Алексей Мякишев

О коллинеарности центров окружностей, вписанных в углы треугольника и касающихся внутренним образом окружности девяти точек

Москва

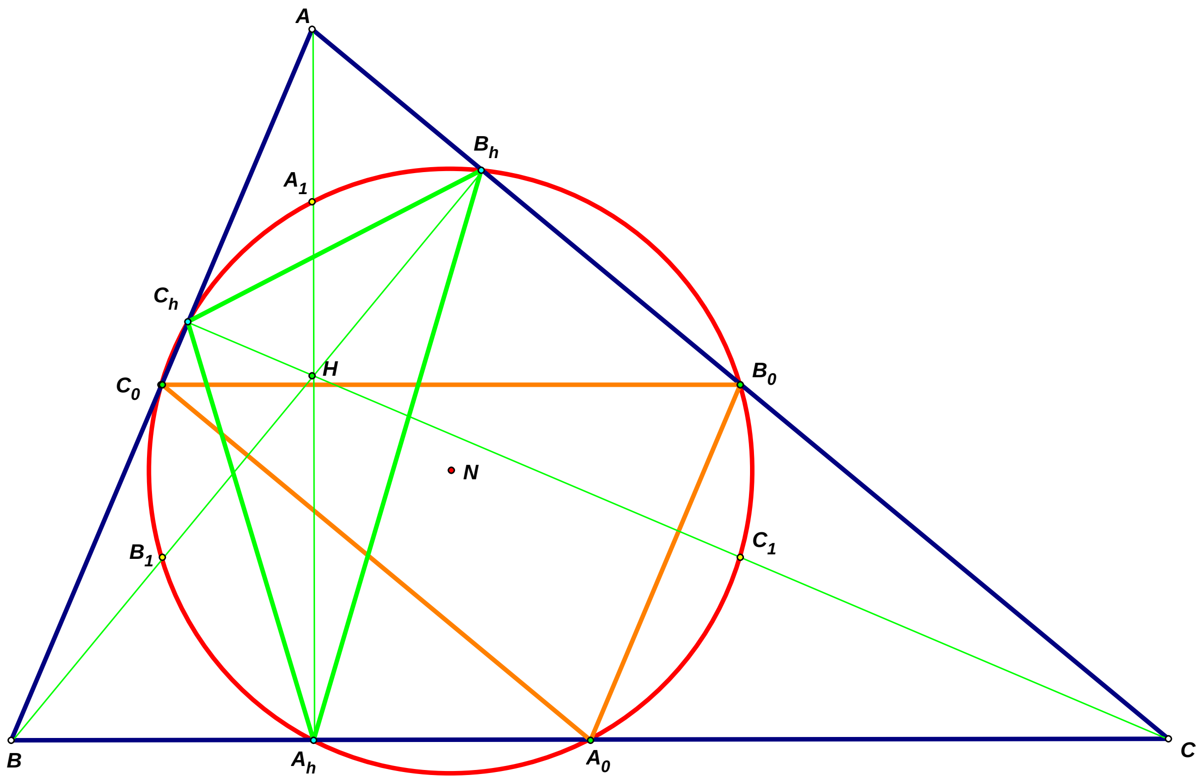
2013

В конце прошлого, 2012 года, мне посчастливилось обнаружить одну довольно любопытную геометрическую конструкцию. Её суть отражена в названии лекции.

Прежде чем мы приступим к обсуждению доказательства этого утверждения, хотелось бы сказать несколько слов о трех замечательных теоремах – идейных вдохновителей, и, так сказать, «движителей» данной работы.

§1. Великие предшественники

1.1 *Окружность девяти точек или окружность Эйлера*[1].



Так называют окружность, проходящую через середины сторон произвольного треугольника *ABC*, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку *H* пересечения высот с его вершинами.

(доказательство см. в [4],[5])

По количеству разнообразных красивых, интересных, а также и нетривиальных свойств эта окружность является, вне всяких сомнений, *окружностью №* 1 в *геометрии треугольника.*

---

[1] Леонард Эйлер (1707-1783) – великий швейцарский математик, большую часть своей жизни проживший в России. Похоронен в Петербурге, на кладбище Александро-Невской лавры (Петербургский Некрополь). Как остроумно подмечено в [4], «*Эйлер внес значительный вклад буквально во все области математики. Некоторые из его простейших открытий таковы, что можно представить себе дух Евклида, вопрошающий: «Почему при жизни на Земле я не додумался до этого?*»»

Долгое время я полагал, что первым эту теорему открыл Эйлер (ведь, думалось, названа окружность так не спроста), пока несколько лет назад не прочел в одной давней статье [1] о том, что в его опубликованных работах такой теоремы нет, во всяком случае нет для всех девяти точек (в превосходной статье [8] указано, что «этот красивый факт был *частично* установлен в 1765 году Леонардом Эйлером»).

