Окружности шести точек прямоугольного треугольника

1. Точки касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон, образующие ортоцентрические четверки.

Перейдем теперь к рассмотрению ортоцентров треугольников с вершинами в точках касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон.

Определение. Назовем четверку точек ортоцентрической, если любая из них служит ортоцентром треугольника с вершинами в оставшихся трех точках.

Теорема 1. Следующие четверки точек касания вписанной и вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон являются ортоцентрическими:

A_I, A_b, B_b, B_I; B_I, B_a, A_a, A_I; A_a, A_b, B_c, B_I; B_b, B_a, A_c, A_I; A_b, A_c, B_c, B_b; B_a, B_c, A_c, A_a.

В треугольнике $A_IA_bB_b$ высоты B_bC и A_bA_H пересекаются в точке B_I (рис.1), в треугольнике $A_aA_bB_c$ высоты B_cC и A_bK также пересекаются в точке B_I и, наконец, в треугольнике $A_bA_cB_c$ высоты B_cC и A_cH_a пересекаются в точке B_b (см. предложение 3 в [1]). Для оставшихся трех треугольников $B_IB_aA_c$, $B_bB_aA_a$, $B_bB_aA_c$, $B_aB_cA_c$ доказательство совершенно аналогично приведенному выше.

Рис.1

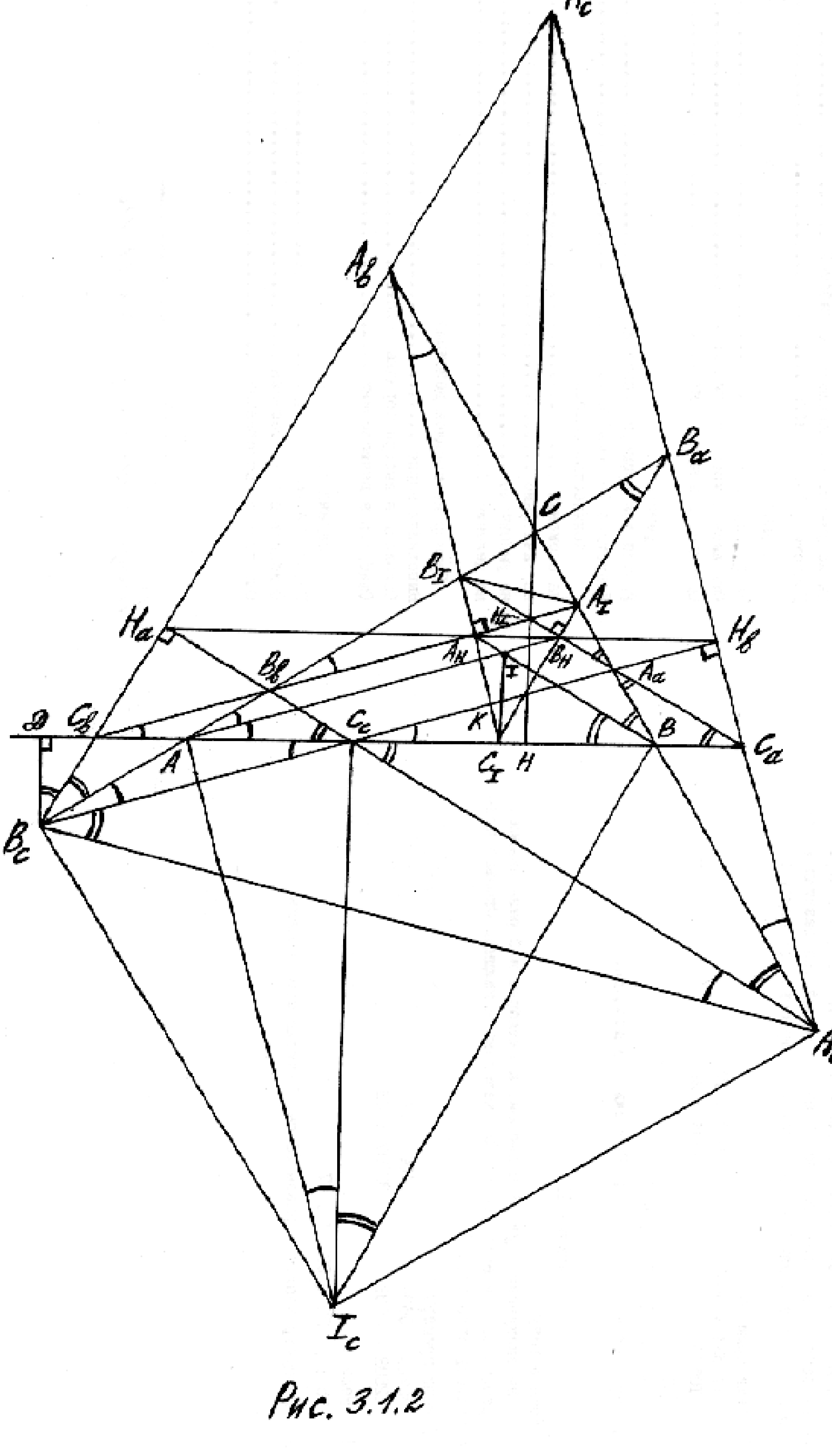

Рис. 3.1.2

Обозначим через X и Y точки пересечения прямой CH с прямыми A_IC_I и B_IC_I соответственно.

