — педальные треугольники, отвечающие этим точкам. Тогда все шесть вершин $P_a, P_b, P_c, P_{l_a}, P_{l_b}, P_{l_c}$ лежат на одной окружности, центр которой O' является серединой отрезка PP_l.

Замечание. В случае принадлежности точки P описанной около ABC окружности можно считать общей окружностью педальных треугольников соответствующей пары изогонально сопряженных точек прямую Симсона точки P. Дело в том, что в этом случае изогонально сопряженной точкой P_l будет точка *бесконечно удаленная,* причем в направлении, *перпендикулярном* прямой Симсона точки P ([2], [3] — задачи 5.113, 5.115). Можно далее показать, что при удалении точки P' вдоль этого направления, окружность, описанная около педального треугольника P', стремится «выродиться» в прямую Симсона точки P, рис. 4.



A
B
C
B_2
C_1
H_b
C_0
B_0
O
H_c
C_2
H
B_1
A_1
H_a
A_0
A_2

Рис. 2



A
P_b
P_c
P
PI_b
PI_c
O′
I
P_I
B
C
PI_a
P_a

Рис. 3

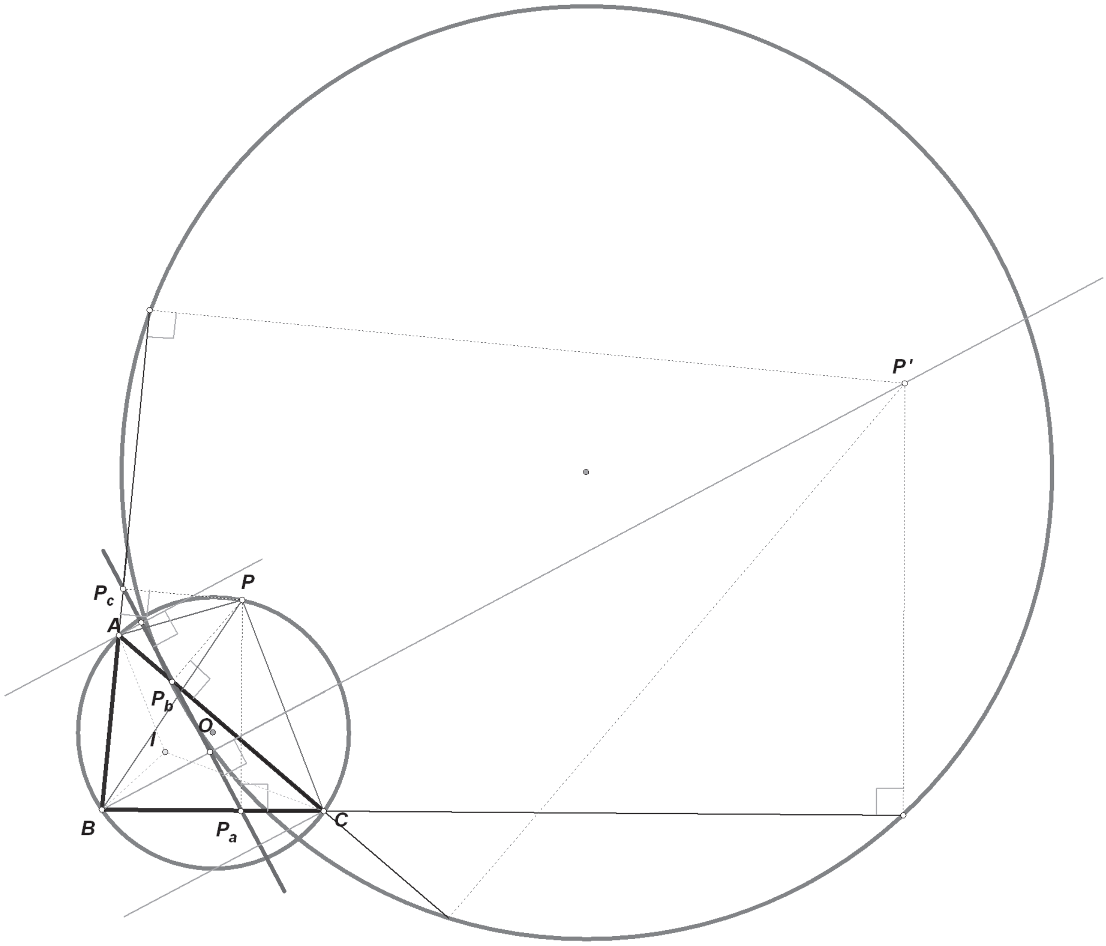


Рис. 4

Лемма 2 (формула длины медианы). Медиана AA_1, проведенная (например) к стороне BC треугольника ABC, вычисляется по формуле $4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2$ (легко доказывается с помощью теоремы косинусов, которую следует применить дважды: к треугольникам AA_1B и AA_1C, а затем из полученных равенств исключить $\cos\angle AA_1B = -\cos\angle AA_1C$).

Доказательство теоремы Дроз-Фарни.

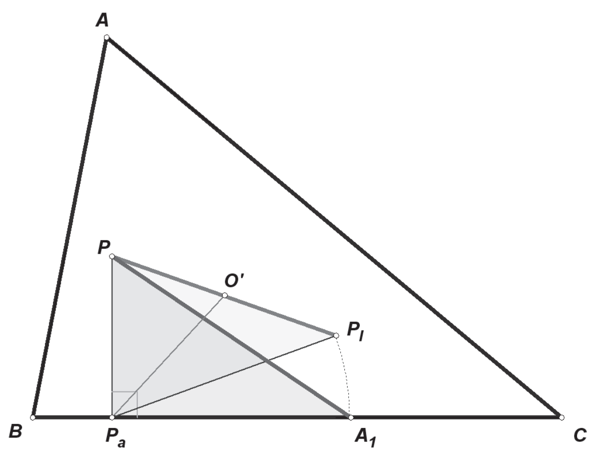


Рис. 5

Пусть $d = PP_l$ — расстояние между изогонально сопряженными точками, рис. 5, а $\rho =$

$O'P_a$ — радиус окружности, описанной около педальных треугольников этих точек (см. лемму 1).

По условию, $P_aP_l = P_aA_1$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику PP_aA_1, тогда имеем: $PA_1^2 = PP_a^2 + P_aA_1^2 = PP_a^2 + P_aP_l^2$. Однако, по формуле длины медианы (для треугольника P_aPP_l и его медианы P_aO'), получаем, что $\rho^2 = P_aO'^2 = (2PP_a^2 + 2P_aP_l^2 - PP_l^2)/4 \Rightarrow 2\rho^2 = PP_a^2 + P_aP_l^2 - \frac{1}{2}PP_l^2 \Rightarrow 2\rho = PA_1^2 - \frac{d^2}{2} \Rightarrow PA_1 = \sqrt{2\rho^2 + \frac{1}{2}d^2} = \text{const}$. Понятно, что если бы вместо точки A_1 стояла любая из точек A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — результат бы не изменился, все эти точки оказались бы удалены от точки P на то же самое расстояние. Тем самым доказана принадлежность точек $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ окружности с центром в точке P и радиуса $R' = \sqrt{2\rho^2 + \frac{1}{2}d^2}$. Совершенно аналогично доказывается, что и точки $A_{1l}, A_{2l}, B_{1l}, B_{2l}, C_{1l}, C_{2l}$ принадлежат одной окружности с центром в точке P_l и того же радиуса.

5.2. В поисках утраченной геометрии

Итак, обнаруженная мною окружность, судя по всему, оказалась действительно *новой*. Но шибко веселиться и впадать в разную прочую эйфорию по этому поводу мешали два обстоятельства.

Во — первых, *единственное замечательное свойство* этого объекта пока что[11] заключалось исключительно в его *существовании*. Конечно, «*спасибо, что ты есть*», как говорится — но всё же, для того, чтобы попасть на страницы будущих учебников и задачников по геометрии, одного этого обстоятельства не достаточно, как это ни прискорбно.

Во-вторых (собственно, всё то же самое «во-первых»), с точки зрения *истинного любителя и ценителя* элементарной геометрии, никуда не годилось и *доказательство существования*, исключительно *вычислительное* по своей природе — а стало быть, никак не вскрывающего *геометрической сути* происходящего.

Около месяца ушло на попытки, в общем-то, бесплодные — постичь эту самую *геометрию задачи*.

Единственное, что удалось, — разбавить сплошные вычисления слабым геометрическим раствором. Опишу вкратце, как именно.

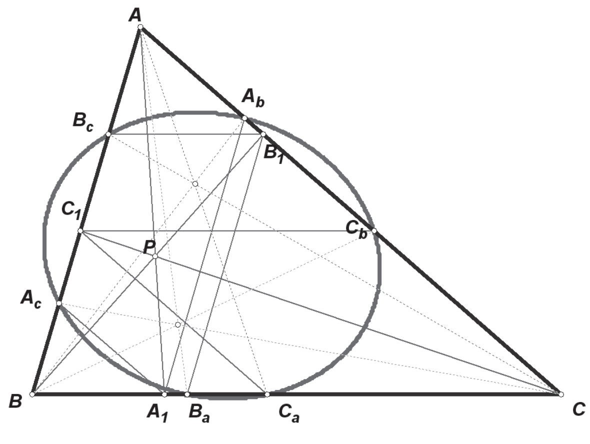


Рис. 6

Вернемся ненадолго в §2 и рассмотрим *три четверки точек:* C_b, A_b, B_c, A_c; B_c, A_c, B_a, C_a и B_a, C_a, C_b, A_b, рис. 6. Оказывается, все шесть точек $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ лежат на одной окружности в том, и только в том случае, когда все *три четырехугольника* с вершинами в указанных четверках являются *вписанными в окружности*.

Необходимость очевидна, а достаточность вытекает из следующих соображений.

Каждая пара окружностей (из трех, заданных по условию) имеет общую хорду, расположенную на прямой, содержащей соответствующую сторону исходного треугольника ABC. То есть, прямые, содержащие стороны треугольника, являются *радикальными осями* (см. [3], задачи 3.58, 3.59) соответствующих пар окружностей. Однако известно, что *радикальные оси трех попарно неконцентрических окружностей пересекаются в одной точке* (или параллельны, если центры окружностей коллинеарны — т. е. всё равно пересекаются, но в бесконечно удалённой точке) — т.н. *радикальном центре трех окружностей* (см. [3], задача 3.60). Поскольку прямые, проходящие через стороны треугольника, заведомо в одной точке не пересекаются и не параллельны — отсюда следует, что хотя бы одна пара окружностей концентрична, т. е. имеет общий центр. А поскольку у этой пары есть общие точки (целых две), то окружности в этой паре просто-напросто *совпадают*. Значит, совпадают и все три, и точки $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ — *коцикличны*. Вот и вся геометрия, которую мне удалось здесь «нарыть».

А далее, в одну сторону, остается доказать вписанность хотя бы одного из четырехугольников, порожденных точкой X_{194} (так как для двух других, в силу *симметрии* конструкции относительно сторон и вершин треугольника ABC, пройдут точно такие же рассуждения). И обратно, как-то ещё желательно пояснить, почему других точек с таким свойством нету.

Механическим счетом «пробить» всё это, опять же, не составляет ни малейших затруднений — причём при таком подходе уже не требуется специальных «тайных» знаний, доступных только узкому кругу *посвященных* лиц: вроде уравнений коники или окружности в барицентрических координатах. Действительно, с учетом того, что входящие в любой школьный курс планиметрии теоремы о произведении хорд и о касательной и секущей[12] (в совокупности приводящие к понятию *степени точки относительно окружности* — см. [3], задачи 3.54–3.56) допускают естественное *обращение* (доказательство использует признак подобия треугольника по углу и отношению соответствующих сторон, а затем — известные достаточные условия вписанности четырехугольника: по равенству углов, опирающихся на один отрезок и с вершинами, расположенными в одной относительно него полуплоскости, или дополняющих друг друга до развернутого, если вершины попадают в разные полуплоскости) — сразу получим систему уравнений, отвечающих за «вырождение» коники в окружность:

$$\begin{cases} AA_c \cdot AB_c = AA_b \cdot AC_b \\ CC_b \cdot CA_b = CC_a \cdot CB_a \\ BB_a \cdot BC_a = BB_c \cdot BA_c \end{cases}$$

Фигурирующие в этой системе отрезки легко выражаются через отношения, в котором точки $C_b, A_b, B_c, A_c, B_a, C_a$ делят соответствующие стороны треугольника — и, стало быть, через барицентрические координаты точки P (и стороны треугольника).