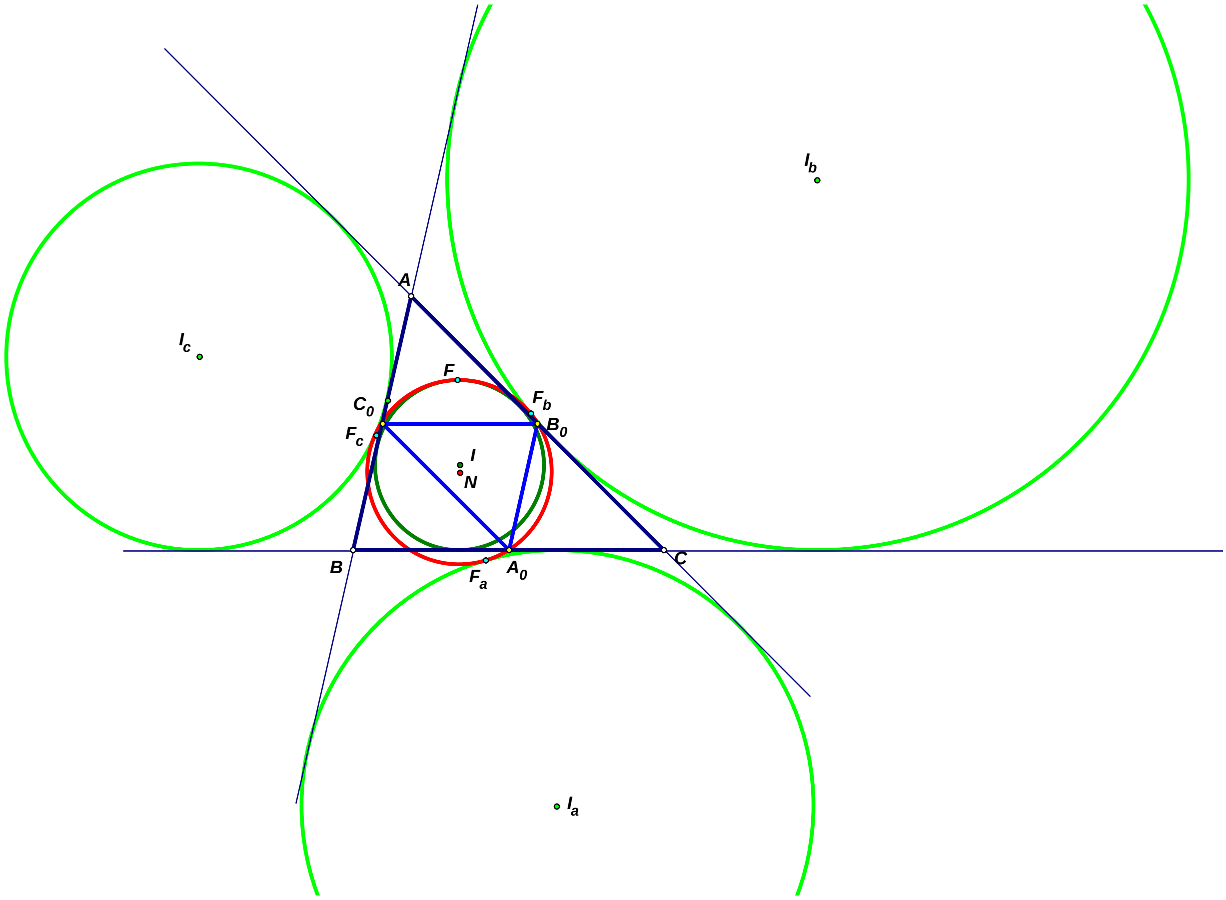
А первые полные публикации, посвященные этой теореме, относятся, кажется, примерно к 1820 году и связаны с именами двух выдающихся французских геометров: *Чарльза Жюля Брианшона* (1785-1864) и *Жана Виктора Понселе* (1788-1867).

Отмечу ещё, что в нашей стране принято чаще говорить о рассматриваемой окружности именно как об окружности Эйлера, в то время как на Западе более общепринятым и употребимым является термин «окружность девяти точек».

1.2 *Теорема Фейербаха*

Формулировка этой теоремы (подлинного бриллианта геометрии треугольника во многие караты) такова:

Окружность девяти точек касается внутренним образом вписанной в треугольник окружности, и внешним – трех вневписанных.



Впервые сформулирована и доказана в 1822 году немецким математиком *Карлом Вильгельмом Фейербахом* (1800 – 1834).

Его доказательство было полностью вычислительным. С тех пор прошло немало лет, и ныне известно довольно много доказательств – большинство из которых носит «смешанный» алгебраическо—геометрический подход. А первое чисто геометрическое (как еще иногда говорят, *синтетическое*) доказательство, судя по всему, пришло к нам из Индии в конце первой половины прошлого столетия. Два совершенно геометрических доказательства принадлежат нашему отечественному математику *В.Ю. Протасову* – первое родилось, по-видимому, где-то в середине второй половины минувшего века (см. [7]); второе же – в «нулевых» годах века нынешнего (см. [8]).

