

## Степень точки и инцентр.

Обозначения.

Пусть  $BL$  – биссектриса треугольника  $ABC$  ( $AB < BC$ ),  $M$  – середина стороны  $AC$ ,  $I$  – центр вписанной окружности радиуса  $r$ ,  $O$  – центр описанной окружности радиуса  $R$ ,  $W$  – середина дуги  $AC$ , не содержащей точку  $B$ ,  $N$  – середина дуги  $AC$ , содержащей точку  $B$ ,  $I_B$  – центр внеписанной окружности радиуса  $r_b$ , касающейся стороны  $AC$ ;  $\omega$  – окружность, описанная около треугольника  $AIC$ ,  $P$  – точка, симметричная  $A$  относительно  $BL$ .

Докажите, что:

1. А)  $WA$  – касательная к окружности, описанной около треугольника  $BAL$ .

Б)  $WI^2 = WL \cdot WB = WM \cdot WN$ .

2. А)  $P$  лежит на окружности  $\omega$ . Б)  $BI \cdot BI_B = BA \cdot BC$ .

3. А)  $P$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $CLW$ . Б)  $BL \cdot BW = BA \cdot BC$ .

В)  $BL \cdot LW = AL \cdot LC$ . Г) Выведите **формулу биссектрисы**:  $BL^2 = BA \cdot BC - AL \cdot LC$ .

4. А)  $\frac{r}{BI} = \frac{CW}{WN} = \frac{r_b}{BI_B}$ .

Б) Докажите **формулу Эйлера**: 1)  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ ; 2)  $OI_B^2 = R^2 + 2Rr_b$ .

5. А)  $WI$  – касательная к окружности, описанной около треугольника  $MIN$ .

Б) (Всероссийская олимпиада, 2005, региональный этап, 9.4)  $\angle IMA = \angle INB$ .

В) (Всероссийская олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, 2018) Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность.  $BL$  и  $CN$  — биссектрисы треугольников  $ABD$  и  $ACD$  соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников  $ABL$  и  $CDN$ , пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямая  $PQ$  проходит через середину дуги  $AD$ , не содержащей точку  $B$ .

6. А) Пусть точки  $I_1$  и  $I_2$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $ABM$  и  $CBM$  ( $M$  – середина  $AC$ ), а точки  $J_1$  и  $J_2$  – центры внеписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

Б) (окружная олимпиада, 2018) В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $BM$ . Точки  $P$  и  $Q$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ABM$  и  $CBM$  соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников  $ABP$  и  $CBQ$  лежит на отрезке  $BM$ .

7. Пусть  $K$  – точка пересечения перпендикуляра к  $BI$ , проведенного в точке  $I$  и прямой  $AC$ . Докажите, что точка  $R$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $I$  на  $WK$ , лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .

8. (ММО, 2013, 10.6) Пусть  $I$  – центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника  $ABC$ . Через  $A_1$  обозначим середину дуги  $BC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , не содержащей точки  $A$ , а через  $A_2$  – середину дуги  $BAC$ . Перпендикуляр, опущенный из точки  $A_1$  на прямую  $A_2I$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $A'$ . Аналогично определяются точки  $B'$  и  $C'$ .

а) Докажите, что точки  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  лежат на одной прямой.

б) Докажите, что эта прямая перпендикулярна прямой  $OI$ , где  $O$  – центр описанной окружности треугольника  $ABC$ .

9. Окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $C_1$  и  $A_1$  соответственно и касается внутренним образом окружности, описанной около треугольника  $ABC$  в точке  $T$ . Докажите, что:

А) (**лемма Верье**) точка  $I$  лежит на прямой  $A_1C_1$ .

Б) точка  $T$  совпадает с точкой  $R$  (см. задачу 7).