В результате без особых хлопот получаем уже знакомую нам по §3 (утверждение 3.4) цепочку равенств :

$$\frac{(p+r)\,(p+q)}{a^2} = \frac{(q+p)\,(q+r)}{b^2} = \frac{(p+r)\,(q+r)}{c^2}$$

(проверьте!) .

В конце концов, отчаявшись выявить геометрическую суть (читай «*душу*»!)[13] объекта собственными силами, я решился *«воззвать к народу»* , т. е. обратиться за помощью к знатокам. И *«...произошли тогда изумительные происшествия. А какие — тому следуют пункты...»* [14].

5.3. Вот это сюрприз!

Сперва (по совету А. В. Акопяна) «*запостился*» я на сайте *Art of Problem Solving* (см. [11][15], *Geometry Unsolved Problems*, послание от 08.11.2011), описав конструкцию, ведущую к новой («as I hope») окружности и посетовав на то, что никак не удается отыскать чисто геометрического доказательства.

Ответа не последовало — хотя само сообщение и было просмотрено посетителями сайта более 150-ти раз[16].

Тогда весточка ровно такого же содержания была отослана *Гиацинтам*[17] (см. [10] — message # 20303).

Тут-то и стряслось страшное: Поль Ю (Paul Yiu), главный редактор превосходного электронного журнала *Forum Geometricorum* (см. [12]), *любезно сообщил*, что окружность, о которой упоминается в моем письме, была открыта ещё в 2002 году французским геометром Бернардом Жибером (Bernard Gibert) — см. [10] — messages #20310, #5710.

Чуть позже откликнулся и сам Жибер, указав ещё, что данная окружность также рассматривается в одной из его работ (см. [10] — message #20311, [14])[18].

Подводя итоги (для меня — *безрадостные), Жан-Пьер Эрманн*, не без юмора[19], заметил:

«Dear Paul, Bernard, Alexei and other Hyacinthists, a good advice: before posting a message, we must read carefully the complete works of Bernard. Friendly. Jean-Pierre»

([10] — message #20312)

А Поль Ю поставил последнюю точку (вбил последний гвоздик):

«Sound advice from Pope[20]*.»* ([10] — message #20313).

Да, то был удар сокрушительный и чрезвычайно болезненный[21]! Какие-то, стыдно сказать, *"патриотические"* строчки замелькали даже тогда в голове:

— Скажи-ка, дядя, ведь не даром

Москва, спаленная пожаром,

Французу отдана?

Ну, и т.п. [22].

5.4. Окружность Долгирева – Ю

Но прежде чем окончательно погрузиться в депрессию[23], по инерции послал я запрос относительно ещё одной окружности, на сей раз не моей (см. [10], message # 20316) — но обнаруженной, буквально на моих глазах, в конце прошлого лета *Павлом Долгиревым* (в настоящее время Павел — студент *физтеха*).

Так вот, сперва Долгиреву удалось выявить некое семейство коник — а именно, оказалась справедливой такая теорема (о кониках *Долгирева*):

Пусть K *— произвольная коника в плоскости данного треугольника* ABC*. Проведем из вершины* A *пару касательных к конике*[24]*, пересекающих прямую* BC *в точках* A_1, A_2*. Точки* B_1, B_2, C_1, C_2 *определяются аналогично.*

Тогда точки $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ *лежат на одной конике,* рис. 7. Доказывается этот факт с помощью теорем Брианшона, Чевы и Карно — детали см. в [13].

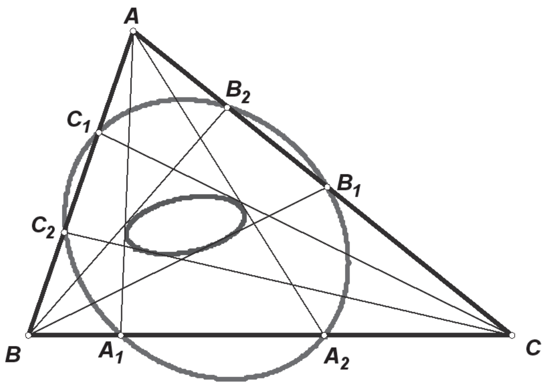


Рис. 7

А затем, руководствуясь исключительно эстетическими соображениями (*чувством гармонии* или *прекрасного;* если угодно, *симметрии* в самом широком — неформальном — смысле), Павел заподозрил, что его конструкция *могла бы* породить окружность[25] при следующих условиях:

Пусть $A'B'C'$ *— треугольник Жергонна исходного треугольника* ABC *(т. е. треугольник с вершинами в точках касания вписанной в* ABC *окружности). Впишем в этот треугольник окружность и проведем из вершин треугольника* ABC *касательные до пересечения* *с соответствующими противолежащими сторонами. Тогда все шесть точек пересечения $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ лежат на одной окружности.*

Надлежащий чертежик в «Живой Геометрии» эти предположения подтвердил, рис.8.

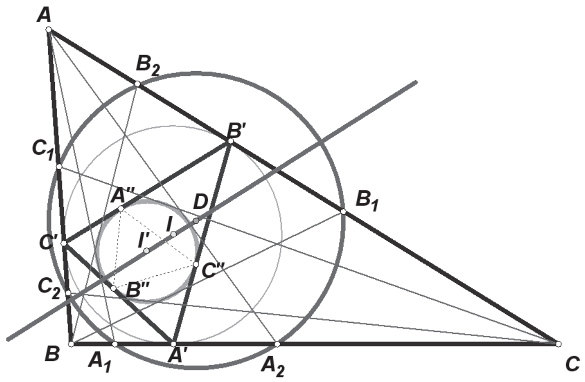


Рис. 8

А экспресс-опрос некоторых наших крупных специалистов[26] показал (как получилось и в моём случае — но только месяцем раньше), что, если эта окружность и не является произведением совершенно *оригинальным* — то, *по-любому*, очень близка к тому, чтобы оказаться таковым.

Итак, именно о ней я и написал в Гиацинты. Почти сразу отозвался уже упомянутый ранее Поль Ю. Он указал (см. [10], message ## 20318, 20319), что центр этой окружности[27] лежит на прямой $O'I'$ (проходящей через центры вписанной (I') и описанной ($O' = I$) около $A'B'C'$ окружности, и являющейся (см. [3], задача 5.136) *прямой Эйлера* треугольника Жергонна $A''B''C''$ — для треугольника $A'B'C'$), причем делит отрезок $O'I'$ *внешним образом* в отношении $\frac{O'D}{I'O} = \left(\frac{r}{r+r'}\right)^2 = \left(\frac{R'}{R'+r'}\right)^2$, где $r = R'$ — радиус описанной около $A'B'C'$ окружности (и он же — вписанной в ABC), а r' — вписанной в $A'B'C'$ [28].

И, хотя никаких ссылок на какие-либо источники американский геометр и не привёл[29], из содержания и тона его сообщений вроде бы выходило, что затронутая тема для него давно уже не откровение.

А в послании #20321 (см. [10]) неугомонный Ж.-П.Эрманн и сюда привнёс свою лепту, приведя соотношение, выражающее радиус ρ окружности Долгирева – Ю через $r = R'$ и r':

$$\rho = \frac{R'^2\sqrt{(R'+r')^2 + r'^2}}{r'\,(2R'+r')}.$$

В рассмотренных только что формулах, наверняка, кроются и подходы к геометрическому доказательству теоремы, не обещающему быть суперсложным — и, во всяком случае, на порядки менее затратному, чем барицентрически-вычислительное[30] (в отличие от конструкции Жибера — где всё происходит с точностью до наоборот). Заинтересованный читатель может попробовать свои силы, доказав соотношения Ю и использовав всякие возникающие здесь гомотетии.

5.5. Добавочные окружности Долгирева – Ю

Окружность Долгирева–Ю можно смело отнести к т.н. *слабым* (*weak*) объектам[31] — это когда основной объект задается параметрами, *симметрично* зависимыми от сторон и углов треугольника — генератора (при этом барицентрические координаты, его описывающие, получаются друг из друга *циклическими перестановками* по типу $a \to b \to \to c \to a$) и плюс к тому имеет, по крайне мере, три родственные ипостаси, в которых симметрия нарушается в пользу одной из сторон (углов). Классический пример доставляет вписанная окружность и её центр $I\,(a:b:c)$ вкупе с сопутствующей тройкой вневписанных окружностей (касающихся одной из сторон треугольника и двух продолжений) и их центров $I_a\,(-a:b:c)$, $I_b\,(a:-b:c)$, $I_c\,(a:b:-c)$.

В случае окружности Долгирева – Ю имеем аж *девять*(!) её *вариаций*[32] — см. рисунки 10 – 12 ниже (без особых комментариев — разве только отметим, что первая тройка реализуется не для всех треугольников, см. рис. 9).