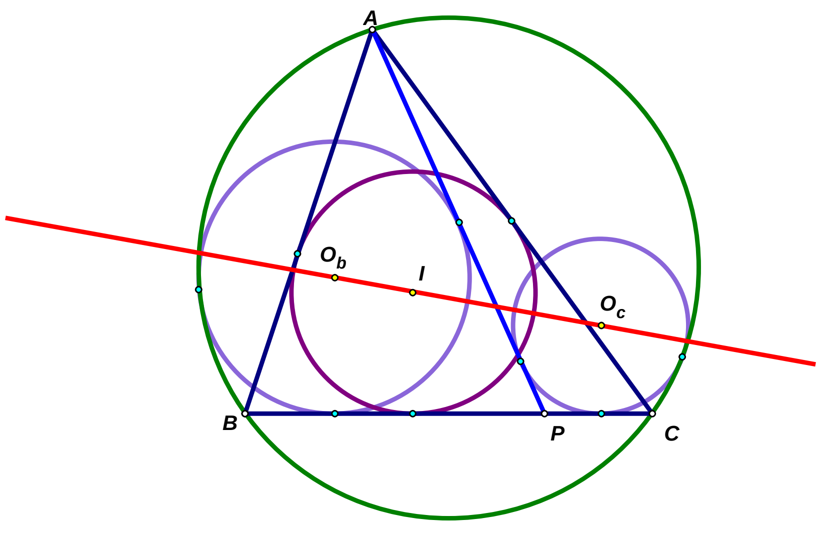
Последнее же доказательство (и чрезвычайно красивое, можно даже сказать, *блестящее* – но, правда, местами пересекающиеся с «нулевым» доказательством В.Ю. Протасова) теоремы Фейербаха было обнаружено, насколько это мне известно, французским геометром *Жаном – Луи Ами* в 2010 году – см. [9].

Но, какое бы доказательство теоремы Фейербаха мы бы ни стали рассматривать – аналитическое, смешанное, геометрическое – понимание любого из них сопряжено с известными трудностями и усилиями. Т.е. простого объяснения этого удивительного факта, по-видимому, просто не существует – по самой его природной сути.

1.3 *Теорема Тебо.*

В 1938 году выдающийся *композитор* геометрических (и не только[2]) задач, французский математик *Виктор Тебо,* опубликовал в одном из журналов следующую теорему (без доказательства):

Опишем около произвольного треугольника ABC окружность, а также и впишем в него окружность. Затем выберем *<u>произвольно</u>* *на стороне BC точку P и рассмотрим две окружности, первая из которых касается отрезков AP и BC и (внутренним образом) описанной окружности, вторая же – отрезков AP и AC и (опять же, внутренним образом) описанной окружности.*



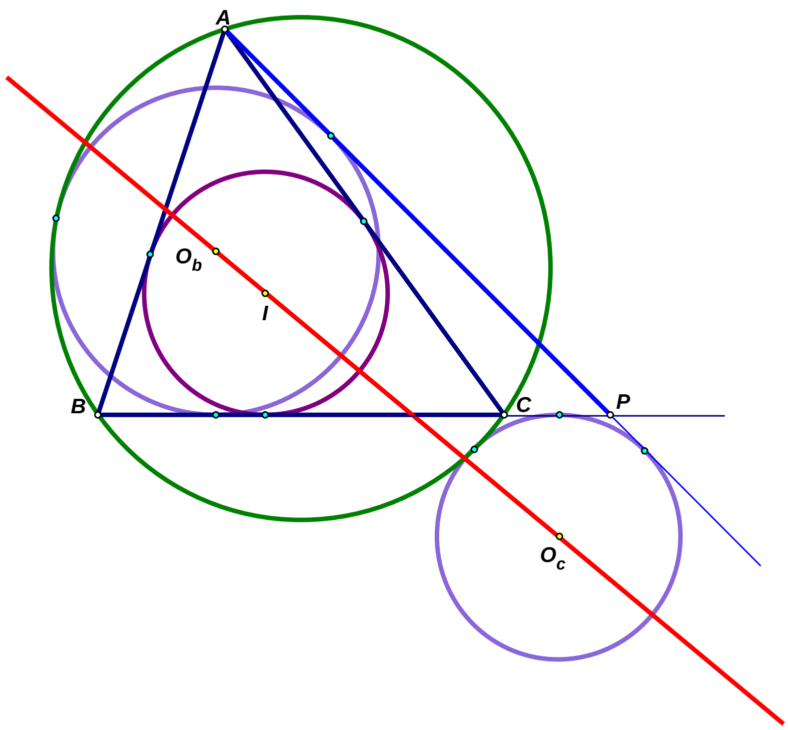
[2] Согласно [8], Виктор Тебо (1882 – 1960) за свою научную карьеру создал более 1000 теорем и задач – теорема, о которой пойдет речь, является самым известным его достижением – в каком-то смысле, вершиной.

Тогда центры этих окружностей O_b, O_c и центр вписанной окружности[3] *I всегда будут* <u>*коллинеарны*</u>.

Известно (см. [8]), что первые (полностью вычислительные) доказательства этой теоремы были получены в 1970-ых годах, а первое синтетическое и вовсе появилось лишь в 1986 году. А одно из последних геометрических – опять же, найдено В.Ю. Протасовым в начале 2000-ых.

И здесь, как и в случае с теоремой Фейербаха, восприятие любого из известных доказательств – далеко не легкая прогулка.

На следующем рисунке показано, как меняются условия теоремы Тебо в случае, когда точка P лежит *на продолжении* отрезка BC.



Сформулируйте соответствующее утверждение самостоятельно.

§2. Некоторые необходимые факты.

Здесь мы дадим некоторые определения и приведем формулировки некоторых утверждений (без доказательств, но с соответствующими ссылками), которые нам понадобятся для доказательства *Основной Теоремы.*

2.1 *О барицентрических координатах и некоторых их свойствах – совсем коротко* (подробнее см. [6]).