<u>Предложение 1.</u> Точки X и Y лежат соответственно на прямых A_aC_c и B_bC_c и совпадают с ортоцентрами треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$.

Рассмотрим треугольник $C_bC_IH_I$ (рис.2). Поскольку $H_IH \perp C_bC_I$ и $C_IA_H \perp C_bH_I$, то ортоцентр треугольника $C_bC_IH_I$ совпадает с точкой пересечения прямых CH и B_IC_I, т.е. с Y. Тогда $C_bY \perp C_IH_I$, но $C_IH_I \perp A_IB_I$ (H_I - ортоцентр треугольника $A_IB_IC_I$), поэтому $C_bY \parallel A_IB_I \parallel A_cB_c$.

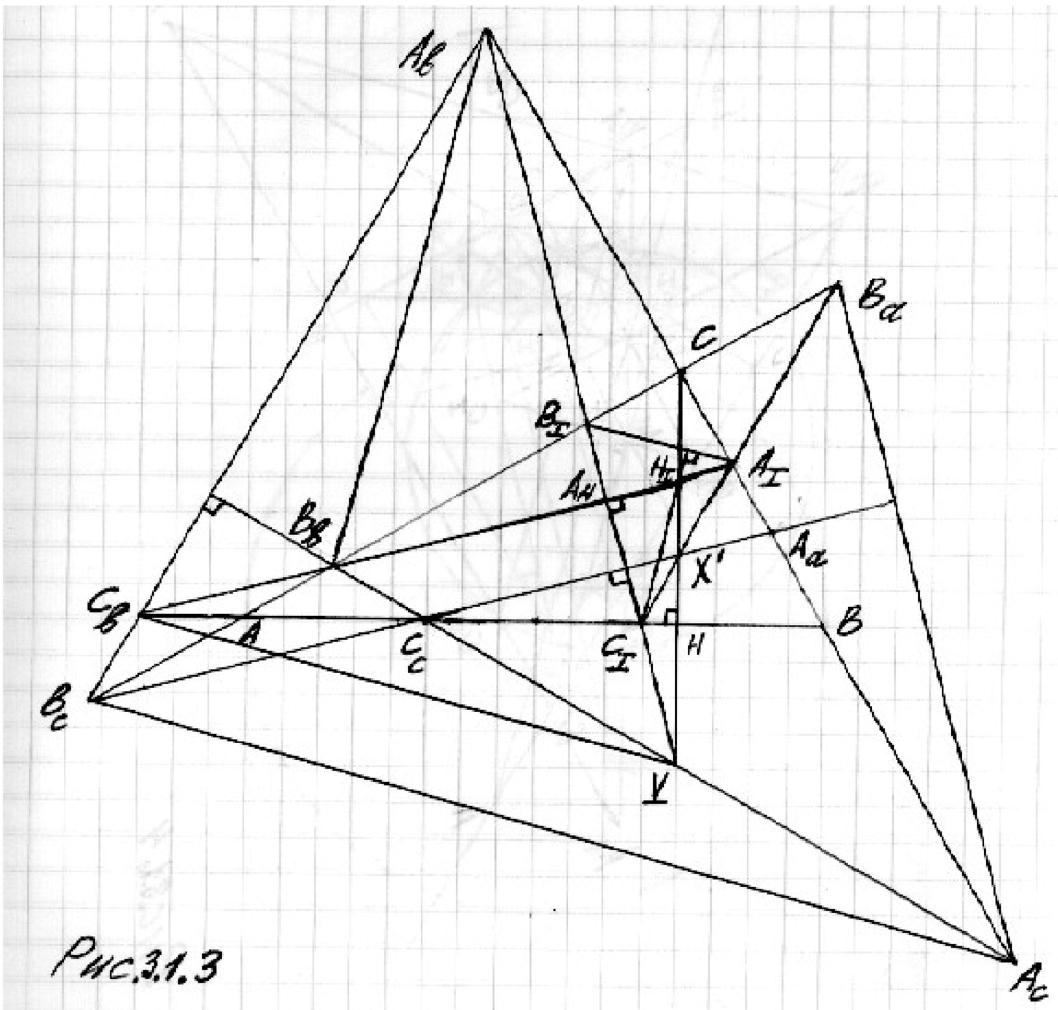

Рис.2

С другой стороны, так как $A_bA_H \perp C_bB_b$ и $C_cB_b \perp A_bC_b$ (по теореме 2 из [1] B_b - ортоцентр треугольника $A_bA_cB_c$), то ортоцентр P треугольника $A_bB_bC_b$ совпадает с точкой пересечения прямых A_bC_I и B_bC_c. Тогда $C_bP \perp A_bB_b$, но $A_bB_b \perp A_cB_c$, поскольку B_b -

ортоцентр треугольника $A_bA_cB_c$. Отсюда следует, что $C_bP \parallel A_cB_c$ и, таким образом, точка P лежит на прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c.

Итак, точка P совпадает с точкой пересечения прямой $A_bC_I = B_IC_I$ с прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c. Вспомнив, что точка Y также лежит на прямой B_IC_I и прямой, проходящей через C_b параллельно A_cB_c, получим, что точки P и Y совпадают. Но точка P лежит на прямой B_bC_c как ортоцентр треугольника $A_bB_bC_b$, поэтому совпадающая с P точка Y лежит на B_bC_c.