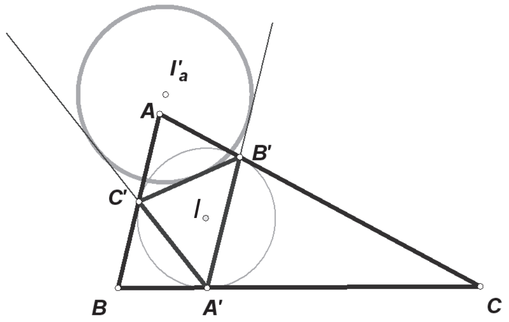


Рис. 9

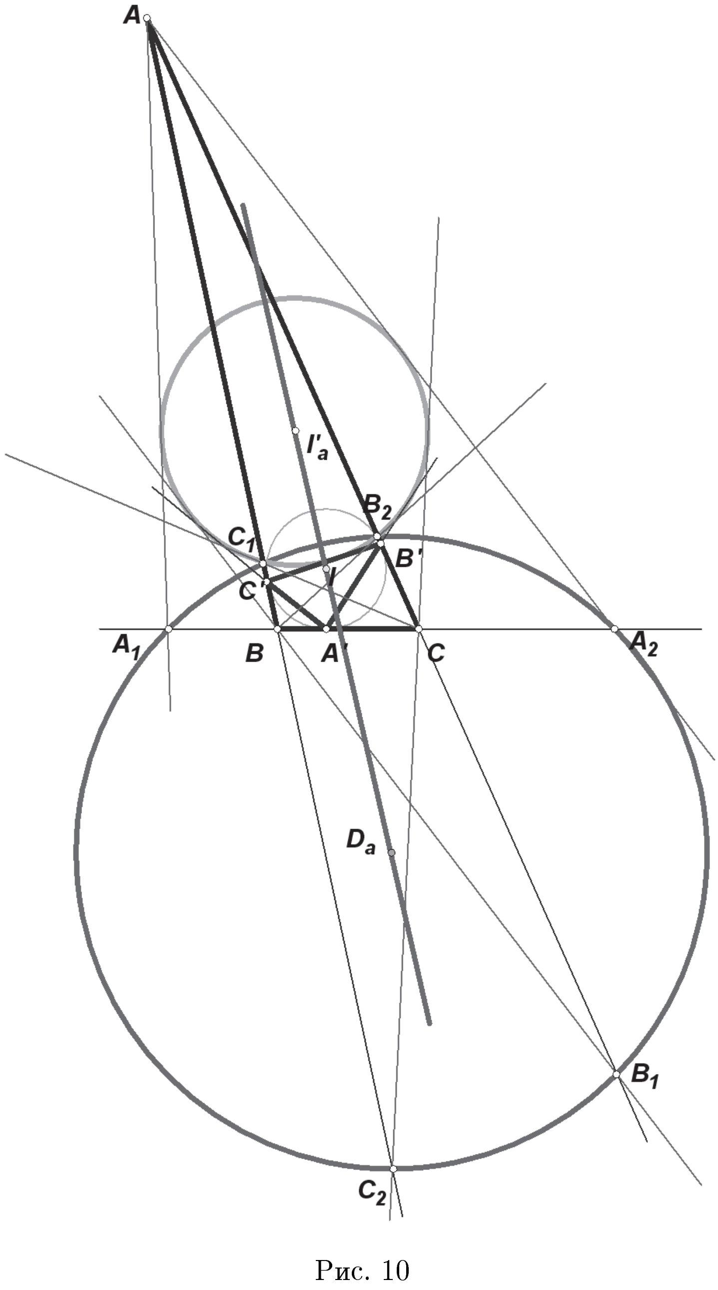


Рис. 10

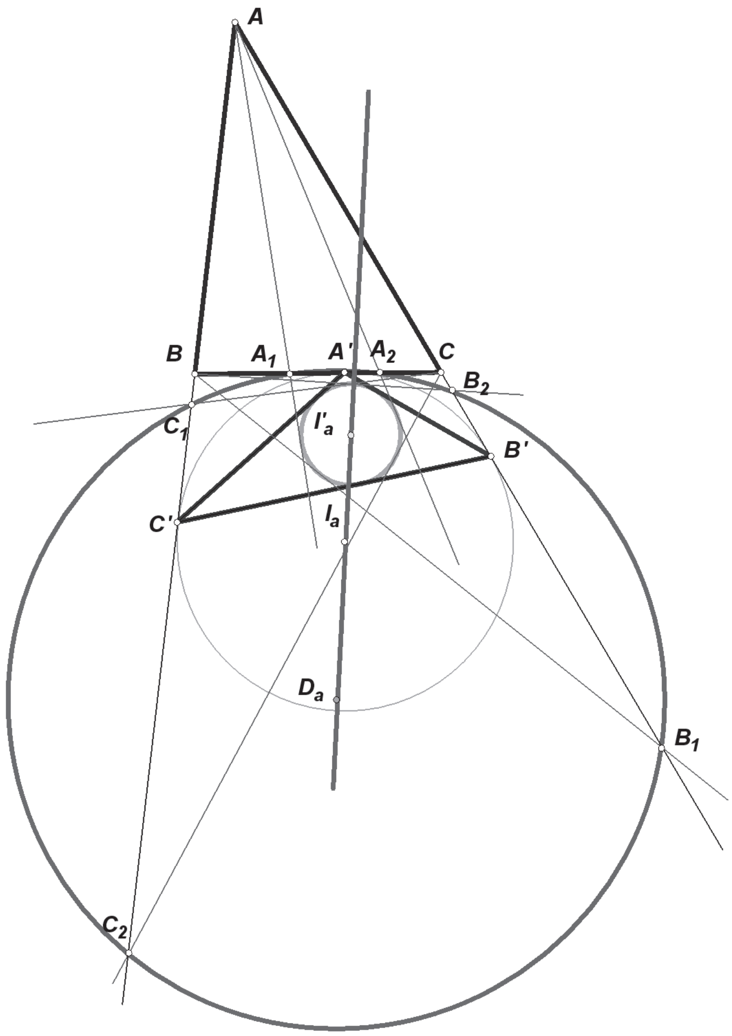


Рис. 11

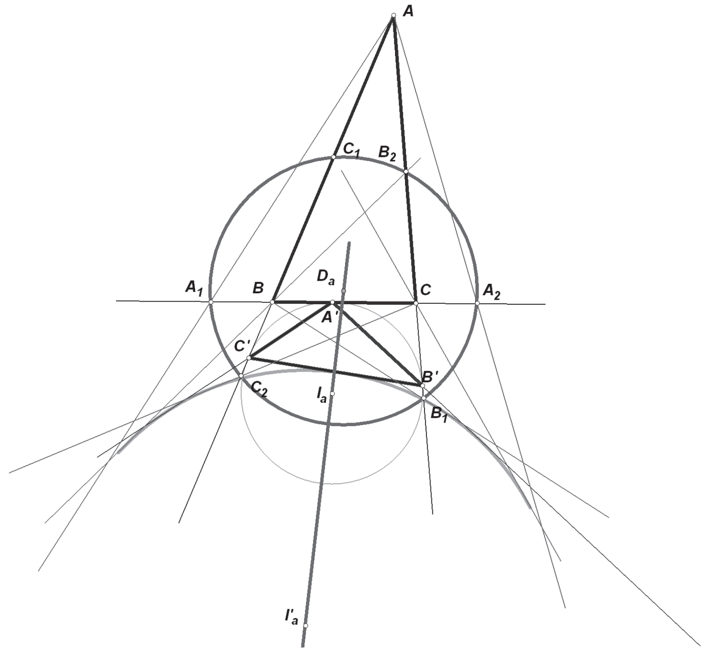


Рис. 12

§6. Чаянная радость: конструкция вторая

В общем, после всех этих бурных перипетий, ожидаемо и совершенно неотвратимо, взяли меня в оборот хандра, сплин, зеленая тоска и пр. и пр. Прямо как в одной душевной песне[33] поется, одолели упадочные настроения. Однако, спустя какое-то время, удалось всё же взять себя в руки[34].

К великому счастью, обнаружилось, что запас *параллельных конструкций* был исчерпан не полностью — нашлась-таки среди них ещё одна «*разрешимая*»!

А что будет, если попробовать рассмотреть конструкцию, схожую с описанной в §1 (1.2), которая приводит к окружности Тейлора — с той только разницей, что в её определении поменять соответствующие чевианы местами? Т.е. если сначала мы считали, что C_a — точка пересечения BC и прямой, проходящей через C_1 параллельно чевиане AA_1, то теперь положим в роли C_a — точку пересечения BC и прямой, проходящей через C_1 параллельно чевиане BB_1 — и т.д.

Идея оказалась довольно плодотворной — поскольку на выходе получились не одна, а целых три окружности! Но обо всем по порядку.

Итак, теперь за основу мы берем такую конструкцию:

Пусть P — произвольная точка в плоскости треугольника ABC, но не лежащая на прямых, содержащих его стороны. Пусть, далее, $A_1 \in (BC), B_1 \in (CA), C_1 \in (AB)$ - основания чевиан этой точки. Через точку A_1 проведем прямые, параллельные чевианам CC_1 и BB_1 — и отметим точки A_b, A_c пересечения этих прямых с прямыми, содержащими стороны AC и AB соответственно. Точки B_a, B_c, C_a, C_b определяются аналогично.

Утверждение 6.1. Точки A_b, A_c,B_a, B_c, C_a, C_b всегда принадлежат одной конике, рис. 13.

Доказательство. Выпишем левую часть условия *Карно* и заменим входящие в него отношения по подобию:

$$\left(\frac{BB_a}{CB_a}\cdot\frac{BC_a}{CC_a}\right)\cdot\left(\frac{CC_b}{AC_b}\cdot\frac{CA_b}{AA_b}\right)\cdot\left(\frac{AB_c}{BB_c}\cdot\frac{AA_c}{BA_c}\right)=$$
$$=\left(\frac{BB_1}{PB_1}\cdot\frac{PC_1}{CC_1}\right)\cdot\left(\frac{CC_1}{PC_1}\cdot\frac{PA_1}{AA_1}\right)\cdot\left(\frac{PB_1}{BB_1}\cdot\frac{AA_1}{PA_1}\right)=1.$$

Утверждение 6.2. Пусть $P=(p:q:r)$ [35]. Тогда барицентрические координаты рассматриваемых шести точек имеют вид:

$$B_a=(0:-q:s)\,,B_c=(s:-q:0)\,,C_a=(0:s:-r)\,,$$
$$C_b=(s:0:-r)\,,A_b=(-:0:s)\,,A_c=(-p:s:0)\,,$$

где $s=p+q+r$ — суммарная масса точки P.

Доказательство. Ясно, что $\frac{BB_a}{CB_a}=\frac{BB_c}{AB_c}=\frac{BB_1}{B_1P}$. Но, по правилу группировки, точка P является центром масс системы материальных точек $qB, (p+r)\,B_1$. Поэтому из правила рычага вытекает, что $\frac{BP}{B_1P}=\frac{p+r}{q}$. Значит, $\frac{BB_1}{B_1P}=\frac{BP+B_1P}{B_1P}=1+\frac{p+r}{q}=\frac{p+q+r}{q}=\frac{s}{q}\Rightarrow B_a=(0:-q:s)\,,B_c=(s:-q:0)$. (Знак «минус» в случае рассматриваемого расположения точек берется потому, что отрезки BC и BA делятся точками B_a и B_c в соответствующих отношениях *внешним образом*. Но и во всех остальных вариантах все равно получаются такие же координаты). Для остальных точек рассуждения аналогичны.

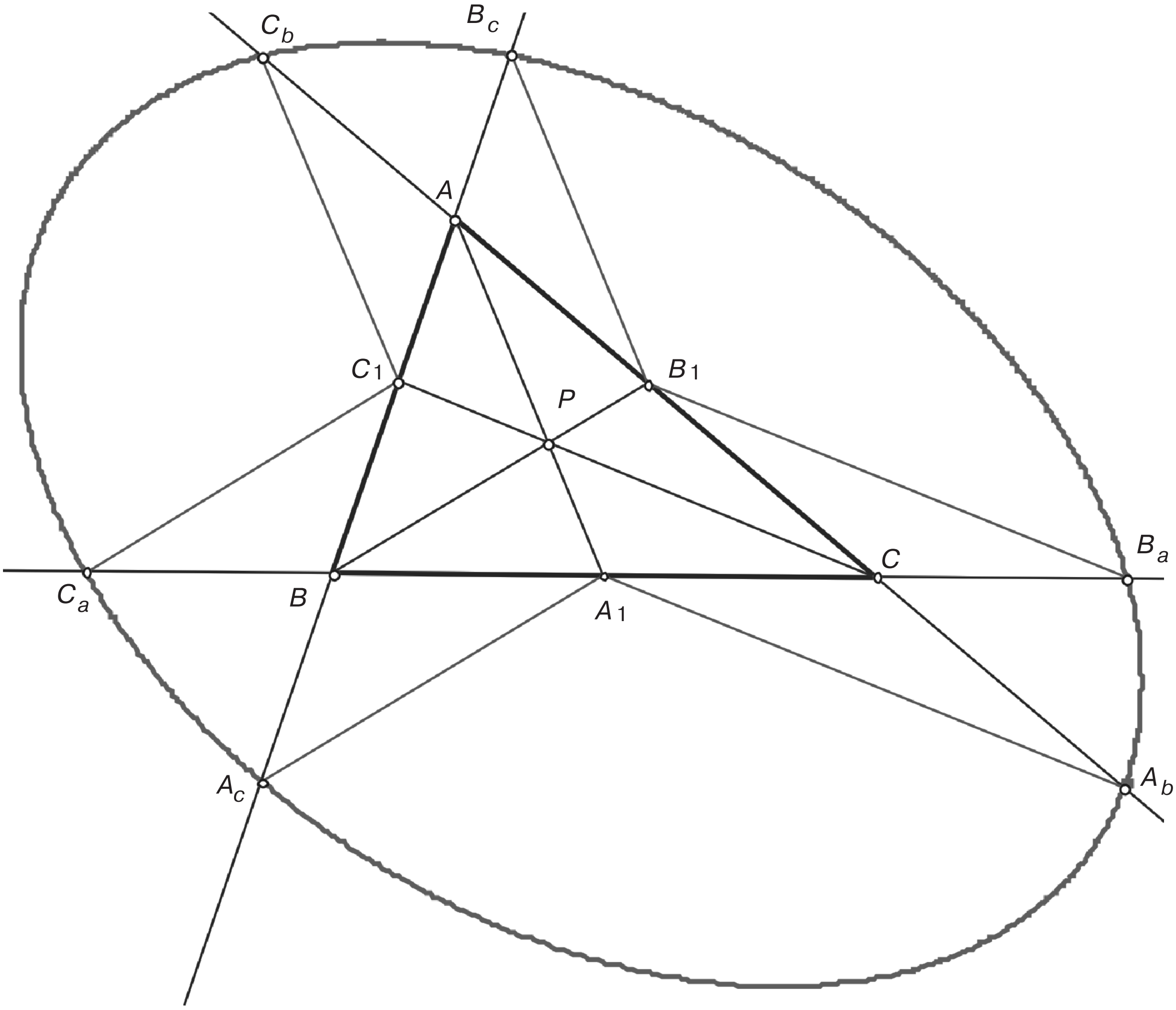


Рис. 13

Далее действуем по схеме, апробированной в §3.