[3] Сейчас всё больше входит в моду лаконичное словцо «*инцентр*» - калька с английского « *incenter*».

Пусть имеется треугольник ABC и точка P в его плоскости. Говорят, что *точка P имеет барицентрические координаты p,q,r относительно треугольника ABC, если она является центром масс системы материальных точек pA ,qB ,rC* ; т.е. p,q,r – те самые массы, которыми следует нагрузить вершины треугольника[4], чтобы, будучи расположен в пространстве произвольным образом и закреплен шарниром в точке P, он остался бы в равновесии. Записывается это таким образом: $P = (p: q: r)$, и значки «:» символически отражают т.н. *однородность* барицентрических координат – если умножить их всех одновременно на одно и то же ненулевое число, то центр масс не изменится.

В переводе на язык математики все вышесказанное означает, что $p\overrightarrow{PA} + q\overrightarrow{PB} + r\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

Как правило, чем точка «лучше», тем проще и симпатичнее ее барицентрические координаты, записанные в виде функций от сторон или углов треугольника.

Так, для центроида (точки пересечения медиан) имеем: $G = (1: 1: 1)$, а для инцентра - $I = (a: b: c) = (\sin A: \sin B: \sin C)$.

2.2 ***Об одном условии коллинеарности трех точек плоскости.***

Справедливо следующее утверждение.

Пускай на плоскости выбраны три точки A, B, C – причем известно, что для некоторой точки O (расположенной в той же плоскости) выполняется равенство

$\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ *(где $\alpha, \beta, \gamma -$ какие-то числа, не все одновременно равные нулю).*

Тогда точки A, B и C коллинеарны $\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$.

Здесь никаких ссылок не даю – поскольку доказательство совсем простое (надо только знать, как складываются и умножаются на число вектора), вот и найдите его собственными силами. Верно ли аналогичное утверждение для пространства?

Надеюсь, что эта задача каждому окажется по плечу.

2.3 ***Об инверсии и некоторых её свойствах – совсем коротко*** (подробнее см. [2], [3], [4], [5]).

Пусть на плоскости задана окружность ω с центром в O и радиуса R. Говорят, что точка P' есть инверсный образ точки $P \neq O$ при инверсии относительно окружности ω, если P' расположена на луче OP и выполняется равенство $OP \cdot OP' = R^2$ (при этом удобно считать, что плоскость пополнена некоей бесконечно удаленной точкой P_∞, в которую переходит центр O окружности инверсии, и наоборот).

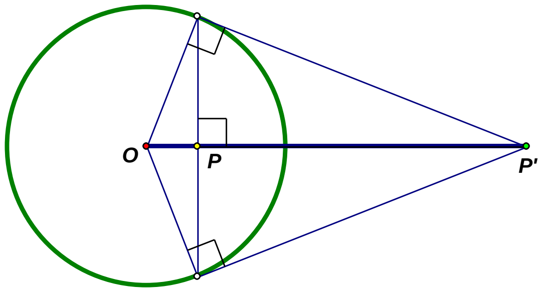
Из определения сразу следует, что внутренние точки окружности инверсии она переводит во внешние, внешние – во внутренние, а точки самой окружности оставляет на месте – причем, если точка P переходит в точку P', то и точка P' переходит в точку P.

[4] Здесь мы представляем себе треугольник *ABC* как невесомую пластину с отмеченными на ней тремя точками, которые затем нагружаем соответствующими массами.

Иначе говоря, инверсия в квадрате возвращает любую точку P обратно. Именно поэтому инверсию зачастую также называют *симметрией относительно окружности.*

На рисунке ниже изображено построение инверсного образа точек P и P'.

Можете пояснить картинку?



Перечислим четыре основных свойства инверсии.

2.3.1 *Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя.*

2.3.2 *Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии. И наоборот.*

2.3.3 *Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит также в окружность, не проходящую через центр инверсии.*

(Таким образом, вкратце эти три свойства можно сформулировать и так: *инверсия сохраняет класс прямых или окружностей*.)

2.3.4 *Инверсия сохраняет углы между линиями*[5].

§3. Доказательство основной теоремы по Дергиадесу.

В этом параграфе мы, наконец, дадим точную формулировку главного утверждения и его доказательство.

Также мы сформулируем еще пару связанных с конструкцией фактов, доказательства которых оставляем слушателям / читателям (их – т.е. доказательства - можно также посмотреть в статье [10]) .

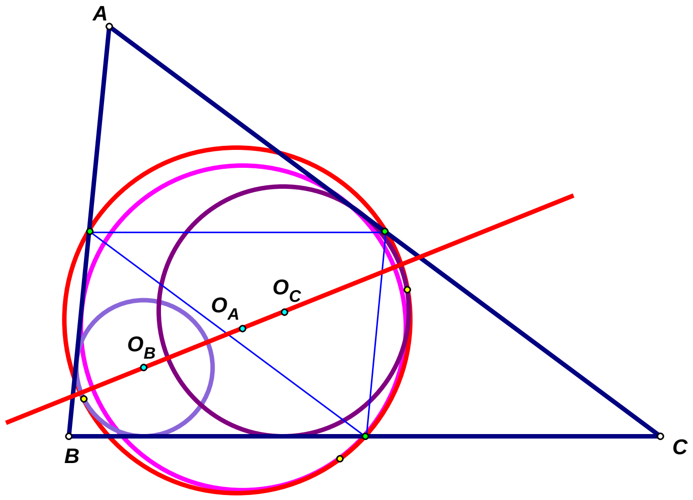
Основная теорема.