Обозначим через X' точку пересечения прямых A_aC_c и CH и рассмотрим треугольник C_cYX'. Поскольку $C_cH \perp YX'$ и $YC_I \perp C_cX'$, то C_I - ортоцентр треугольника C_cYX', т.е. $X'C_I \perp C_cY$, но XC_I также перпендикулярна C_cY, так как X лежит на A_IC_I, а $A_IC_I \perp B_IA_a$ и $B_IA_a \parallel B_bC_c$.

Отсюда следует, что X' лежит на прямой A_IC_I, и, таким образом, точки X' и X совпадают.

<u>Следствие 1.</u> Ортоцентры двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы, лежат на прямой, содержащей высоту этого прямоугольного треугольника.

Из предложений 1, 3 из [1] и следствия 1 сразу же вытекает

<u>Теорема 2.</u> Ортоцентры четырех треугольников с вершинами в точках касания соответственно вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон лежат на прямой, содержащей высоту этого прямоугольного треугольника.

В дальнейшем будем обозначать ортоцентры треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$ через H_a и H_b соответственно, а основания высот треугольника $A_cB_cH_c$, опущенных из вершин A_c и B_c - через A_1 и B_1.

2. Окружности Эйлера некоторых треугольников, связанных с прямоугольным треугольником, и средняя линия этого прямоугольного треугольника.

<u>Предложение 2.</u> Центры окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух

вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы лежат на прямой, содержащей среднюю линию этого треугольника, параллельную его гипотенузе.

Обозначим через B_1 основание высоты треугольника $A_aB_aC_a$, опущенной из вершины A_a (рис.3). Поскольку $C_cA_a \perp B_aC_a$, а $\angle B_1A_cC_c = 45°$, то прямоугольный треугольник $A_cB_1C_c$ является равнобедренным и его вершина B_1 лежит на серединном перпендикуляре MB отрезка A_cC_c, совпадающем с биссектрисой внешнего угла при вершине B прямоугольного треугольника ABC. Отсюда вытекает, что центр вневписанной окружности I_a лежит на прямой BB_1.

С другой стороны, точка I_a лежит на биссектрисе AI угла BAC, которая проходит через основание B_H высоты B_IB_H треугольника $A_IB_IC_I$ (см. доказательство предложения 2 из [1]). Ортоцентр H_a треугольника $A_aB_aC_a$ совпадает с точкой пересечения отрезков C_cB_1 и A_IC_I, поэтому $B_HI_a \parallel H_aB_1$ как перпендикуляры к одной и той же прямой B_aC_a и $H_aA_I \parallel B_1I_a$ как перпендикуляры к биссектрисе BI.

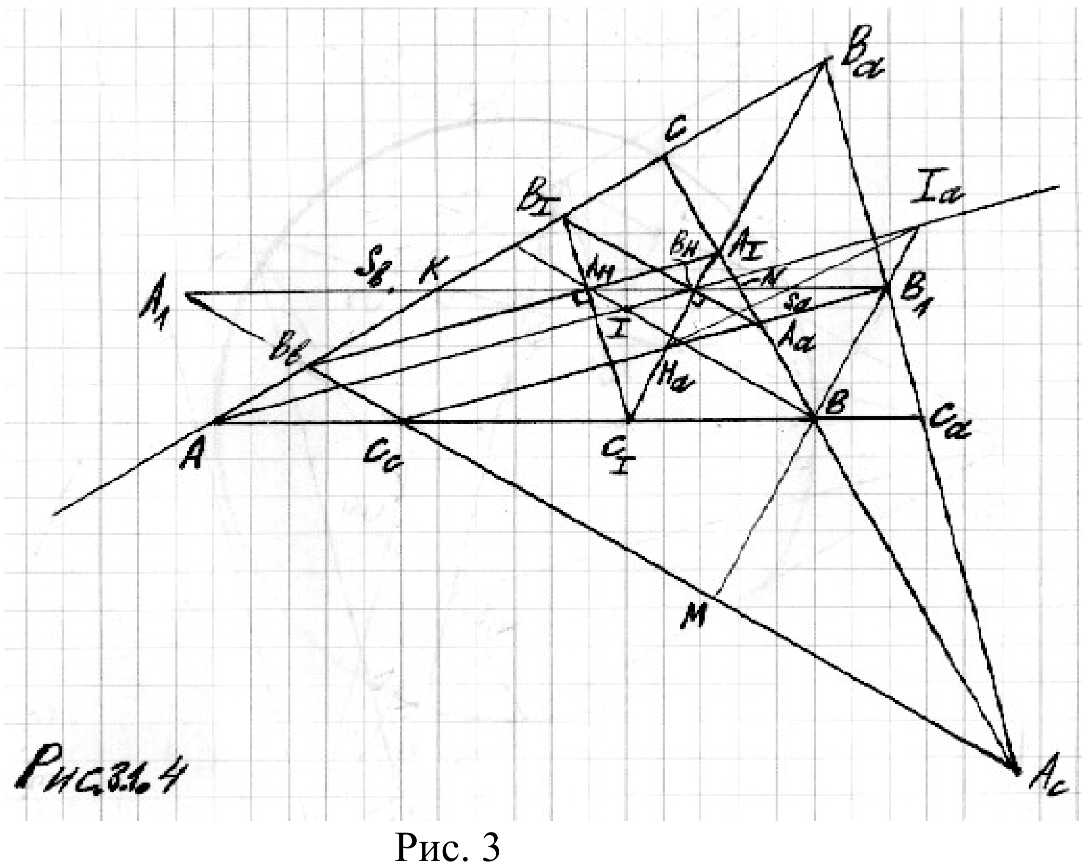

Рис. 3

Так как I_a - центр описанной окружности треугольника $A_aB_aC_a$, а H_a - его ортоцентр, то центром окружности Эйлера треугольника

