

Степень точки и инцентр.

Основные факты:

1. Свойства хорд (секущих) и касательной. Обратные утверждения.
2. Степень точки.
3. Теорема «трилистника» и «четырёхлистник»

Задачи для самостоятельного решения.

Пусть BL – биссектриса треугольника ABC ($AB < BC$), M – середина стороны AC , I – центр вписанной окружности радиуса r , O – центр описанной окружности радиуса R , W – середина дуги AC , не содержащей точку B , N – середина дуги AC , содержащей точку B , I_B – центр невписанной окружности радиуса r_b , касающейся стороны AC , ω – окружность, описанная около треугольника AIC , P – точка, симметричная A относительно BL .

Докажите, что:

1. А) WA – касательная к окружности, описанной около треугольника BAL .

Б) $WI^2 = WL \times BW$.

2. А) P лежит на окружности ω .

Б) $BI \times BI_B = BA \times BC$.

В) $BQ^2 = BA \times BC$, где BQ – касательная к окружности ω .

3. А) P лежит на окружности, описанной около треугольника CLW .

Б) $BL \times BW = BA \times BC$.

4. Выведите из 2 и 3 **формулу биссектрисы**: $BL^2 = BA \times BC - AL \times LC$.

5. Пусть точки I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABM и CBM , а точки J_1 и J_2 – центры невписанных окружностей этих треугольников, касающихся сторон AB и BC соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

6. А) $\frac{r}{BI} = \frac{CW}{WN}$.

Б) Докажите **формулу Эйлера**: 1) $OI^2 = R^2 - 2Rr$; 2) $OI_B^2 = R^2 + 2Rr_b$.

7. А) WI – касательная к окружности, описанной около треугольника MIN .

Б) $\angle IMA = \angle INB$.

В) Прямая, содержащая общую хорду окружностей, описанных около треугольников MIN и BAL , проходит через W .

8. Пусть K – точка пересечения перпендикуляра к BI , проведенного в точке I и прямой AC . Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC .

9. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Внутри треугольника выбрана точка P такая, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$.

Докажите, что $AP \geq AI$, причём равенство выполняется тогда и только тогда, когда P совпадает с I .