[5] Если линии пересекаются в некоторой точке, то углом между ними называют угол между касательными к ним в точке пересечения. Разумеется, если касательные *существуют*. Нет касательной – нет и угла. Преобразования, сохраняющие углы, называют также *конформными*.

Пусть имеется остроугольный треугольник ABC, и три окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$[6] *– вписанные, соответственно, в углы A, B и C треугольника и касающиеся внутренним образом окружности девяти точек треугольника ABC.*

Пусть O_A, O_B, O_C *– центры этих окружностей.*

Тогда они всегда коллинеарны (т.е. принадлежат одной прямой).



Ниже я приведу доказательство, принадлежащее греческому геометру Николаосу (или просто Никосу) Дергиадесу (Nikolaos Dergiades), довольно хитроумно[7] использовавшего с этой целью *инверсию*[8].

Что касается доказательства авторского (т.е. собственно моего) – оно было проделано совсем уже грубым лобовым счетом в барицентрических координатах[9]; и мне его не то что здесь приводить, но даже и вспоминать не очень-то комфортно-☺.

Доказательство.

Пусть I –точка пересечения биссектрис треугольника ABC (она же – центр вписанной в этот треугольник окружности). Поскольку три рассматриваемы окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ вписаны в углы треугольника, их центры O_A, O_B, O_C лежат на биссектрисах AI, BI, CI этих углов.

Рассмотрим вектора $\overrightarrow{IO_A} = p\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IO_B} = q\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IO_C} = r\overrightarrow{IC}$ – понятно, что среди коэффициентов p, q, r вообще, в данном случае, нет нулей.

---

[6] Естественно, отличные от вписанной в треугольник *ABC* окружности.

[7] Как тут не вспомнить: «*…далеко опере'живал всех изобре'теньем многих Хитростей царь Одиссей*» - Гомер, Одиссея. В этой увлекательной книжке вообще то и дело мелькают обороты вроде следующих «*…ему отвечал Одиссей хитроумный (богоравный)*»-☺. (Перевод В. Жуковского)

[8] Таким образом, это доказательство *перекликается* с доказательством теоремы Фейербаха, приведенным в [5] – которое также использует инверсию.

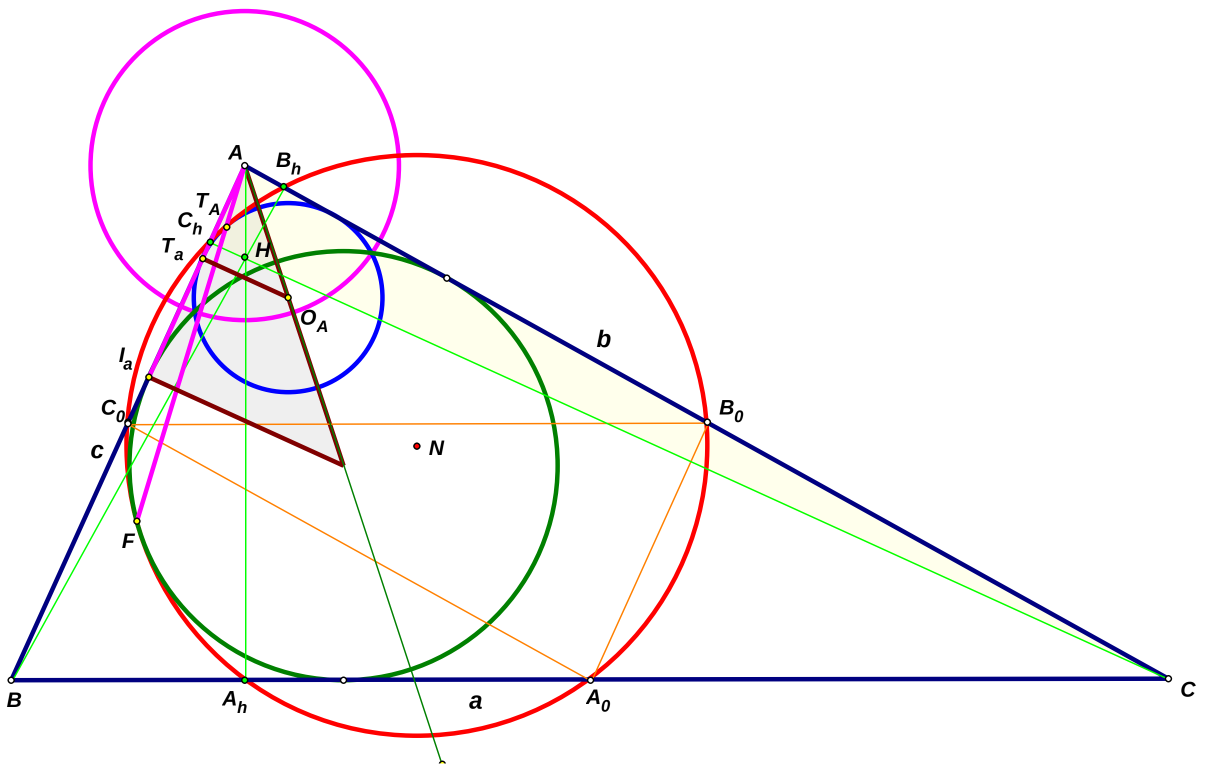
[9] Как мне сравнительно недавно стало известно, некоторые особо продвинутые подростки употребляют вместо длинного словосочетания *барицентрические координаты* краткий и ласковый термин *барики*. -☺

