9 класс
2009/10 уч. год
Степень точки относительно окружности.
Радикальная ось двух окружностей и радикальный центр трех окружностей.

Пусть дана окружность ω и точка P. Прямая, проходящая через точку P, пересекает окружность в точках A и B (см. рис. 1 а, б). Тогда величина $|PA| \times |PB|$ не зависит от выбора прямой (теорема о пересечении хорд окружности или теорема о произведении отрезка секущей и ее внешней части).

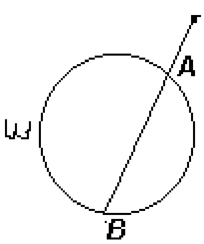


Рис. 1а

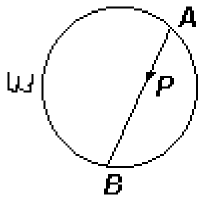
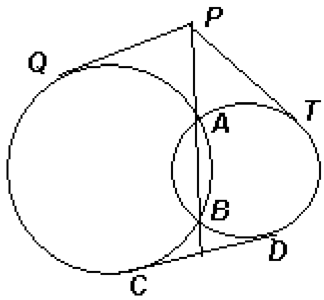


Рис. 1б

Эта величина, взятая со знаком «+», если точка P лежит вне окружности, и со знаком «–», если P – внутри окружности, называется ***степенью точки P относительно окружности ω***. Если точка P лежит на окружности, то ее степень относительно окружности равна 0.



Упражнения. 1. Пусть O – центр окружности ω , R – ее радиус. Докажите, что степень точки P относительно окружности ω равна $|d^2 - R^2|$, где $d = |PO|$.

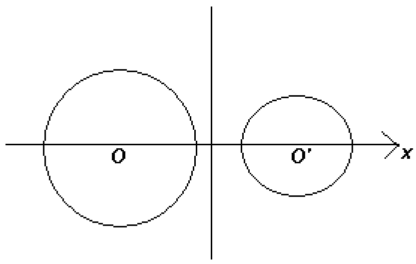
2. Пусть степень точки P относительно окружности ω положительна. Дайте ее геометрическую интерпретацию.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B (см. рис. 2).

Рис. 2

А) Точка P лежит на прямой AB вне отрезка AB. Докажите, что длины касательных, проведенных из точки P к обеим окружностям, равны.

Б) CD – общая внешняя касательная окружностей. Докажите, что прямая AB делит отрезок CD пополам.



Рассмотрим две произвольные неконцентрические окружности (O; R) и (O'; R') (см. рис. 3). Найдем ГМТ, у которых степени относительно этих окружностей равны.

Точка P принадлежит искомому ГМТ т. и т. т., когда $|PO|^2 - R^2 = |PO'|^2 - R'^2 \Leftrightarrow |PO|^2 - |PO'|^2 = R^2 - R'^2 = r^2$ ($R > R'$). Введем декартову систему координат так, что (OO') совпадает с осью абсцисс (см. рис. 3). Пусть $O(a; 0)$, $O'(b; 0)$, $P(x; y)$. Тогда $(x - a)^2 + y^2 - (x - b)^2 - y^2 = r^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{r^2 - a^2 + b^2}{2(b - a)}$ – ***прямая, перпендикулярная (OO')***.

Рис. 3

Такая прямая называется ***радикальной осью данных окружностей***.

Упражнение 4. А) Объясните, почему не существует радикальной оси двух концентрических окружностей.

Б) Может ли радикальная ось двух окружностей, не имеющих общих точек, пересекать одну из них?

В) Докажите, что радикальная ось пересекающихся окружностей проходит через точки их пересечения.

Г) Докажите, что радикальная ось касающихся окружностей является их общей касательной.

Рассмотрим три окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажем, что три прямые, являющиеся радикальными осями каждой пары данных окружностей пересекаются в одной точке.

Действительно, пусть прямая *a* – радикальная ось первых двух окружностей, а прямая *b* – радикальная ось второй и третьей окружности. Пусть $P = a \cap b$, тогда ее степень по отношению к первой и третьей окружностям одинакова, то есть точка *P* лежит на радикальной оси *c* первой и третьей окружности. Следовательно, прямые *a*, *b* и *c* пересекаются в точке *P*.

Эта точка называется ***радикальным центром трех окружностей***.

Упражнение 5. Пусть даны три окружности, которые пересекаются попарно. Докажите, что прямые, содержащие три общие хорды этих окружностей, либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник – равносторонний.

2. **А)** Докажите, что середины отрезков всех общих касательных к двум непересекающимся кругам лежат на одной прямой.

Б) В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках *A* и *B*, а другая – в точках *C* и *D* соответственно. Докажите, что прямая *AD* высекает на этих окружностях равные хорды.

3. **А)** Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся заданной прямой.

Б) На заданной прямой постройте точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.

4. **А)** На сторонах треугольника как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три прямые, содержащие общие хорды каждой пары окружностей, пересекаются в ортоцентре треугольника.

Б) Обобщите пункт А).

№5. Одна окружность проходит через вершины *A* и *C* прямоугольника *ABCD*, а другая – через вершины *B* и *D*. Докажите, что их общая хорда проходит через центр прямоугольника.