$A_aB_aC_a$ является середина отрезка I_aH_a, которая совпадает с серединой отрезка B_HB_1. Но согласно предложениям 2 и 5 из [1] точки B_H и B_1 лежат на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC, параллельную его гипотенузе (напомним, что B_1 совпадает с основанием высоты треугольника $A_cB_cH_c$, опущенной из вершины B_c в силу того, что точки B_c, C_c, H_a, A_a лежат на одной прямой), поэтому и середина S_a отрезка B_HB_1 лежит на этой же прямой. Для треугольника $A_bB_bC_b$ доказательство аналогично.

Из следствий 1 и 2 из [1] и предложения 2 вытекает

Теорема 3. Центры окружностей Эйлера четырех треугольников с вершинами в точках касания соответственно вписанной и трех вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с его сторонами и продолжениями сторон лежат на прямой, содержащей среднюю линию этого прямоугольного треугольника, параллельную его гипотенузе.

Предложение 3. Расстояние между центрами окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы равно полусумме катетов этого прямоугольного треугольника.

Обозначим через К и N середины катетов AC и BC треугольника ABC (рис.3). Так как $NB_1 \parallel BC_a$, то $\angle NB_1B = \angle B_1BC_a = \angle NBB_1$ и в треугольнике NB_1B имеем $NB_1 = NB = a/2$.

Учитывая то, что $\angle A_aB_HA_I = 90°$, а N - середина A_aA_I, получим, что $NB_H = 1/2A_aA_I = 1/2(BC - BA_a - CA_I) = 1/2(a - 2r) = a/2 - r$. Аналогично $KA_H = b/2 - r$, поэтому $NA_H = KN - KA_H = c/2 - (b/2 - r) = r + (c - b)/2 = p - c + (c - b)/2 = (a + b - c)/2 + (c - b)/2 = a/2$.

Точно так же выводится, что и $KB_H = b/2 = KA_1$. Отсюда следует, что $B_1A_H = B_1N + NA_H = a/2 + a/2 = a$ и $A_1B_H = A_1K + KB_H = b/2 + b/2 = b$.

Окончательно находим, что расстояние между центрами окружностей Эйлера треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_bB_bC_b$, совпадающими с серединами отрезков B_1B_H и A_1A_H (см.

доказательство предложения 3), равно $S_aB_H + B_HA_H + A_HS_b = 1/2B_1B_H + 1/2A_1A_H + B_HA_H = 1/2(B_1A_H - A_HB_H) + 1/2(A_1B_H - A_HB_H) + A_HB_H = 1/2(B_1A_H + A_1B_H) = 1/2(a + b)$.

Упражнение 1. Докажите, что длина отрезка A_HB_H равна радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

Следствие 2. Расстояние между центрами окружностей Эйлера двух треугольников с вершинами в точках касания каждой из двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника с одним из катетов, продолжением другого катета и продолжением гипотенузы равно сумме радиусов описанной и вписанной окружностей этого прямоугольного треугольника.

Согласно предложению 3 данное расстояние равно $1/2(AC + BC) = 1/2(AB_I + B_IC + CA_I + A_I B) = 1/2(AC_I + C_IB + 2r) = 1/2(AB + 2r) = 1/2(2R + 2r) = R + r$.

3. Окружности шести точек прямоугольного треугольника.

Теорема 4. Точка касания A_I вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC с его катетом BC, точка касания A_a его вневписанной окружности с катетом BC, внешняя и внутренняя точки Фейербаха F_a и F того же треугольника, ортоцентры H_I и H_a треугольников $A_IB_IC_I$ и $A_aB_aC_a$ лежат на одной окружности S_a.

Точка касания B_I вписанной окружности прямоугольного треугольника ABC с его катетом AC, точка касания B_b его вневписанной окружности с катетом AC, внешняя и внутренняя точки Фейербаха F_b и F, ортоцентры H_I и H_b треугольников $A_IB_IC_I$ и $A_bB_bC_b$ также лежат на одной окружности S_b.

Так как прямая B_IA_a параллельна биссектрисе угла ABC прямоугольного треугольника ABC (рис.4), то $\angle H_IA_aA_I = \beta/2$. С другой стороны, учитывая то, что согласно предложению 1 из [1] ортоцентр H_I треугольника $A_IB_IC_I$ лежит на высоте CH, получим, что $\angle H_IH_aA_I = \angle C_IBI = \beta/2(H_IH \perp C_IB, A_IH_a \perp BI)$.

Таким образом, $\angle H_I H_a A_I = \angle H_I A_a A_I$, откуда следует, что точки A_I, H_I, H_a, A_a лежат на одной окружности S_a. Аналогично можно показать, что и точки B_I, H_I, H_b, B_b лежат на одной окружности S_b.