Поскольку $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (см. **2.1**), то $\left(\frac{a}{p}\right)\overrightarrow{IO_A} + \left(\frac{b}{q}\right)\overrightarrow{IO_B} + \left(\frac{c}{r}\right)\overrightarrow{IO_C} = \vec{0}$.

В силу утверждения **2.2** , точки O_A, O_B, O_C ***коллинеарны*** $\Leftrightarrow \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 0$.

Остается только *самая малость* – выразить коэффициенты *p, q, r* через длины сторон *a, b, c* исходного треугольника *ABC*, и убедится в том, что равенство $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \frac{c}{r} = 0$

действительно имеет место быть.



Найдем, например, коэффициент *p*.

Пусть B_h и C_h - основания соответствующих высот треугольника *ABC*. (Поскольку, по условию, этот треугольник – *остроугольный*, то основания высот расположены *на* его *сторонах*, а не на продолжениях). И пусть B_0, C_0 – середины соответствующих сторон треугольника *ABC*.

Тогда, по теореме о касательной и секущей, $AB_h \cdot AB_0 = AC_h \cdot AC_0 = b\cos A \cdot \frac{c}{2} =$ (по теореме косинусов)$= \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$.

Рассмотрим теперь ***инверсию*** относительно окружности ***с центром в A и радиуса***

$R = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$. Она, по своему определению (см. **2.3**) и с учетом предыдущих равенств, переводит пары точек (C_h, C_0) и (B_h, B_0) друг в друга, и, значит, окружность девяти точек – в себя[10]. В себя также переходят прямые AB и AC (см. **2.3.1**). А поскольку инверсия сохраняет углы (см. **2.3.4**) и вписанная окружность касается (по теореме Фейербаха – см. **1.2**) окружности Эйлера внутренним образом, то рассматриваемая инверсия переводит ***вписанную окружность в данную в условии окружность с центром в O_A (и $F \leftrightarrow T_a$).***

Но тогда и точки касания окружностей со стороной AB переходят друг в друга:

$I_a \leftrightarrow T_a$.

Значит, $AI_a \cdot AT_a = R^2 = \frac{1}{4}(b^2+c^2-a^2)$.

И, как хорошо известно, $AI_a = s-a = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) - a = \frac{b+c-a}{2}$ (как отрезок касательной к вписанной в него окружности, проведенный из соответствующей вершины).

Наконец, из подобия прямоугольных треугольников AI_aI и AT_aO_a получаем, что $\frac{AO_A}{AI} = \frac{AT_a}{AI_a} = (\text{см. выше}) = \frac{R^2}{AI_a{}^2} = \frac{R^2}{(s-a)^2} = \frac{AI-IO_A}{AI} = 1 - \frac{IO_A}{IA}$.

Значит, $p = \frac{IO_A}{IA}$ (согласно нашему рисунку – но, вообще говоря, возможен и случай, когда перед дробью следует поставить знак «минус» - если точки I_a и T_a расположены в другом порядке; однако на окончательный результат это не влияет)$= 1 - \frac{R^2}{(s-a)^2} = \cdots = \frac{2(a-b)(a-c)}{(b+c-a)^2}$ (проверьте самостоятельно! всё происходит в полном соответствии с замечательной формулой *разности квадратов* -☺).

И, совершенно аналогично можно показать, что $q = \frac{2(b-c)(b-a)}{(c+a-b)^2}$ и

$r = \frac{2(c-a)(c-b)}{(a+b-c)^2}$ (эти равенства получаются из найденного выражения для p циклическими сдвигами по схеме $a \to b \to c \to a$).

С учетом полученных формул для коэффициентов, нужно в заключение проверить, что

$\frac{a(b+c-a)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(c+a-b)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a+b-c)^2}{(c-a)(c-b)} = 0$ (на двойку мы сократили).

Или, избавившись от знаменателей:

$$\boldsymbol{a(b-c)(b+c-a)^2 + b(c-a)(c+a-b)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = 0.}$$

Вообще-то, банальное раскрытие скобок приведет, вне всяких сомнений (рано или поздно), к цели. Но вот два рецепта для, так сказать, *математических гурманов.*

а) Рассмотреть функцию

$$f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a(b-c)(b+c-a)^2 + b(c-a)(c+a-b)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2},$$

[10] И это означает, на самом деле, что окружность девяти точек *ортогональна* окружности инверсии, т.е. радиусы, проведенные из центров этих окружностей к соответствующим точкам их пересечения, будут *перепндикулярны*.