Вначале выведем уравнение коники, проходящей через эти точки, пользуясь тем, что в барицентрических координатах уравнение коники имеет вид[36]:

$$ux^2 + vy^2 + \omega z^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0.$$

([6], [9])

Утверждение 6.3. Коэффициенты коники, проходящей через точки $B_a = (0 : -q : s)$, $B_c = (s : -q : 0)\,, C_a = (0 : s : -r)\,, C_b = (s : 0 : -r)\,, A_b = (-p : 0 : s)\,, A_c = (-p : s : 0)$, (где $s = p + q + r$ — *суммарная масса точки* P) могут быть представлены в виде:

$$u = 2rqs;\ v = 2prs;\ w = 2qps;\ f = p(s^2 + qr);\ g = q(s^2 + pr);\ h = r(s^2 + pq).$$

Доказательство. Подставив координаты точек в уравнение коники, придем к системе из 6-ти уравнений[37]:

$$\begin{cases} B_a : vq^2 + ws^2 - 2fqs = 0 & (1) \\ C_a : vs^2 + wr^2 - 2frs = 0 & (2) \\ C_b : us^2 + wr^2 - 2grs = 0 & (3) \\ A_b : up^2 + ws^2 - 2gps = 0 & (4) \\ A_c : up^2 + vs^2 - 2hps = 0 & (5) \\ B_c : us^2 + vq^2 - 2hqs = 0 & (6) \end{cases}$$

Из первых двух имеем:

$$v\left(q-\frac{s^2}{r}\right)=\omega\left(r-\frac{s^2}{q}\right)\Leftrightarrow\frac{v}{r}\left(s^2-qr\right)=\frac{w}{q}\left(s^2-qr\right).$$

Таким образом, или $\frac{v}{r}=\frac{w}{q}$, или $s^2-qr=0$. Третье и четвертое уравнение ведет к ветвлению $\frac{w}{p}=\frac{u}{r}$ или $s^2-rp=0$. И, наконец, пятое и шестое — $\frac{u}{q}=\frac{v}{p}$или $s^2-pq=0$.

Будем пока считать, что «правые» альтернативы не имеют места. (Равенства правых частей нулю будут рассмотрены в §7).

Далее, в силу однородности уравнения коники, можно положить $h=1$.**[38]**. Тогда, подставив выражение $v=\frac{p}{q}u$ в (5), получим: $us^2+\frac{p}{q}q^2u-2sq=0\Rightarrow u=\frac{2qs}{pq+s^2}$. Значит, $w=\frac{p}{r}\cdot u=\frac{2pqs}{r(pq+s^2)}$; $v=\frac{r}{q}w=\frac{2ps}{pq+s^2}$. Наконец, отыщем f и g.

Подстановки в (3) и (1) быстро ведут к цели:

$$\frac{2qsr\cdot p^2+2pqs\cdot s^2}{(pq+s^2)r}=2gps\Rightarrow\frac{qp}{qp+s^2}+\frac{qs^2}{r\left(pq+s^2\right)}=g\Rightarrow g=\frac{q}{r}\frac{rp+s^2}{pq+s^2}$$

и аналогично

$$f=\frac{p}{r}\frac{qr+s^2}{pq+s^2}.$$

Чтобы получить теперь искомые формулы для коэффициентов, остается домножить их все на величину $k=pq+s^2$.

Согласно [6], коника вырождается в окружность, если и только если выполняются следующие равенства: $\frac{v+w-2f}{a^2}=\frac{w+u-2g}{b^2}=\frac{u+v-2h}{c^2}=\lambda\,(\neq 0)$ **[39]**.

Утверждение 6.4. В данной конструкции уравнения вырождения коники (порожденной точкой с барицентрическими координатами $P=(p:q:r)$) в окружность имеют вид:

$$\frac{p}{(s-p)\,a^2}=\frac{q}{(s-q)\,b^2}=\frac{r}{(s-r)\,c^2},\quad\text{где}\quad s=p+q+r.$$

(Назовем эти уравнения *ключевыми.*)

Их можно записать также и в виде $\frac{p}{(q+r)a^2}=\frac{q}{(r+p)b^2}=\frac{r}{(p+q)c^2}$.

В *абсолютных* же барицентрических координатах (т. е. таких, что**[40]** $s=p+q+r=1$) ключевые уравнения, понятно, должны удовлетворять соотношениям**[41]** $\frac{p}{(1-p)a^2}=\frac{q}{(1-q)b^2}=\frac{r}{(1-r)c^2}$.

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}v+w-2f&=2prs+2qps-2p\left(qr+s^2\right)=2p\left(rs+qs-qr-s^2\right)=2p\left(s\left(r+q-s\right)-qr\right)=\\&=2p\left(-sp-qr\right)=-2p\left(qr+p^2+qp+rp\right)=\\&=-2p\left(q\left(r+p\right)+p\left(r+p\right)\right)=-2p\left(q+p\right)\left(r+p\right),\end{aligned}$$

и остальные числители выражаются аналогично, то условие вырождения коники в окружность запишется в виде:

$$\frac{-2p\left(q+p\right)\left(r+p\right)}{a^2}=\frac{-2q\left(r+q\right)\left(p+q\right)}{b^2}=\frac{-2r\left(p+r\right)\left(q+r\right)}{c^2}.$$

Или, поделив все равенства на $k=-2\left(q+r\right)\left(r+p\right)\left(p+q\right)$,

$$\frac{p}{\left(q+r\right)a^2}=\frac{q}{\left(r+p\right)b^2}=\frac{r}{\left(p+q\right)c^2}.$$

Утверждение 6.5. Рассматриваемое семейство коник содержит, если исходный треугольник ABC является *неравносторонним* (т.е. таким, в котором нет даже пары равных сторон), целых три различных *окружности* $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, порождаемых (*отсутствующими в ETC* ([7])) точками P_1, P_2, P_3, абсолютные барицентрические координаты которых вычисляются по следующим формулам (как обычно, здесь a, b, c — длины сторон треугольника ABC): при $k = 1, 2, 3$

$$P_k = \left(p_k = \frac{1}{1+p'_k} : q_k = \frac{1}{1+q'_k} : r_k = \frac{1}{1+r'_k}\right),$$

где

$$p'_k = \frac{C}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right), \quad q'_k = \frac{C}{b^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right),$$
$$r'_k = \frac{C}{c^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right)$$

и

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$
$$\varphi = \arcsin\left(-8a^2b^2c^2C^{-3}\right) = \arcsin\left(-3\sqrt{3}\frac{a^2b^2c^2}{\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right)\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\right).$$

При этом точки P_1, P_3 всегда расположены *вне* треугольника ABC, а точка P_2 — *внутри*.

В случае *равностороннего* треугольника точка P_2 (совпадающая с центроидом правильного треугольника) порождает окружность ω_2, концентрическую описанной около ABC окружности, причем её радиус выражается через радиус описанной окружности по формуле $R_2 = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, а точки P_1, P_3 не определены.

В случае *равнобедренного* треугольника две точки (в число которых обязательно попадает P_2) принадлежат прямой, содержащей ось симметрии треугольника, третья же вырождается в бесконечно удаленную точку основания[42].

Доказательство. Рассмотрим ключевые уравнения, записанные в абсолютных координатах:

$$\left\{\quad \frac{p}{(1-p)\,a^2} = \frac{q}{(1-q)\,b^2} = \frac{r}{(1-r)\,c^2}, \quad p + q + r = 1.\right.$$

Разделив в каждой из дробей числитель и знаменатель соответственно на p, q, r и осуществив замены $p' = \frac{1}{p} - 1, q' = \frac{1}{q} - 1, r' = \frac{1}{r} - 1 \Leftrightarrow \left(p = \frac{1}{1+p'}, q = \frac{1}{1+q'}, r = \frac{1}{1+r'}\right)$, придем к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{p'a^2} = \frac{1}{q'b^2} = \frac{1}{r'c^2}, \\ \frac{1}{1+p'} + \frac{1}{1+q'} + \frac{1}{1+r'} = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} q' = \frac{a^2}{b^2}p' \\ r' = \frac{a^2}{c^2}p' \\ (1+p')\,(1+q')\,(1+r') = (1+q')\,(1+r') + (1+p')\,(1+r') + (1+p')\,(1+q'). \end{cases}$$

Далее, подставив первые два равенства в третье и аккуратно проделав все надлежащие преобразования[43], придем к тому, что p' удовлетворяет *кубическому* уравнению[44]

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0.$$

Хорошо известно (см., например, [4]), что количество действительных корней *приведенного* кубического уравнения[45] $t^3 + dt + l = 0$ определяется знаком его дискриминанта $\Delta = \frac{d^3}{27} + \frac{l^2}{4}$, а именно:

- если $\Delta < 0$, то уравнение имеет три различных действительных корня;
- если $\Delta = 0$, то уравнение имеет два различных корня кратности один и два соответственно (т. е. при разложении кубического трехчлена линейный множитель, отвечающий корню кратности два, встречается дважды);
- если $\Delta > 0$ — один действительный корень (кратности один).

В нашем случае $\Delta = \frac{-4d^3+27l^2}{27\cdot 4} = \left(27 \cdot 4 \cdot \frac{b^4c^4}{a^8} - \frac{4\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3}{a^{12}}\right)/(27\cdot 4)$ и его знак определяется знаком выражения $\Delta' = 27a^4b^4c^4 - \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3$.

Но, если воспользоваться классическим неравенством Коши между средним геометрическим и средним арифметическим для трех положительных чисел $x = a^2b^2, y = b^2c^2, z = c^2a^2$, то $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3} \Leftrightarrow 27xyz \le (x+y+z)^3 \Leftrightarrow \Delta' = 27a^4b^4c^4 - \left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)^3 \le 0$, причем равенство нулю возможно, если и только если $x = y = z \Leftrightarrow a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Leftrightarrow a = b = c$, т. е. тогда и только тогда, когда исходный треугольник ABC — равносторонний, рис. 14.

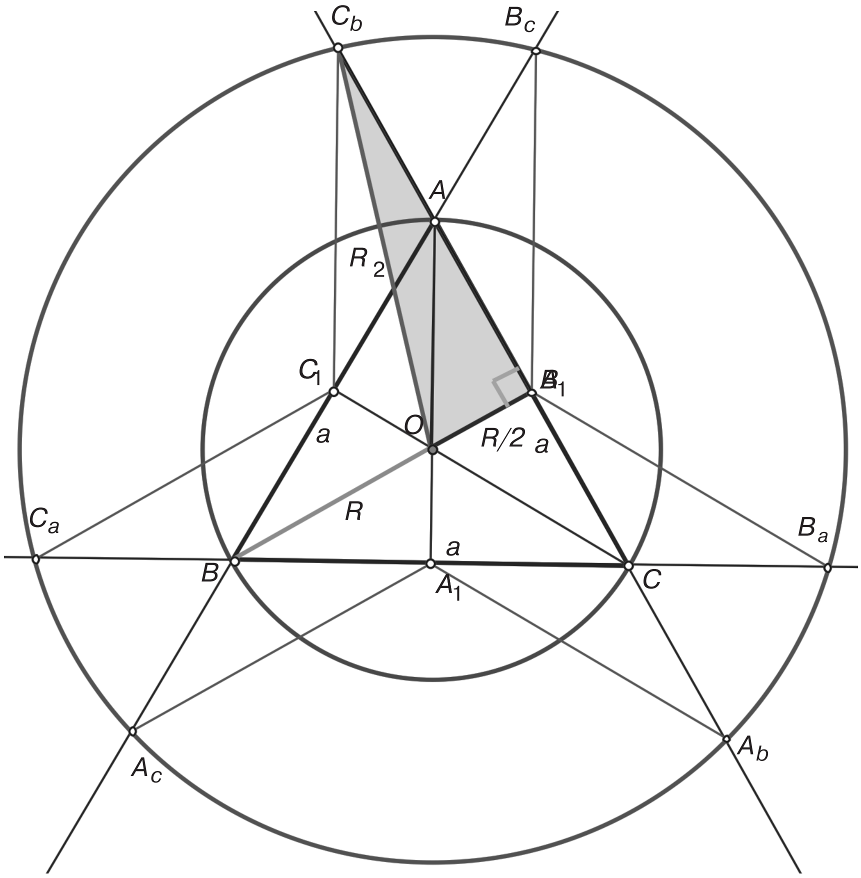


Рис. 14

В этом случае уравнение $p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0$ запишется в виде

$$p'^3 - 3p' - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(p'-2\right)\left(p'+1\right)^2 = 0,$$

а соотношения

$$\begin{cases} q' = \frac{a^2}{b^2}p' \\ r' = \frac{a^2}{c^2}p' \end{cases} \quad —$$

просто как

$$\begin{cases} q' = p' \\ r' = p' \end{cases}$$

Это означает, что случаю $p' = q' = r' = -1$ будет соответствовать «дважды» неопределенная точка, а случаю $p' = q' = r'$ — точка P с координатами $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$, т. е. центр(оид) правильного треугольника. Радиус получившейся при этом окружности легко посчитать по теореме Пифагора:

$$\rho^2 = a^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{3}R\right)^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{13}{4}R^2.$$

Перейдем теперь к рассмотрению наиболее содержательной возможности, т. е. когда $\Delta < 0$. Кубическое уравнение должно здесь иметь три действительных корня.