Обозначим теперь через P вторую точку пересечения окружностей S_a и S_b. Тогда $\angle B_I P H_I = \angle B_I B_b H_I = \alpha/2$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $B_I H_I$ окружности S_b, а $\angle H_I P A_I = \angle H_I A_a A_I = \beta/2$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу $H_I A_I$ окружности S_a, поэтому $\angle B_I P A_I = \angle B_I P H_I + \angle H_I P A_I = \angle B_I B_b H_I + \angle H_I A_a A_I = \alpha/2 + \beta/2 = (\alpha + \beta)/2 = 90°/2 = 45° = \angle B_I C_I A_I$, т.е. $\angle B_I P A_I = \angle B_I C_I A_I$. Последнее равенство означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника $A_I B_I C_I$, совпадающей с вписанной окружностью треугольника ABC.

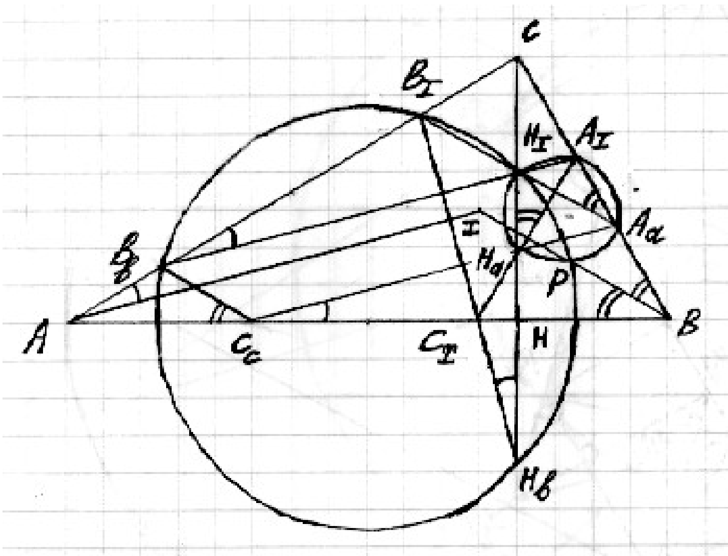

Рис. 4

Поскольку прямые $B_b A_I$ и $A_a B_I$ параллельны соответственно биссектрисам углов A и B треугольника ABC, то $\angle B_I H_I B_b = \angle A_I H_I A_a = 45°$. Теперь мы можем найти угол $B_b P A_a$, учитывая то, что P - общая точка окружностей S_a, S_b и вписанной окружности треугольника ABC:

$\angle B_b P A_a = \angle B_b P B_I + \angle B_I P A_I + \angle A_I P A_a = \angle B_b H_I B_I + \angle B_I C_I A_I + A_I H_I A_a = 45° + 45° + 45° = 135°$.

Таким образом, $\angle B_b P A_a = \angle B_b C_c A_a$, откуда следует, что точка P лежит на описанной окружности треугольника $B_b C_c A_a$. Но, как мы уже знаем (см. теорему 2 из [2]), описанная окружность треугольника $B_b C_c A_a$ является одной из окружностей восьми точек прямоугольного треугольника ABC.

Эта окружность восьми точек пересекает вписанную окружность треугольника ABC в двух точках: точке касания с гипотенузой C_I и внутренней точке Фейербаха F. Тогда точка P должна совпадать либо с точкой C_I, либо с точкой F.

Первая возможность исключается, поскольку окружность S_a пересекает прямую A_IC_I в двух точках A_I и H_a, отличных от C_I. Таким образом, точка P совпадает с внутренней точкой Фейербаха F треугольника ABC.

Мы получили, что окружность S_a проходит через точки A_I, F, A_a, а окружность S_b - через точки B_I, F, B_b. Но согласно утверждению в самом конце статьи [2] каждая из двух четверок точек A_I, F, A_a, F_a; B_I, F, B_b, F_b лежит на одной окружности (т.е. указанные точки лежат на двух окружностях), поэтому окружность S_a проходит также через точку F_a, а окружность S_b - через точку F_b.

Будем называть окружности S_a и S_b окружностями шести точек прямоугольного треугольника ABC.

<u>Упражнение 2.</u> Докажите, что описанная окружность прямоугольного треугольника с острыми углами 30° и 60° концентрична с одной из окружностей шести точек этого треугольника.

<u>Следствие 3.</u> Окружности шести точек S_a и S_b прямоугольного треугольника ABC касаются прямой A_IB_I, проходящей через точки касания A_I и B_I вписанной окружности с катетами BC и AC, в точках A_I и B_I соответственно.

Обозначим центры окружностей S_a и S_b теми же буквами S_a и S_b. Тогда $\angle A_IS_aA_a = 2\angle A_IH_IA_a = 2 \times 45° = 90°$, т.е. $A_IS_aA_a$ - равнобедренный прямоугольный треугольник и $\angle S_aA_IA_a = 45°$.

Теперь можно найти угол $B_IA_IS_a$: $\angle B_IA_IS_a = 180° - \angle B_IA_IC - \angle S_aA_IA_a = = 180° - 45° - 45° = 90°$, но это и означает, что окружность S_a касается прямой A_IB_I в точке A_I. Аналогично, окружность S_b касается прямой A_IB_I в точке B_I.

<u>Следствие 4.</u> Прямая, проходящая через внутреннюю точку Фейербаха прямоугольного треугольника и ортоцентр треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности этого

прямоугольного треугольника с его сторонами, делит пополам отрезок, концы которого совпадают с точками касания вписанной окружности прямоугольного треугольника с его катетами.

Поскольку прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, является радикальной осью этих окружностей (см. [3]), то она проходит через середину отрезка, концы которого совпадают с точками касания с этими окружностями их общей внешней касательной.