считая b и c некоторыми *константами.*

Затем вычислить её производную по a, вплоть до третьей и убедиться в том, что

$f'''(a) = 6(b-c) - 6b + 6c \equiv 0$. Затем проверить, что выполняются равенства

$f''(0) = 0, f'(0) = 0$ и $f(0) = 0$. Отсюда, по известной теореме из анализа (*если производная функции на интервале тождественно равна нулю, то сама функция есть константа на этом же интервале*), будет вытекать, что $f(a) \equiv 0$.

b) Рассмотреть ту же самую функцию, но на сей раз воспользоваться следующими алгебраическими соображениями:

$f(a)$, как функция от переменной *a* представляет собой многочлен некоторой степени, не превышающей *третьей*. Согласно известной теореме из алгебры (следствие теоремы Безу), *если многочлен степени* n *имеет* $n+1$ *различных корней, то <u>он равен нулю тождественно.</u>* Поэтому достаточно проверить, к примеру, что

$f(0) = f(b) = f(c) = f(b+c) = 0$. (Можно также подключить проверку условия $f(\pm 1) = 0$ – если это окажется проще сделать, чем проверить, что $f(b) = f(c) = 0$).

Доказанная теорема – это еще не всё интересное в исследуемой конфигурации.

Оказывается, прямая, на которой расположены центры O_A, O_B, O_C имеет вполне себе *замечательный <u>геометрический смысл</u>*.

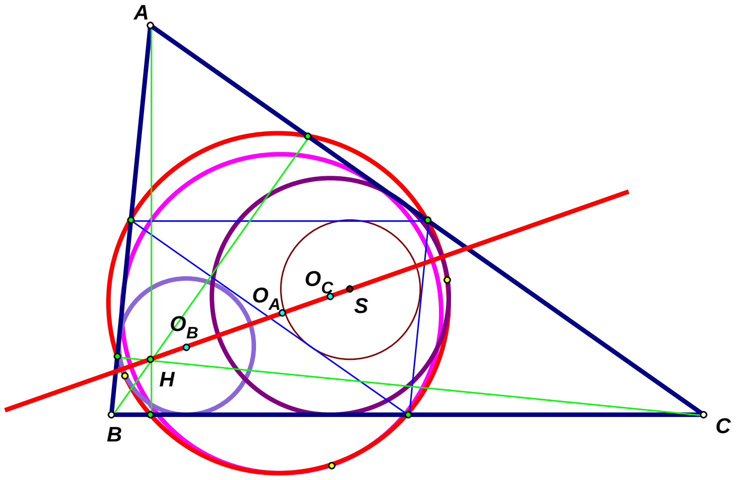
А именно, справедливо следующее

***Утверждение* 3.1**

Прямая, содержащая центры O_A, O_B, O_C вписанных в углы остроугольного треугольника ABC окружностей, и касающихся внутренним образом окружности девяти точек, совпадает с прямой HS (где H – <u>ортоцентр</u>[11] этого треугольника, а S – его <u>точка Шпикера</u> , т.е. <u>центр окружности, вписанной в его серединный треугольник</u>[12]).

[11] Т.е., точка пересечения высот

[12] И она же – центр тяжести *периметра* треугольника *ABC*



И тот, кто разбирается в «бариках», сумеет доказать это утверждение без особого труда (тех же, кто разбирается в них не очень, мы отсылаем к брошюре [6]).

Для этого достаточно располагать следующими сведеньями:

3.1.1 *Барицентрические координаты ортоцентра.*

$H = \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} : \frac{1}{c^2+a^2-b^2} : \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right)$.

3.1.2 *Барицентрические координаты точки Шпикера.*

$S = (b + c : c + a : a + b)$.

3.1.3 *Уравнение прямой (в барицентрических координатах), проходящей через две данные точки с координатами* $(p_1 : q_1 : r_1)$ и $(p_2 : q_2 : r_2)$.

Это уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

(если раскрыть определитель)$(q_1 r_2 - q_2 r_1)x + (r_1 p_2 - r_2 p_1)y + (p_1 q_2 - p_2 q_1)z = 0$.

Пользуясь этими тремя свойствами, несложно показать, что уравнение прямой, проходящей через точки H и S, будет таким:

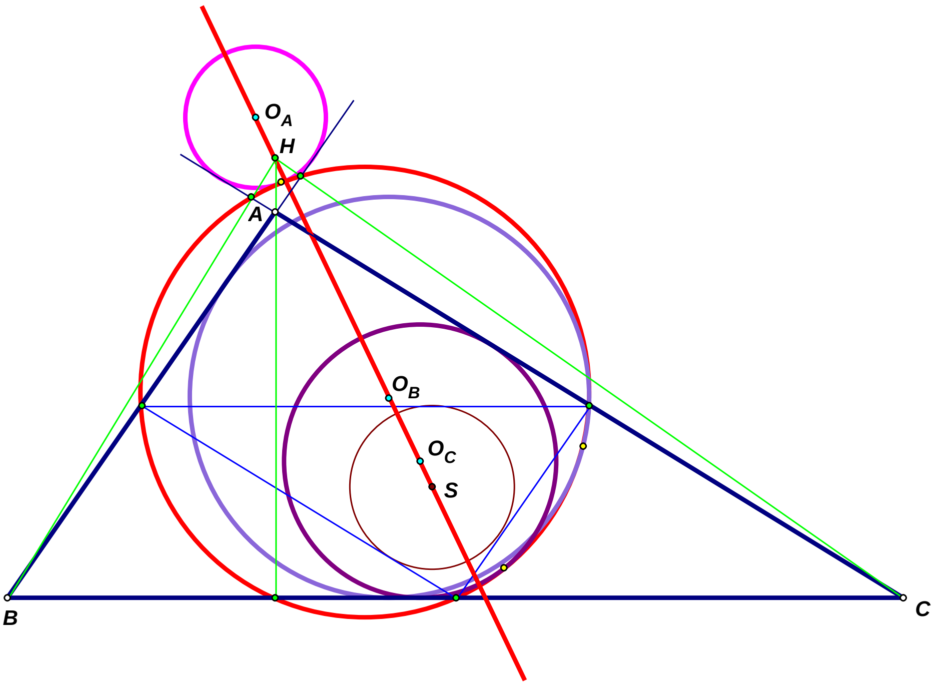
$(b - c)(b^2 + c^2 - a^2)x + (c - a)(c^2 + a^2 - b^2)y + (a - b)(a^2 + b^2 - c^2)z = 0$.