Прежде всего посмотрим, что будет, если один из знаменателей в формулах для координат найденных точек P $\left(p = \frac{1}{1+p'}, q = \frac{1}{1+q'}, r = \frac{1}{1+r'}\right)$ обращается в нуль.

Пусть, например, $p' = -1$. Подставив это значение в уравнение

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0,$$

получим:

$$-1 + \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4} - 2\frac{b^2c^2}{a^4} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} = 0.$$

Положим $u = \frac{b^2}{a^2}, v = \frac{c^2}{a^2}$. Тогда $-1+u+uv+v-2uv = 0 \Leftrightarrow uv-u-v+1 = 0 \Leftrightarrow u\,(v-1)-(v-1) = 0 \Leftrightarrow (v-1)\,(u-1) = 0$.

Значит, либо $a = b$, либо $a = c$. Итак, обращение знаменателя в нуль соответствует случаю равнобедренности. Верно и обратное. Допустим, что $a = b$. (Но треугольник не равносторонний). Тогда, во-первых, $q' = \frac{a^2}{b^2}p' = p'$, т. е. точки, отвечающие решению уравнения, будут лежать на оси симметрии равнобедренного треугольника. А во-вторых, после подстановки в уравнение, получим

$$p'^3 - p\left(1 + 2\frac{c^2}{a^2}\right) - 2\frac{c^2}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(p'+1\right)\left(p^2 - p - 2\frac{c^2}{a^2}\right) = 0.$$

Квадратное уравнение, соответствующее второй скобке, имеет положительный дискриминант и как раз будет определять две «обычные» точки P', P'', расположенные на оси симметрии (кстати отметим, что их можно, в отличие от общего случая, строить циркулем и линейкой — как и всякое решение квадратного уравнения). Если же $p' = q' = -1$, точка P, соответствующая этим значениям, имеет, условно говоря, координаты $\left(\frac{1}{0} : \frac{1}{0} : \frac{1}{1-\frac{a^2}{c^2}}\right)$. На нуль делить нельзя, и нужно что-то с этим делать — например, попробовать избавиться от нулей в знаменателях при помощи предельного перехода. Только проделанного должным образом! Речь идет вот о чем: одно дело, если имеем тройку $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{x} : \frac{1}{c}\right)$. Тогда, домножив на x, и перейдя к пределу при $x \to 0$, получим тройку $(1 : 1 : 0)$. Другое же — если тройка имеет вид $\left(\frac{1}{x} : \frac{1}{-x} : \frac{1}{c}\right)$. Тогда ответом будет $(1 : -1 : 0)$. Иными словами, надо понять, какая из двух возможностей реализуется при $p' \to -1, q' \to -1$. Покажем, что имеет место именно второй случай (и это-то будет означать бесконечную удаленность третьей точки вдоль основания треугольника — ведь сумма координат равна нулю).

Для этого вернемся к набившему оскомину уравнению, только теперь выпишем еще и аналогичное уравнение для q':

$$p'^3 - p'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^4}\right) - \frac{2b^2c^2}{a^4} = 0 \text{ и } \quad q'^3 - q'\left(\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^4}\right) - \frac{2a^2c^2}{b^4} = 0.$$

Или, после соответствующего деления,

$$p'^3 - p'\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) - 2\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{c^2}{a^2} = 0 \text{ и } \quad q'^3 - q'\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}\right) - 2\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2} = 0.$$

Напрашивается далее ввести функцию $f(x) = x^3 - x(u + v + uv) - 2uv$. Тогда первому уравнению соответствуют $u_p = \frac{b^2}{a^2}, v_p = \frac{c^2}{a^2}$, а второму — $u_q = \frac{a^2}{b^2}, v_q = \frac{c^2}{b^2}$. Понятно, что $f(-1) = u + v - 1 - uv = (u-1)(1-v)$. Очевидно также, что вблизи -1 выражения $1 - v_p$ и $1 - v_q$ принимают одинаковые знаки (и не стремятся к нулю, т.к. $c \neq a$). Тогда $p' \to -1 \Leftrightarrow u_p \to 1$ и $q' \to -1 \Leftrightarrow u_q \to 1$. Но если $u_p \to 1$ таким образом, что $u_p > 1$(т. е. $\frac{b^2}{a^2} > 1$,т. е. $b > a$) то u_q ничего не остается, кроме как стремится к 1 «снизу», т. е. при $u_q \to 1$ тогда обязательно $u_q = \frac{a^2}{b^2} < 1$. Из этих рассуждений вытекает, что если $p' \to -1$ «сверху», то $q' \to -1$ «снизу», и наоборот. А это и означает, что имеет место именно вторая возможность, ведущая к появлению бесконечно удаленной точки, рис. 15.

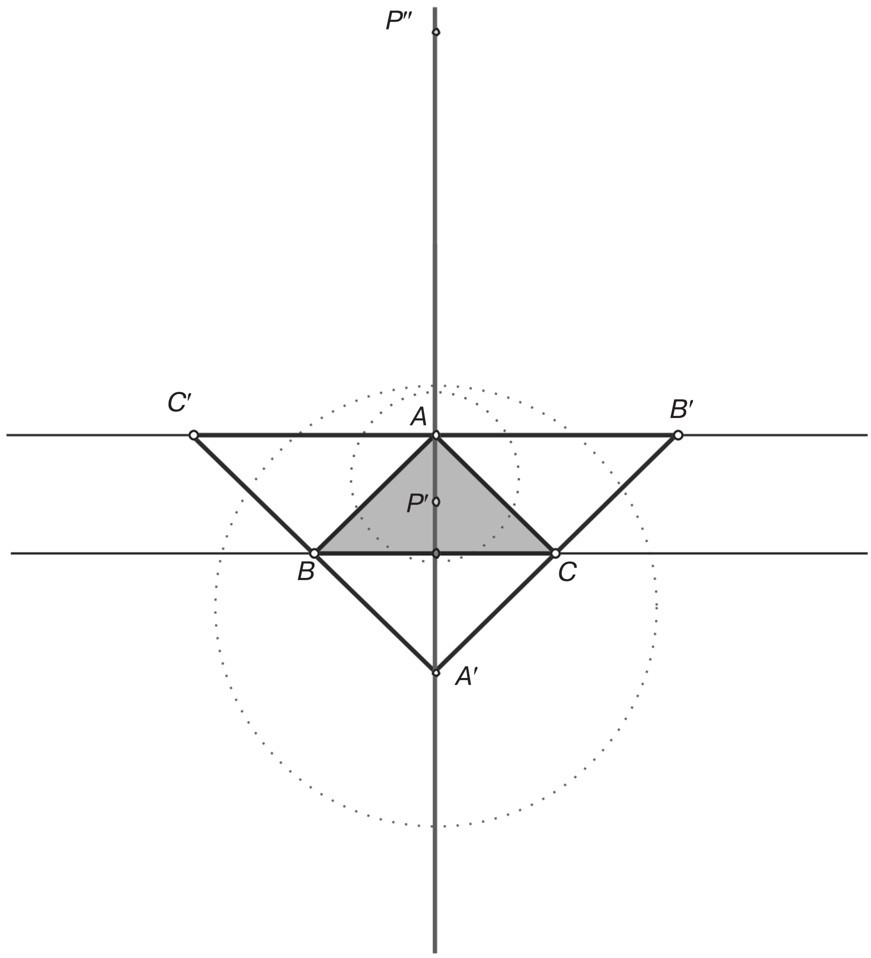


Рис. 15

Исследовав, таким образом, все особые случаи, далее будем считать треугольник разносторонним. Тогда выписанные в условии координаты точек P_k получим, аккуратно подставив соответствующие коэффициенты в следующие формулы решения кубического уравнения с отрицательным дискриминантом:

Если $t^3 + dt + l = 0$ и $\Delta < 0$, то

$$t = \sqrt{-\frac{4d}{3}}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi(k-1)}{3}\right), k = 1, 2, 3, \quad \text{где} \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{9l}{4d^2}\sqrt{-\frac{4d}{3}}\right)$$

(см. [4]). Наконец, разберемся с положением наших точек относительно треугольника. Вернемся для этого к основным формулам.

$$P_k = \left(p_k = \frac{1}{1+p'_k} : q_k = \frac{1}{1+q'_k} : r_k = \frac{1}{1+r'_k}\right),$$

где

$$p'_k = \frac{C}{a^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right), \quad q'_k = \frac{C}{b^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right),$$

$$r'_k = \frac{C}{c^2}\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi\,(k-1)}{3}\right), \quad k = 1, 2, 3$$

и

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\varphi = \arcsin\left(-8a^2b^2c^2C^{-3}\right) = \arcsin\left(-3\sqrt{3}\frac{a^2b^2c^2}{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\right).$$

Грубая оценка для углов и их синусов, входящих в координаты точек, выглядит следующим образом:

$$\varphi_1 \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right) \Rightarrow \sin\varphi_1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \qquad \varphi_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\varphi_2 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right),$$

$$\varphi_3 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\varphi_3 \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Сразу теперь видно, что все координаты P_2 положительны, т. е. эта точка расположена внутри треугольника.

Далее заметим, что сумма всех координат равна 1 — а это означает, что целиком отрицательной тройки координат быть не может. Значит, для того, чтобы доказать, что точки P_1 и P_3 находятся за пределами треугольника, достаточно указать для каждой из них хотя бы одну заведомо отрицательную координату (тем самым исключив случай целиком положительной тройки, а все остальные варианты ведут к «заграничным» точкам).

Поскольку треугольник разносторонний, упорядочим стороны в порядке возрастания их длин. Пусть, например, $a < b < c$.

Займемся сначала точкой P_1. Ввиду отрицательности соответствующего синуса, целиком отрицательной будет и тройка p'_1, q'_1, r'_1. Еще отметим, что $p_1 + q_1 = 1 - \frac{1}{1+r'_1} = \frac{r'_1}{1+r'_1}$. Здесь остается показать, что $r'_1 > -1$ — ведь тогда $p_1 + q_1 = \frac{r'_1}{1+r'_1} < 0$ и среди этих двух координат какая-нибудь одна должна быть заведомо отрицательной.

Однако $r'_1 = \frac{C}{c^2}\sin\varphi_1, C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \Rightarrow \frac{C}{c^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2}}$. Поскольку каждая дробь, входящая в подкоренное выражение, *меньше* 1, то $\frac{C}{c^2} < 2$. А так как $-\sin\varphi_1 < \frac{1}{2}$, то, перемножив оба неравенства, получим, что $-r'_1 < 1 \Leftrightarrow r'_1 > -1$.

И, напоследок, разберемся с P_3. Оказывается, в этом случае $p'_3 < -1$ и искомой отрицательной координатой будет $p_3 = \frac{1}{p'_3+1}$. Ну, в самом деле: $p'_3 = \frac{C}{a^2}\sin\varphi_3$, $\frac{C}{a^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}}$. Здесь, в отличие от предыдущего случая, каждая дробь подкоренного выражения *больше* 1. Следовательно, $\frac{C}{a^2} > 2$. А поскольку $-\sin\varphi_3 > \frac{1}{2}$, то $-p'_3 > 1 \Leftrightarrow p'_3 < 1$.

Замечание. В случае равностороннего треугольника, как видим, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ и наши формулы дают *три совпадающие точки:* $P_1 = P_2 = P_3 = G\,(1:1:1)$. Между тем, при непосредственном исследовании случая равносторонности мы получили ранее центроид и две неопределенные точки. Можно ли трактовать их следующим образом: если треугольник близок к равностороннему, то координаты двух неопределенных точек близки к тройке $\left(\frac{1}{x}:\frac{1}{x}:\frac{1}{x}\right)$, где x- мало? Ведь если так, то, умножив всю тройку на x, в пределе получим центроид $G\,(1:1:1)$. Так-то, конечно, оно так, но тогда нарушается непрерывность — при ничтожном «шевелении» треугольника этот центроид расщепляется на две *внешние* точки.

Так что предпочтительнее всё же выделять случай равносторонности в особый, где общая формула для трех корней не вполне применима.