Осталось заметить, что согласно теореме 1 окружности S_a и S_b пересекаются в точках H_I и F, а согласно следствию 1 общая внешняя касательная окружностей S_a и S_b касается их в точках A_I и B_I.

<u>Предложение 4.</u> Пусть A_H и B_H - основания высот треугольника $A_IB_IC_I$, опущенных из вершин A_I и B_I. Тогда центр описанной окружности треугольника A_HCB_H совпадает с серединой отрезка A_IB_I, а его ортоцентр - с ортоцентром H_I треугольника $A_IB_IC_I$.

Так как $\angle A_IA_HB_I = \angle B_IB_HA_I = \angle A_ICB_I = 90°$, то точки A_H, B_H, C лежат на окружности, построенной на A_IB_I как на диаметре. В доказательстве предложения 3 показано, что $A_HN = NB_1 = CN = NB = a/2$ (рис.5), поэтому четырехугольник A_HCB_1B является прямоугольником и $CA_H \perp A_HB$, но $B_IB_H \| A_HB$, откуда $B_HB_I \perp CA_H$. Аналогично $A_HA_I \perp CB_H$.

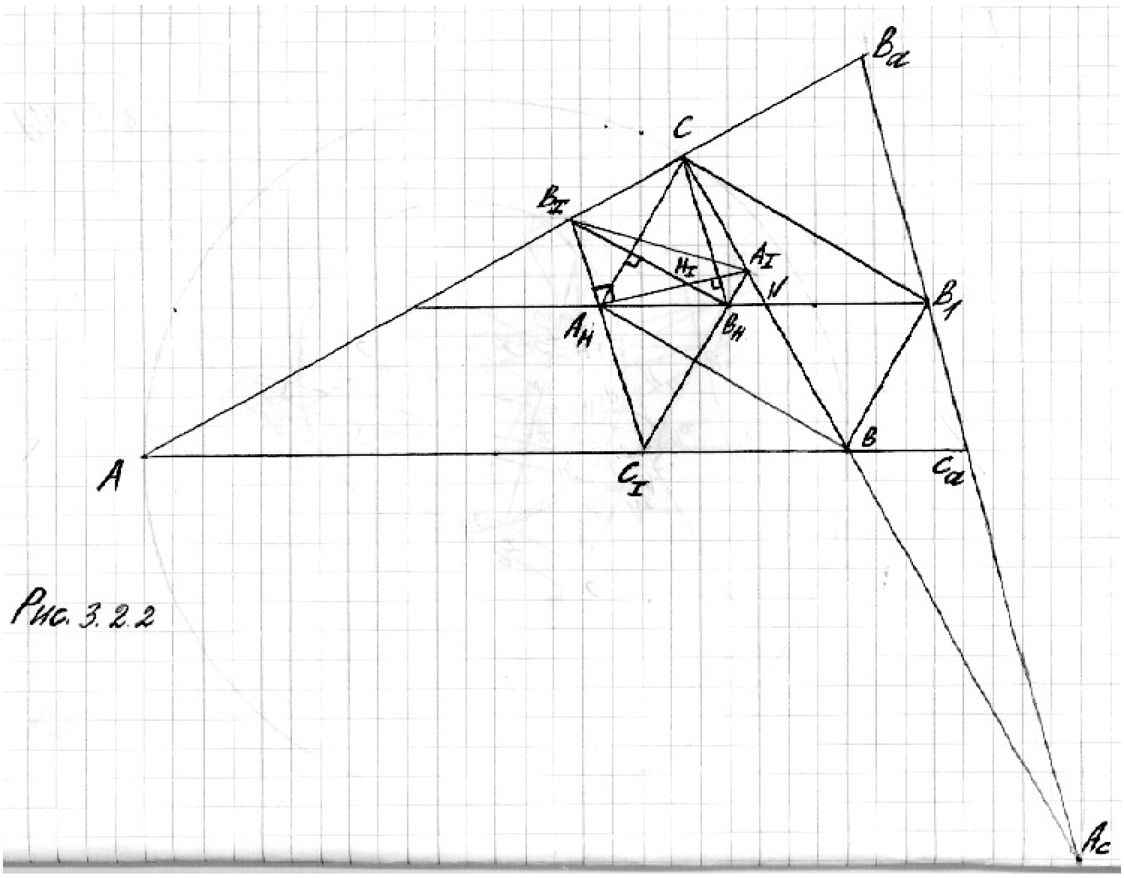

Рис. 5

<u>Теорема 5.</u> Прямая Эйлера треугольника, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а две другие - с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой вершины на биссектрисы острых углов этого прямоугольного треугольника, проходит через внутреннюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника.

Согласно следствию 4 середина отрезка A_IB_I, ортоцентр H_I треугольника $A_IB_IC_I$ и внутренняя точка Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC лежат на одной прямой, но согласно предложению 4 центр описанной окружности треугольника A_HCB_H совпадает с серединой отрезка A_IB_I, а ортоцентр - с ортоцентром H_I треугольника $A_IB_IC_I$.

Таким образом, прямая, проходящая через середину A_IB_I и точку H_I, является прямой Эйлера треугольника A_HCB_H. Осталось показать то, что точки A_H и B_H совпадают с основаниями перпендикуляров, опущенных из вершины C на биссектрисы AI и BI треугольника ABC.