Кроме того, поскольку $I = (a : b : c)$ – см. и $\overrightarrow{IO_A} = p\overrightarrow{IA}$ - где, как мы только что сосчитали, $p = \frac{2(a-b)(a-c)}{(b+c-a)^2}$, то с легкостью вычисляем, что $O_A = \left(\frac{p(a+b+c)}{1-p} + a : b : c\right)$.

(Координаты двух других центров находятся из полученных циклическими перестановками).

Ну, и надо подставить координаты центра O_A в уравнение прямой HS и убедится, что действительно оно обратится в нуль (наверное, здесь придётся немножко повозиться – но это всё мелкие трудности непринципиального характера).

В заключение этого параграфа посмотрим, как поменяется формулировка ***Основной Теоремы*** и ***Утверждения 3*** в случае *тупоугольного треугольника.*



Вглядевшись пристально в приведенную выше картинку, сформулируйте (и попробуйте доказать! – доказательство, конечно же, почти один в один повторит то, которое мы проделали для случая остроугольного треугольника) соответствующую теорему.

А что получится, если треугольник *прямоугольный*?

§4. А в чем же проблема?

Желательно, чтобы каждая лекция, прочитанная увлекающимся математикой школьникам, содержала какие-нибудь относительно «свежие» проблемные вопросы, предполагающие посильные на них ответы.

Касательно данной лекции: вроде бы, основное утверждение, которому она была посвящена, доказано и потому никаких таких особенных вопросов и нету.

Однако это не совсем так, один вопрос всё же имеется, и притом весьма (*с точки зрения геометрии*) существенный.

Дело в том, что приведённое выше доказательство Дергиадеса носит, на самом деле, ярко выраженный *вычислительный* характер – за вычетом изобретательно применённой инверсии (впрочем, как мы видели – эта инверсия и есть фундамент всего доказательства). Истинный знаток и ценитель элементарной геометрии никогда с таким доказательством полностью «примириться» не сможет: ему подавай *доказательство* исключительно *геометрическое*, наподобие таковых для теоремы Тебо в [8] или теоремы Фейербаха в [7], [8].

Отсюда и проблема:

Найти чисто геометрическое доказательство теоремы о коллинеарных центрах.[13]

Список литературы.

1. Гайдук Ю., Хованский А. Краткий обзор исследований по геометрии треугольника. Опубликовано в журнале «Математика в школе», № 5, 1958.
2. Жижилкин И. Инверсия. Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 35. М.,МЦНМО, 2009. http://www.math.ru/lib/book/pdf/mp-seria/035_zhizhilkin.pdf
3. Заславский А. Геометрические преобразования. М.,МЦНМО, 2004. http://www.math.ru/lib/book/pdf/geometry/Zaslavsky.pdf
4. Коксетер Г., Грейтцер С. Новые встречи с геометрией. Москва-Ижевск, НИЦ «РХД», 2003. http://www.math.ru/lib/book/djvu/geometry/kokseter.djvu
5. Коксетер Г. Введение в геометрию. М., Наука, 1966.
6. Мякишев А. Элементы геометрии треугольника. Библиотека «Математическое просвещение», выпуск 19. М., МЦНМО, 2009. http://www.math.ru/lib/book/pdf/mp-seria/book.19.pdf
7. Протасов В. Вокруг теоремы Фейербаха. Опубликовано в журнале «Квант» № 9, 1992. http://kvant.mccme.ru/au/protasov_v.htm
8. Протасов В. Касающиеся окружности. От Тебо до Фейербаха. Опубликовано в журнале «Квант» № 4, 2008. http://geometry.ru/articles/protasovtebo.pdf
9. Jean-Lois Ayme. Feurbuch’s theorem. A new purely synthetic proof. 2010. http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Feuerbach1.pdf Имеется авторизованный перевод на русский Д.Швецова: http://geometry.ru/articles/aymefeuerbach.pdf
10. Nikolaos Dergiades and Alexei Myakishev. A triad of circles tangent internally to the nine-point circle. В журнале Forum Geometricorum. Vol 13 (2013). http://forumgeom.fau.edu/FG2013volume13/FG2013index.html

[13] И справившемуся с ней автор данных строк гарантирует публикацию в каком-нибудь журнале типа «Квант», «Математическое образование», «Фрактал» или «Математика в школе».
Пишите по адресу:
myakishev62@mail.ru