В равнобедренном случае наши формулы должны оставаться в силе ($\Delta < 0$ для равнобедренных, но не равносторонних треугольников!). В бесконечность может отправиться, согласно компьютеру, как точка P_1, так и точка P_3 (но всегда что-нибудь одно!), в зависимости от длин сторон или углов треугольника[46]. А вот точка P_2 всегда конечна, поскольку все ее координаты положительны, рис. 16 – 17.

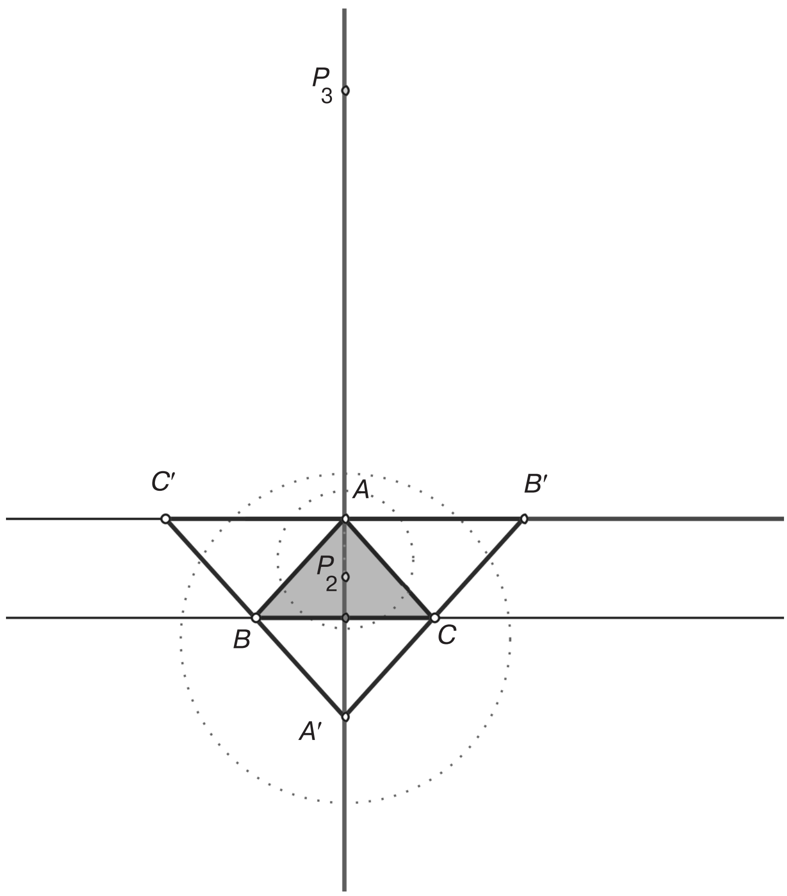


Рис. 16

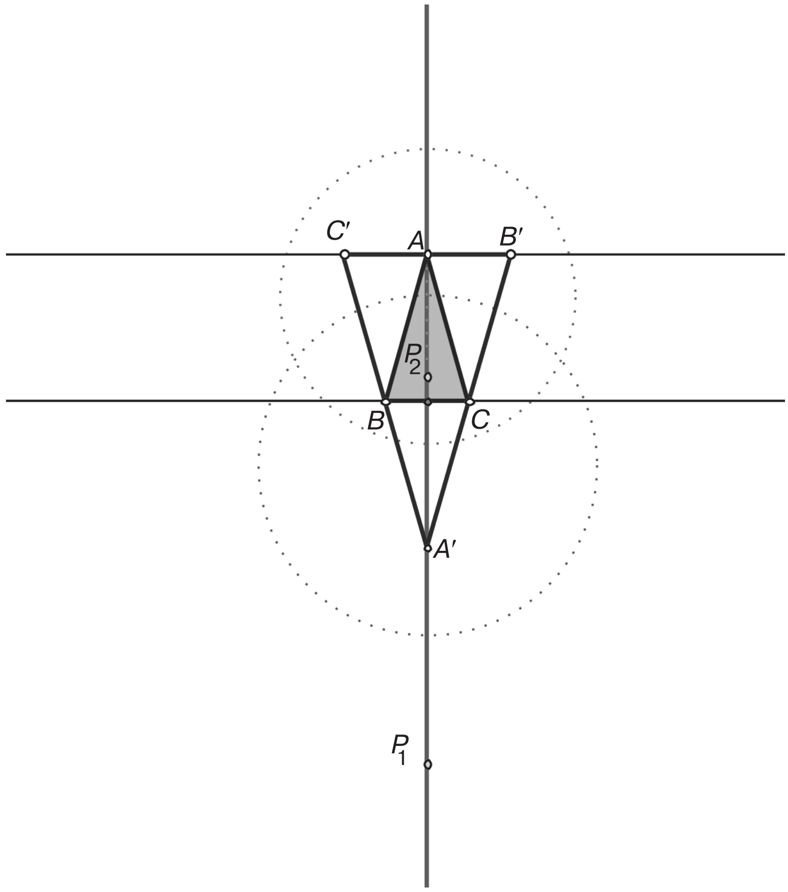


Рис. 17

Представим теперь, можно сказать, фотопортреты главных персонажей: *Соло* — рисунки 18 – 20.