Это следует из того, что $CA_H \perp BA_H$, $CB_H \perp AB_H$ (см. доказательство предложения 4) и того, что точки A_H и B_H лежат на биссектрисах BI и AI треугольника ABC (см. доказательство предложения 2 в [1]).

Следствие 5. Описанные окружности каждого из двух прямоугольных треугольников, вершины прямых углов которых совпадают с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а вершины острых углов - с точками касания вписанной и вневписанной окружностей данного прямоугольного треугольника с его катетами, проходят через внутреннюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника.

Поскольку по теореме 4 внутренняя точка Фейербаха F прямоугольного треугольника ABC лежит на окружности шести точек S_a этого прямоугольного треугольника, то $\angle A_IFA_a = \angle A_IH_IA_a = 45°$ (рис.6). Но точка F лежит также на вписанной окружности треугольника ABC, поэтому $\angle B_IFA_I = \angle B_IC_IA_I = 45°$.

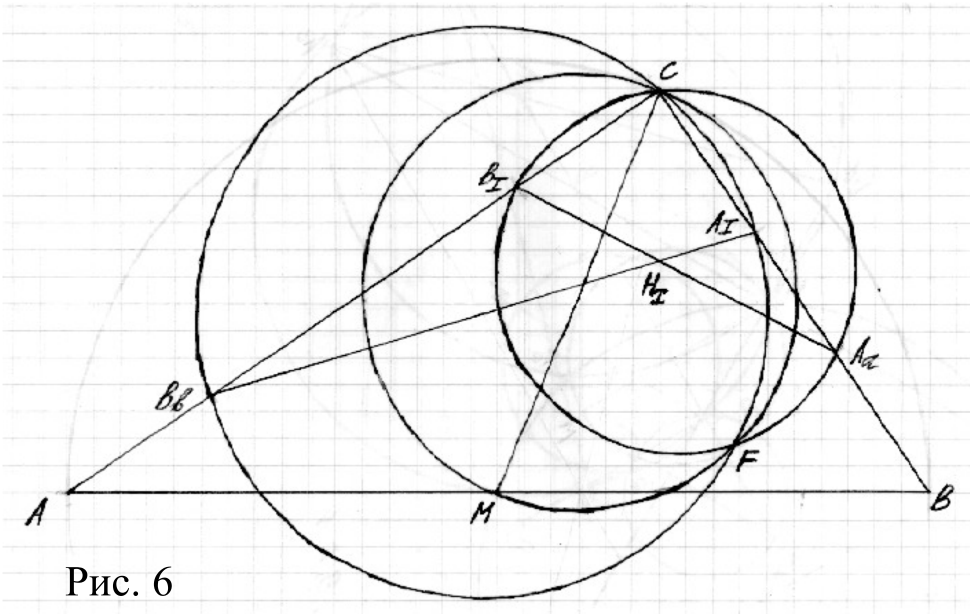

Рис. 6

Отсюда получаем, что $\angle B_IFA_a = \angle B_IFA_I + \angle A_IFA_a = 45° + 45° = 90°$ и, таким образом, точка F лежит на описанной окружности прямоугольного треугольника A_aB_IC. Аналогично доказывается, что точка F лежит также на описанной окружности прямоугольного треугольника A_IB_bC.

Теорема 6. Точки касания A_b и A_c вневписанных окружностей I_b и I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжениями его катета BC, внешние точки Фейербаха F_b и F_c того же треугольника, ортоцентры H_a и H_c треугольников $A_aB_aC_a$ и $A_cB_cC_c$ лежат на одной окружности S'_a.

Точки касания B_a и B_c вневписанных окружностей I_a и I_c прямоугольного треугольника ABC с продолжениями его катета AC, внешние точки Фейербаха F_a и F_c, ортоцентры H_b и H_c треугольников $A_bB_bC_b$ и $A_cB_cC_c$ также лежат на одной окружности S'_b.

Упражнение 3. Докажите теорему 6.

Следствие 6. Вторая точка пересечения описанных окружностей прямоугольных треугольников A_bB_cC и A_cB_aC совпадает с внешней точкой Фейербаха F_c прямоугольного треугольника ABC (рис.7).

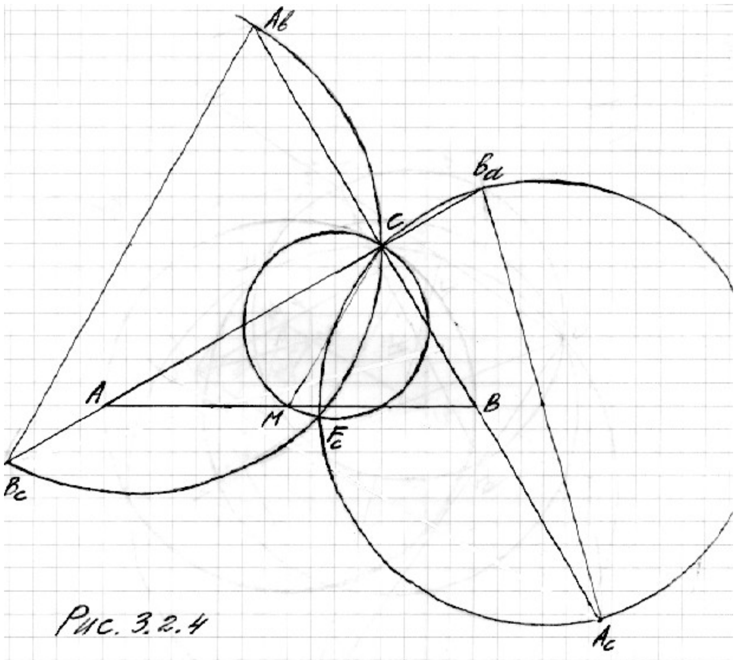

Рис. 7

Упражнение 4. Докажите следствие 6.

