

Вневписанная окружность 1.

Увидеть вневписанную окружность.

Биссектриса как г.м.т. Угол между биссектрисами.

Определение. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других его сторон, называется вневписанной для этого треугольника.

Сколько вневписанных окружностей у любого треугольника? Где лежат их центры? Что является их радиусами?

Таким образом: 1) *точка пересечения биссектрис двух внешних углов треугольника лежит на биссектрисе внутреннего угла этого треугольника*; 2) *существуют ровно четыре точки, равноудаленные от прямых, содержащих стороны треугольника.*

Пример 1. В треугольнике ABC с углом A , равным 120° , проведены биссектрисы AM , BL и CK . Докажите, что треугольник MKL – прямоугольный.

Базовая задача. Биссектрисы внутренних (внешних) углов B и C пересекаются в точке I .

Найдите угол BIC , если $\angle BAC = \alpha$. [$90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ и $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ соответственно]

Докажите, что точка I , лежащая на биссектрисе угла A , является центром вписанной (вневписанной) окружности, если она лежит в одной (разных) полуплоскости с A относительно BC и $\angle BIC = 90 + \frac{1}{2}\angle A$ ($\angle BIC = 90 - \frac{1}{2}\angle A$).

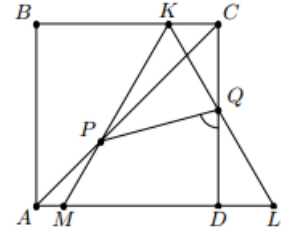
Пример 2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $\angle MAN = 45^\circ$. AH – высота треугольника AMN . Докажите, что $AH = AB$.

Вневписанная окружность. Биссектриса как г.м.т. Угол между биссектрисами.

0. Прямые PA и PB касаются окружности с центром O (A и B – точки касания). Проведена третья касательная к окружности, пересекающая отрезки PA и PB в точках M и K . Докажите, что угол $МОК$ не зависит от выбора третьей касательной.

1. В треугольнике ABC : $\angle A = 45^\circ$, BH – высота, точка K лежит на стороне AC , причем $BC = CK$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABK совпадает с центром вневписанной окружности треугольника BCH .

2. Квадрат $ABCD$ и равносторонний треугольник MKL расположены так, как это показано на рисунке. Найдите угол PQD .



3. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно так, что $AC = CM$ и $MN = NB$. Высота треугольника, проведенная из вершины B , пересекает отрезок CM в точке H . Докажите, что NH – биссектриса угла MNC .

4. Биссектрисы углов A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P , а биссектрисы углов C и D пересекаются в точке Q (точки Q и P различны). Прямая PQ проходит через середину стороны AB . Найдите угол DAB , если $\angle ABC = \alpha$.

5. Дан правильный треугольник ABC и прямая l проходящая через его центр. Точки пересечения этой прямой со сторонами AB и AC отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что прямая, проходящая через получившиеся точки, касается вписанной окружности треугольника ABC .

6. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE , отразившись от стороны AD , пересекает BE в точке F . Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.

7. На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, причем так, чтобы его граница пересекала границу полосы в 4 точках. Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки пересекаются под углом 45° .

8. В треугольнике ABC с острым углом при вершине A проведены биссектриса AE и высота BH . Известно, что $\angle AEB = 45^\circ$. Найдите угол ENC .

9. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30° . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?

10. В треугольнике ABC угол A равен 60° . L_1 , L_2 и L_3 – основания биссектрис AL_1 , BL_2 и CL_3 . Точка P симметрична точке A относительно прямой L_2L_3 . Докажите, что точка P лежит на прямой BC .