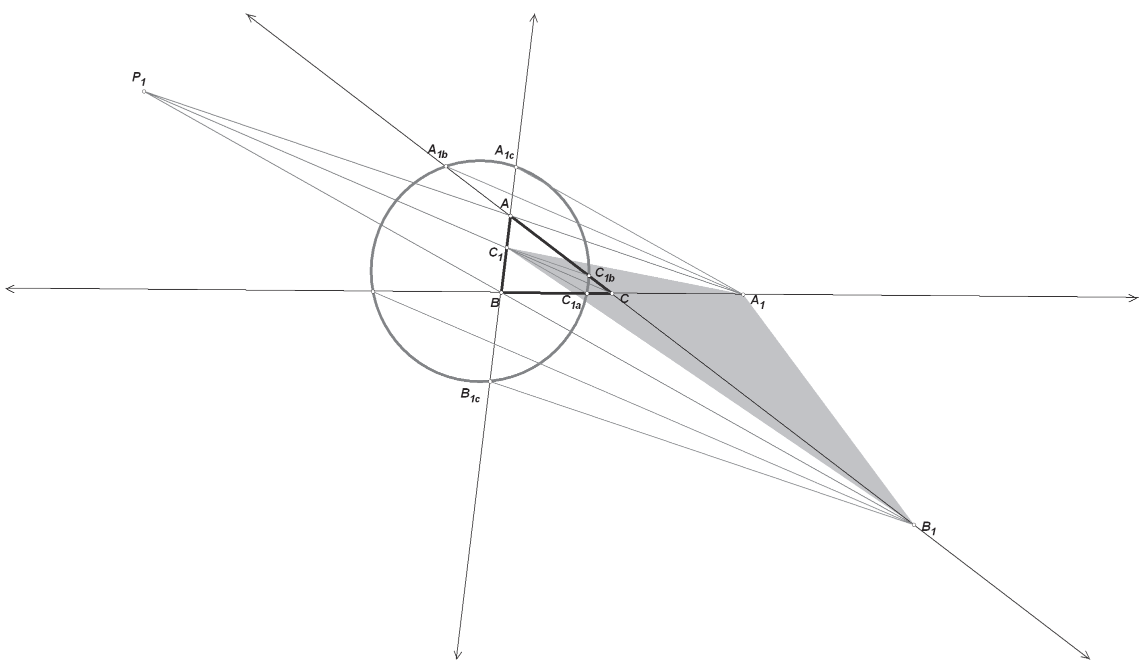


Рис. 18

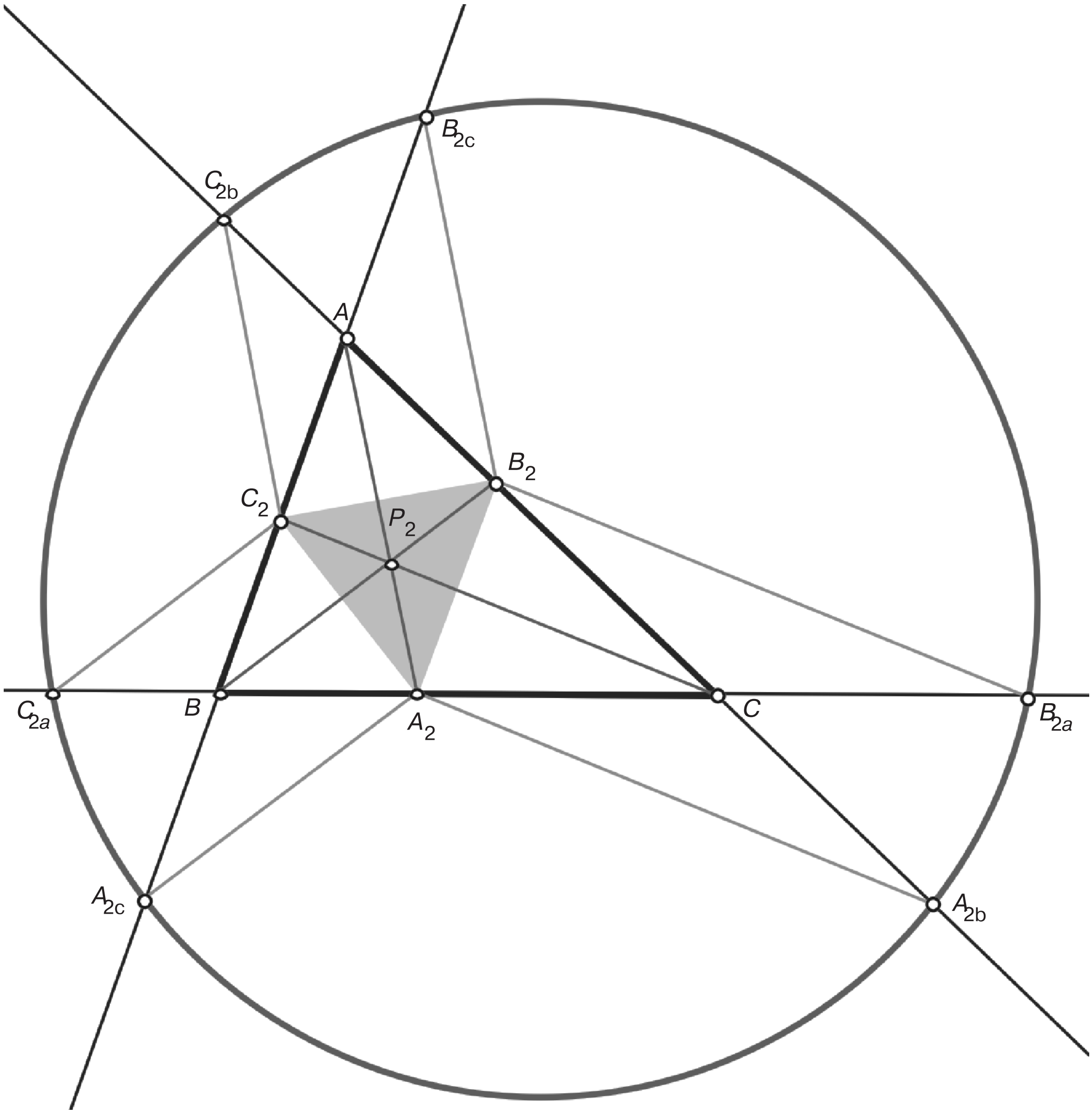


Рис. 19

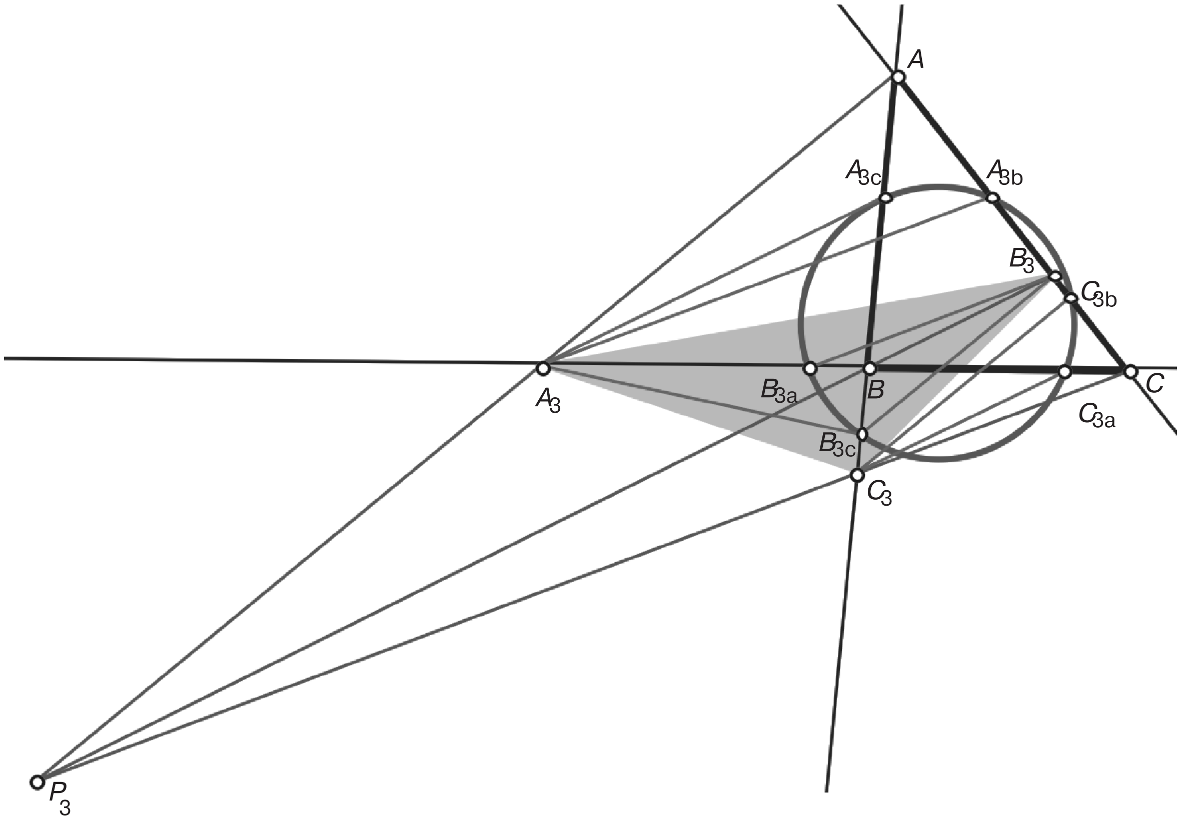


Рис. 20

Семейный портрет в интерьере — рисунок 21.

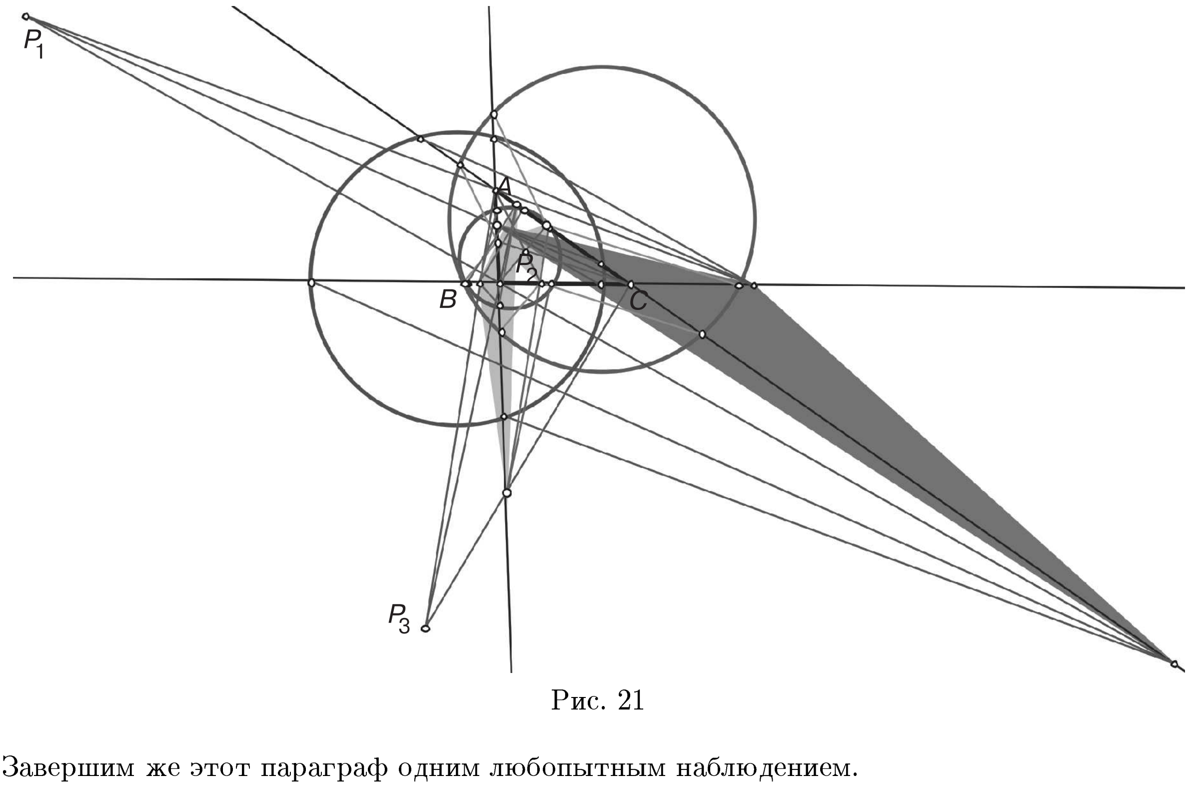


Рис. 21

Завершим же этот параграф одним любопытным наблюдением.

Утверждение 6.7. Коника рассматриваемого семейства, порожденная центроидом G, есть эллипс, гомотетичный описанному эллипсу Штейнера[47]. Центр гомотетии совпадает с точкой G, а коэффициент $k = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Доказательство. Вернемся к случаю правильного треугольника, разобранного в предыдущем разделе. Аффинным преобразованием правильный треугольник можно перевести в произвольный, рис. 22. А поскольку аффинное преобразование (см. [1] и [3], глава 29) сохраняет параллельность прямых и отношения длин отрезков, лежащих на одной (или параллельных) прямой — центр правильного треугольника перейдет в центроид данного, описанная окружность — в описанный эллипс Штейнера, а окружность нашего семейства, отвечающая правильному треугольнику — в конику, порожденную центроидом. При этом, понятно, коника окажется гомотетична (как в условии) описанному эллипсу Штейнера[48]. □

Заметим еще, что получившийся эллипс задается довольно симпатичным уравнением. В самом деле, подставив единицы в уравнение коники, получим:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 10yz + 10zx + 10xy = 0 \Leftrightarrow 4\,(yz + zx + xy) + 3\,(x + y + z)^2 = 0.$$

Впрочем, уравнение описанного эллипса Штейнера, конечно, посимпатичнее будет: $xy+yz+zx = 0$, см. [10][49].

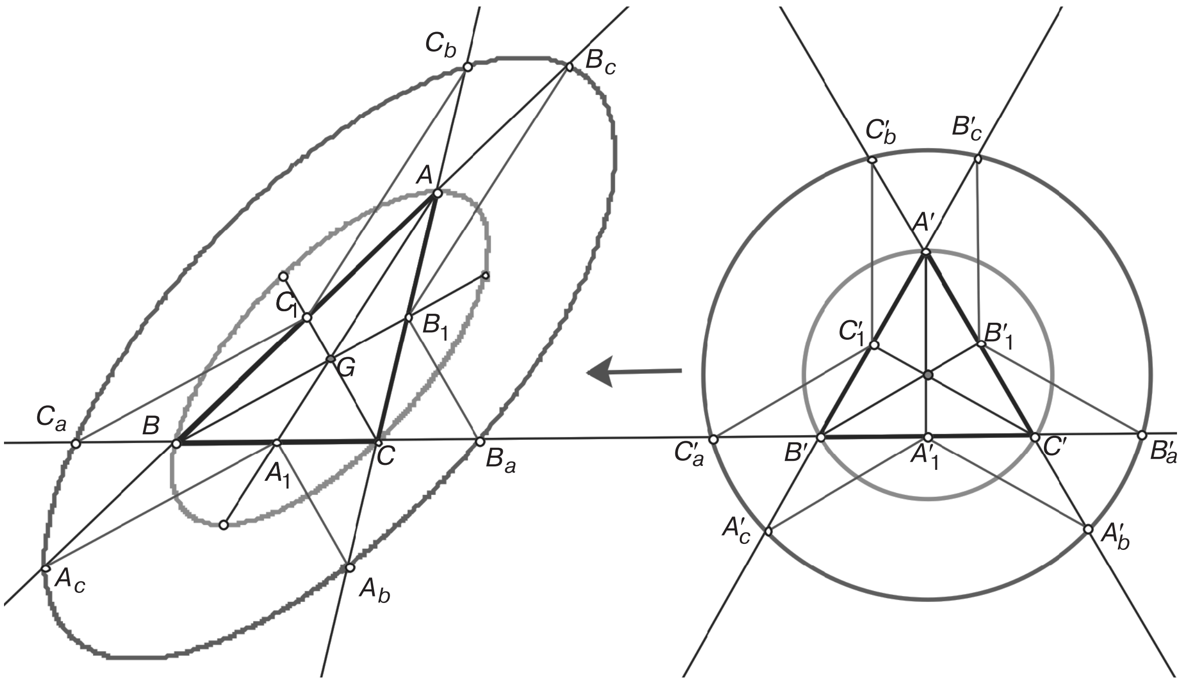


Рис. 22

Примечания

[1] *Тщетно, художник, ты мнишь, что творений своих ты создатель!*
Вечно носились они над землею, незримые оку.
(Алексей К. Толстой.)

[2] Один только, по словам В. И. Арнольда, *«безобразный спор, разгоревшийся между Ньютоном и Лейбницем»* чего стоит! (весьма нелицеприятные подробности см. в [18]).

[3] *И облик каждой складкой говорит,*
Чем он живёт. А для чего в итоге?
Из-за Гекубы!
Что он Гекубе? Что ему Гекуба?
А он рыдает.
(Вильям Шекспир. Гамлет, принц датский. Перевод Б. Пастернака.)

[4] В духе так называемого *парадокса Гемпеля.*

— *По мнению изобретателя парадокса профессора Карла Гемпеля, рыжая корова увеличивает вероятность того, что все вороны черные* (см. [19]).

[5] Так в тексте. Но это — для простоты. Утверждение остается справедливым, как увидим далее, и для произвольного треугольника.

[6] Известно, что задачи, предлагаемые на международные олимпиады, проходят строгий отбор. Компетентное и профессиональное жюри предварительно оценивает их сложность, эстетическую составляющую и *новизну*.

[7] *«Новый Гоголь явился!» — закричал Некрасов, входя к нему с «Бедными людьми». — «У вас Гоголи-то как грибы растут», — строго заметил ему Белинский, но рукопись взял.*

(Федор Достоевский. Дневник писателя.)

[8] Перелистывая на днях очень часто цитируемую в зарубежных статьях книжку [17], я наткнулся на них и там.

На самом деле тот факт, что в случае с так называемой *окружностью Гаврилюка* жюри ММО слегка оплошало (*и на эксперта бывает проруха!* И ни один из сочинителей геометрических задач не застрахован от невольных повторений ранее уже известных вещей — ибо тезис Козьмы Пруткова *«нельзя объять необъятное!»* никто не отменял) — должен был бы насторожить (прозвенев тревожным звоночком), а не дать повода (как оно, к сожалению, тогда и вышло) к пустому бахвальству. Помнится, замелькали даже злорадные какие-то мысли в голове, навроде: *Окружности придумывать — это вам не огурцы солить!* (Перефразируя однажды услышанный от И. Ф. Шарыгина афоризм *«Рецензии писать — не огурцы солить»* — как было сказано в ответ на робкую просьбу отписать чего-нибудь *позитивное* в издательство насчет рукописи моего давнего опуса *“Знакомство с теорией вероятностей”*. Который, кстати сказать, совсем недавно наконец-то был опубликован издательством “Илекса” — правда, волею редактора под более помпезным заголовком “Теория вероятностей”.) А вспоминать-то надо было другое: *“Не судите, да не судимы будете!”*. Но ничего, вскоре всё равно пришлось.

[9] *Педальным* (*подерным*) треугольником точки P относительно треугольника ABC называют треугольник $P_aP_bP_c$, образованный основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA, AB соответственно. При этом педальный треугольник вырождается в отрезок (и лежит на так называемой *прямой Симсона* — см [3], задача 5.105.) тогда и только тогда, когда точка P расположена на описанной около треугольника ABC окружности.