Следствие 7. Вторые точки пересечения описанных окружностей прямоугольных треугольников A_aB_cC и A_IB_aC, A_cB_bC и A_bB_IC совпадают соответственно с внешними точками Фейербаха F_a и F_b прямоугольного треугольника ABC (рис.8 и 9).

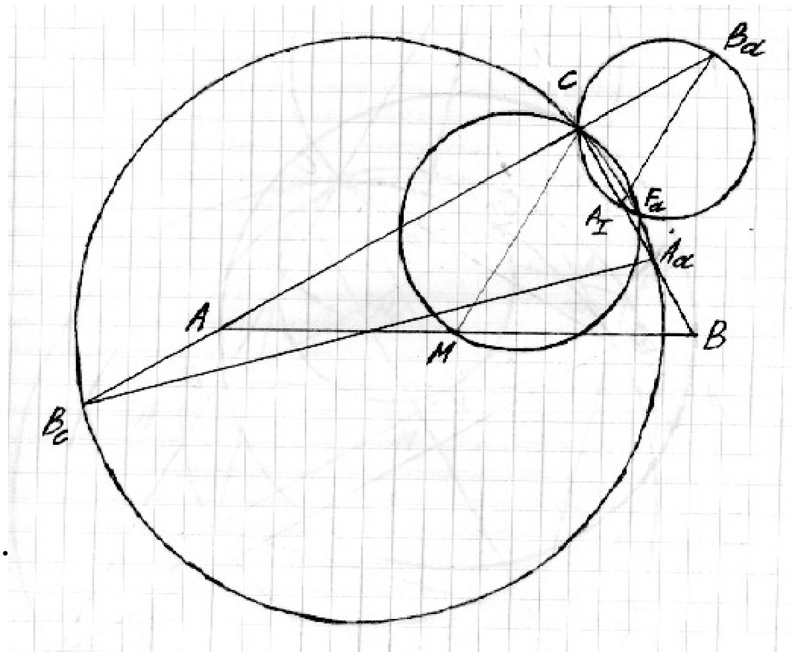

Рис. 8.

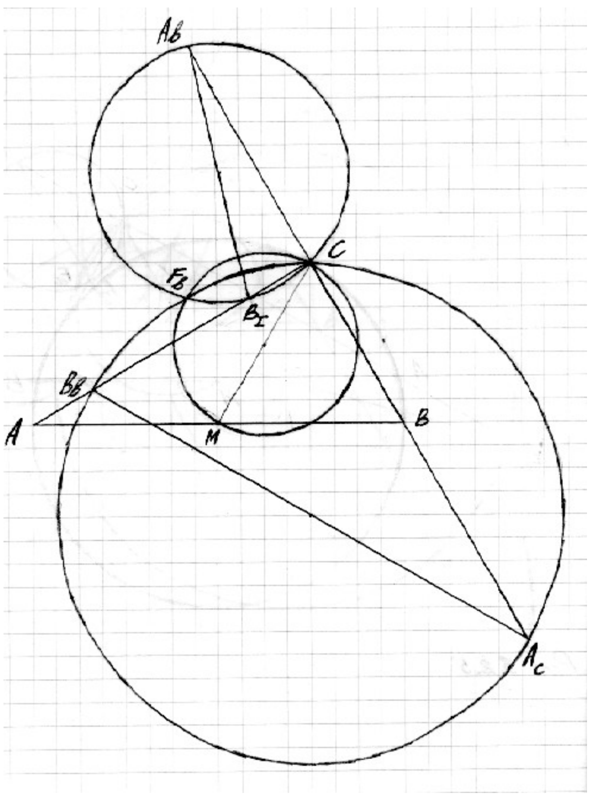

Рис. 9.

Упражнение 5. Докажите следствие 7.

Следствие 8. Окружности шести точек S'_a и S'_b прямоугольного треугольника ABC касаются прямой A_cB_c в точках A_c и B_c соответственно.

Упражнение 6. Докажите следствие 8.

Следствие 9. Прямая H_cF_c делит пополам отрезок A_cB_c.

Упражнение 7. Докажите следствие 9.

Теорема 7. Прямая Эйлера треугольника, одна из вершин которого совпадает с вершиной прямого угла данного прямоугольного треугольника, а две другие - с основаниями перпендикуляров, опущенных из этой вершины на биссектрисы углов, смежных с острыми углами этого прямоугольного треугольника, проходит через ту внешнюю точку Фейербаха данного прямоугольного треугольника, которая лежит на вневписанной окружности, касающейся гипотенузы.

Упражнение 8. Докажите теорему 7.

Литература

1. Е.Д. Куланин. Прямоугольный треугольник. Журнал "Математическое образование", №1(41), 2007.
2. Е.Д. Куланин. О четырех окружностях четырех точек треугольника и двух окружностях восьми точек прямоугольного треугольника. Журнал "Математическое образование",№4(39),2006.
3. Л.С. Атанасян и др. Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 8 класса. М., «Просвещение», 1996.