[10] Мы предполагаем, что эта пара не содержит бесконечно удаленную точку (или, другими словами, точку, лежащую на описанной около ABC окружности). А читателя призываем поразмыслить над тем, как следует переформулировать теорему в «бесконечном» случае. Есть мнение, что, если точка P стремится «примоститься» на описанную окружность, её окружность Дроз-Фарни «распремляется» в соответствующую точке P прямую Симсона. Окружность же, соответствующая P_l, трансформируется в бесконечно удаленную прямую.

[11] Единственным оно остается и по сей день — и потому наша окружность явно уступает большинству своих именитых коллег (см. §1). (Почти все из них обладают многими другими интересными свойствами, помимо «голого» факта существования.) Не говоря уже о несколько тяжеловесном описании самой конструкции. Например, даже хорошо успевающему по геометрии среднему школьнику не объяснишь так сразу, *с полоборота,* в чем состоит геометрическая суть точки X_{194} — потребуется какое-то время.

[12] Иначе выражаясь — теоремы о постоянстве произведения отрезков хорды или секущей и её внешней части, проходящих через фиксированную точку.

[13] К тому моменту мне стало ясно, что геометрическое доказательство существования окружности должно быть и сложным и трудно находимым. По существу, всё упирается в геометрию точки, изотомически сопряженной точке Лемуана. В доступной мне литературе эта точка вообще нигде не упоминается. А вообще-то, ситуации, когда барицентрическое доказательство много проще и короче чисто геометрического, встречаются. К примеру, если существование *прямой*

Эйлера легко и красиво доказывается геометрически, посредством гомотетии, переводящей исходный треугольник в серединный (см. [3] — задача 5.128; [5] — задача 489), то доказательство с помощью геометрии масс (см. [2], [9]) — значительно более громоздко. И ровно наоборот дело обстоит с *прямой Нагеля.* Хотя геометрическое обоснование (использующее всю ту же гомотетию — см. [5], задача 489) суперсложным не назовёшь, но всё-таки оно «потяжелее» будет, чем лаконическое барицентрическое (см. [2], [8], [9]).

[14] Михаил Булгаков. Похождения Чичикова.

[15] Посещаемого, по слухам, многими *олимпиадниками* — прошлыми, настоящими, и, надо полагать, будущими.

[16] 170 по состоянию на 15.03.12 — если быть точным.

[17] *Hyacinthos* — сайт, объединяющий любителей и знатоков Элементарной Геометрии по всему миру. Сюда-то и следовало обратиться с самого начала, если уж степень известности (неизвестности) конструкции так беспокоила. Но, должно быть, подсознательная боязнь «разоблачения» удерживала, до поры, от этого шага.

— И эти-то надоевшие фокусы я лишь сегодня распознал, до одури навозившись с тем субъектом. А субъект всё стоял, прислонясь к стене, по-прежнему полагая себя пройдохой, и довольство собою румянило его щеки.

— Вы разгаданы! — крикнул я и даже легонько хлопнул его по плечу.

...А потом вздохнул с облегчением и, выпрямившись во весь рост, вошел в гостиную.

(Франц Кафка. Разоблаченный проходимец.)

[18] Впрочем, геометрического доказательства никто так всё же и не привёл, так что вопрос этот остаётся открытым.

Зацепки, возможно, имеются в сообщении (опять!) французского (sic!) геометра Жана-Пьера Эрманна (Jean-Pierre Ehrmann) — см. [10], [11] — messages # 20306, #20308. Сам Жибер, как и я, пользовался барицентрическими координатами — см. [10] — message #20322. Там же он выразил уверенность в том, что старым мастерам окружность была известна: «*I'm pretty sure one can find it in older literature*», если дословно.

[19] Дело в том, что Бернард Жибер исключительно плодовит, как автор содержательных геометрических произведений — см. [15].

[20] Полушутливое обращение «*Папа*» (в смысле «*Римский*») отражает те, полностью заслуженные, почёт и уважение, которыми пользуется в кругу людей, знающих толк в предмете, совершенно *блистательный геометр Жан-Пьер Эрманн* — безо всяких ложных преувеличений, *геометрический маг и волшебник, чародей и кудесник.*»

[21] По чересчур раздутым авторским самолюбию и тщеславию, в первую очередь. Но не в них одних тут «собака порылась», думается. Однако одними словами здесь трудно передать «всю полноту чувств», всю эту *бурю в стакане воды.* Личный опыт необходим! Грубо говоря, переживания из тех, которые на собственной шкуре только хорошо постигаются!

[22] *Пора бы исключить (если этого ещё не проделано) из школьных программ подобные, с позволения сказать, произведения — от которых за версту шибает* имперским духом. *Как будто нам нечего предложить взамен нашей молодежи!*

(Сдается, что примерно так мыслят отдельные представители нашей либеральной общественности.)

[23] Почти двухнедельную. Перефразируя первого чемпиона мира по шахматам Вильгельма Стейница, хочется воскликнуть (с горечью): *«геометрия — не для слабых духом!»*

[24] Естественно, предполагается такой выбор коники, что из каждой вершины треугольника касательные к ней можно провести.

[25] И потому, замечу, конструкция эта прекрасно соответствует заявленной в нашей статье тематике.

[26] См. §5, самое начало.

[27] Который мы на рисунке всё же обозначили буквой D — и то сказать, не в Америке ведь живём!

[28] Правда, Поль Ю рассматривает ситуацию под немного другим углом: треугольник $A'B'C'$ (в наших обозначениях) он считает исходным, а треугольник ABC — «производным» от него *тангенциальным* (т. е. образованным касательными к описанной около $A'B'C'$ окружности). Но сути дела это, конечно же, не меняет.

[29] Вотще я этого от него домогался (пускай и довольно косноязычно — ибо депрессия уже на тот момент начинала сказываться) — см. message #20320, оставшееся безответным.

[30] П. Долгирев попробовал, но так и не сумел довести выкладки до победного конца. Уж очень громоздкие «крокодилы» повылезали.

[31] Термин, вошедший в повседневный геометрический *сленг* с легкой руки выдающегося математика Джона Конвея.

[32] *Проверено электроникой!* — т. е. Живой Геометрией. Между прочим, богатая получилась, в целом, конфигурация — много окружностей, их центров и касательных. Непременно должны наличествовать разнообразные внутренние связи — возможно, любопытные. Словом, широкое поле деятельности открывается для нынче популярной так называемой *проектной деятельности учащихся* — от *успешности* которой (наряду с такими значимыми факторами, как результаты ЕГЭ и математических олимпиад) *напрямую* зависит финансирование образовательного учреждения.

[33] *Бывают дни, когда опустишь руки,*
И нет ни слов, ни музыки, ни сил.
В такие дни я был с собой в разлуке,
И никого помочь мне не просил.
И я хотел идти, куда попало,
Закрыть свой дом и не найти ключа…
(А. Макаревича.)

[34] Как в той же самой песенке получилось, которая, несмотря на столь скорбный зачин, оканчивалась сравнительно бодрым стишком:
Но верил я — не всё ещё пропало:
Пока не меркнет свет, пока горит свеча…
И пусть сегодня дней осталось мало,
И выпал снег, и кровь не горяча.
Я в сотый раз опять начну сначала:
Пока не меркнет свет, пока горит свеча.
Именно так я и поступил, последовав неукоснительно мудрым бардовским рекомендациям: *начал в сотый раз сначала.*

[35] Как и прежде, тройка координат точки P не содержит нулей.

[36] И является *однородным* как относительно коэффициентов, так и относительно переменных, т. е. не меняется (переходит в равносильное), если все коэффициенты (или все переменные) умножить одновременно на любой постоянный ненулевой множитель.

[37] Одно из которых, ясное дело, является следствием остальных. Всё же выпишем их все.

[38] И в этом случае легко проверить, что случай $f = g = h = 0$ не проходит.

[39] Эти соотношения легко вывести, располагая уравнением коники и уравнением окружности $a^2yz + b^2zx + c^2xy - (x + y + x)\,(u_0x + v_0y + z_0x){=}0$ (см. [6], [9]).

[40] Чего всегда можно добиться, разделив исходные барицентрические координаты точки на суммарную массу точки.

[41] Естественно, все три формы записи ключевых уравнений равносильны друг дружке.

[42] Это имеет кое-какой геометрический смысл: двигаясь вдоль любой прямой, параллельной основанию и уходя всё дальше и дальше, «в бесконечность»— будем получать коники, всё более и более «похожие» на окружность.

[43] Признаемся, здесь мы вновь воспользовались услугами *Mathematica 5.1*, сэкономив на вычислениях немножко времени. Конечно, раскрытие всяких скобок и приведение разнообразных подобных в данном случае еще вполне по силам человеческому интеллекту.

[44] Отметим тот радостный факт, что возникшее кубическое уравнение уже имеет *приведенный вид*, т. е. коэффициент при второй степени — *нулевой*, поэтому нет надобности в соответствующей линейной замене. А вот если бы мы с самого начала стремились получить уравнение относительно p, то также пришли бы к некоему кубическому — но коэффициент при квадрате еще пришлось бы потом «занулять».

[45] Конечно, общепринятые обозначения коэффициентов p и q лучше. Но, увы, эти буквы уже заняты.

[46] Пытливому читателю оставляем этот вопрос (выявить явную форму зависимости) в качестве увлекательного упражнения. Гипотеза такова: Пусть $b = c$. Тогда, если $\angle A < \frac{\pi}{3}$, то бесконечно удаленной будет точка P_3, а если $\angle A > \frac{\pi}{3}$ — то P_1. Доказательство должно использовать рассуждения, сходные приведенным в §8.

[47] Так называют описанный около треугольника эллипс с центром в G. Естественно, описанный эллипс Штейнера и вписанный гомотетичны: центр гомотетии совпадает с центрами эллипсов, а коэффициент равен 2.

[48] Счётное (*«левополушарное»*) доказательство также, конечно, имеется. И основано оно на следующей формуле, описывающей гомотетию с центром в G в барицентрических координатах: $H_G^k\,(x:y:z) = (x' = 3kx + (1-k)\,s : y' = 3ky + (1-k)\,s : z' = 3kz + (1-k)\,s), s = x + y + z.$

Вывод этой формулы аналогичен выводу *леммы* из утверждения 3.5 §3.

[49] И если описанная окружность является геометрическим местом точек, которые под действием изогонального сопряжения переходят в бесконечно удаленные — то аналогичную роль описанный эллипс Штейнера играет для изотомического сопряжения.

Литература

[1] А. Акопян, А. Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.,МЦНМО, 2011.

[2] А. Мякишев. Элементы геометрии треугольника. М., МЦНМО, 2009.

[3] В. Прасолов. Задачи по планиметрии. М., МЦНМО, 2007.

[4] С. Табачников, Д. Фукс. Математический дивертисмент: 30 лекций по классической математике. М., МЦНМО, 2011.

[5] И. Шарыгин. Геометрия. Планиметрия. (Задачник 9-11). М., Дрофа, 2001.

[6] C. Bradley. The Algebra of Geometry. Cartesian, Areal and Projective Coordinates. UK, Bath, Highperception Ltd, 2007.

[7] C. Kimberling. Encyclopedia of Triangle Centers. http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/

[8] R. Honsberger. Episodes in Nineteenth and Twenties Century Euclidean Geometry. (New Mathematical Library, issue 37). The Mathematical Association of America, 1995.

[9] P. Yiu. Introduction to the Geometry of the Triangle.
http://math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.pdf

[10] Hyacinthos messages. http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/

[11] Art of Problem Solving. http://www.artofproblemsolving.com/
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=444143

[12] Forum Geometricorum. http://forumgeom.fau.edu/

[13] П.Долгирев. О касании коник и прямых, Математическое Образование, 3-4 (59-60), 2011.

[14] B. Gibert. Tucker Cubics and Bicentric Cubics. http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/files/Resources/cubTucker.pdf

[15] Bernard Gibert's site Cubics in the Triangle Plane http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/index.html

[16] J.-P. Ehrmann, F.J. Garcia Capitan, A. Myakishev, Construction of Circles Trough Intercepts of Parallels to Cevians, Forum Geom., 30 (2011) 261-268. http://forumgeom.fau.edu/
http://forumgeom.fau.edu/FG2011volume11/FG201130index.html

[17] R. Johnson. Advanced Euclidian Geometry. Dover Publications, New York, 2007.

[18] В. Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. М., Наука, 1989.

[19] М. Гарднер. А ну-ка, догадайся! М., Мир, 1984.

Мякишев Алексей Геннадьевич,
преподаватель математики
Химического Лицея №1303, г. Москва.

Email: myakishev62@mail.ru