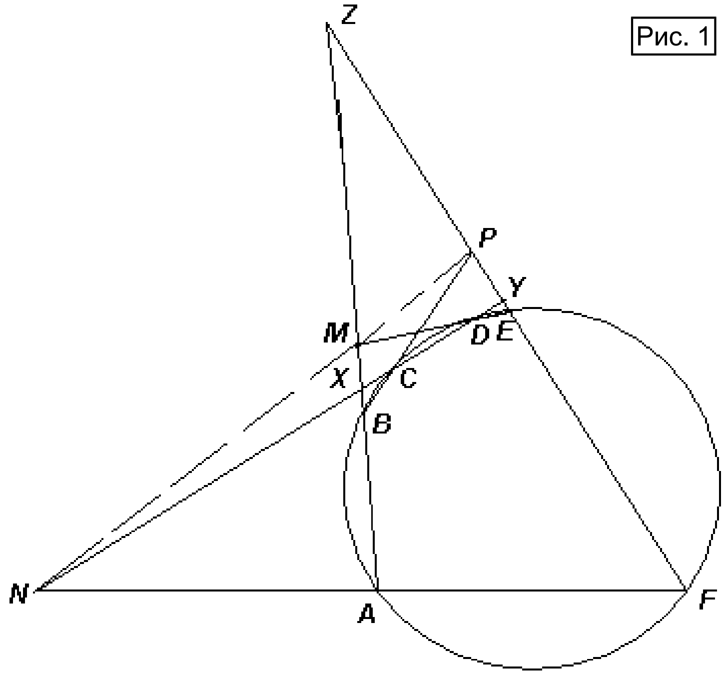
11 класс
2011/12 ex/ ujl
Теорема Паскаля

На последнем кружке прошлого года вы познакомились с элементами проективной геометрии. Одну из теорем, находящуюся на стыке евклидовой и проективной геометрии, а именно, теорему Дезарга вы изучали на уроках. Сегодня – еще одна такая теорема, которая называется ***теоремой Паскаля***.



<u>Теорема</u>. ***Три точки попарного пересечения противолежащих сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой***.

<u>Доказательство</u>. Пусть шестиугольник *ABCDEF* вписан в окружность, *M* = (*AB*) I (*DE*), *P* = (*BC*) I (*EF*), *N* = (*CD*) I (*FA*) (см. рис. 1). Докажем, что точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой.

Рассмотрим точки попарного пересечения сторон, взятых через одну: *X* = (*AB*) I (*CD*), *Y* = (*CD*) I (*EF*), *Z* = (*EF*) I (*AB*). По теореме о степени точки получим три равенства: $\overline{XA}\cdot\overline{XB}=\overline{XC}\cdot\overline{XD}$; $\overline{YC}\cdot\overline{YD}=\overline{YE}\cdot\overline{YF}$ и $\overline{ZA}\cdot\overline{ZB}=\overline{ZE}\cdot\overline{ZF}$ (1).

Рассмотрим треугольник *XYZ* и три прямые, пересекающие его стороны: (*BC*), (*DE*) и (*FA*). Применяя в каждом случае теорему Менелая, соответственно получим: $\frac{\overline{XB}}{\overline{BZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YC}}{\overline{CX}}=-1$; $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZE}}{\overline{EY}}\cdot\frac{\overline{YD}}{\overline{DX}}=-1$ и $\frac{\overline{XA}}{\overline{AZ}}\cdot\frac{\overline{ZF}}{\overline{FY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Перемножим почленно эти равенства и произведем сокращения, учитывая равенства (1): $\frac{\overline{XM}}{\overline{MZ}}\cdot\frac{\overline{ZP}}{\overline{PY}}\cdot\frac{\overline{YN}}{\overline{NX}}=-1$. Следовательно, точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой (***коллинеарны***).

Эта прямая называется прямой Паскаля для данного вписанного шестиугольника.

Так как теорема Паскаля по своей сути является проективной, то можно сразу предсказать, что произойдет, если в данном шестиугольнике: а) две стороны параллельны; б) две пары сторон параллельны.

Пусть, например, (*AB*) || (*DE*), то есть *M* – бесконечно удаленная точка, тогда (*NP*), проходящая через *M*, будет параллельна этим сторонам. *Самостоятельно сделать чертеж*.

Если же (*AB*) || (*DE*) и (*BC*) || (*EF*), то *M* и *P* – бесконечно удаленные точки, поэтому, (*MP*) – бесконечно удаленная прямая, а точка *N* ей принадлежит. Это означает, что (*CD*) || (*FA*).

Отметим, что утверждение теоремы Паскаля останется верным, если точки *A*, *B*, *C*, *D*, *E* и *F* расположены на окружности произвольным образом, то есть если *ABCDEFA* – произвольная замкнутая ломаная (возможно с самопересечениями).

Более того, теорема Паскаля в этом общем случае верна не только для точек, лежащих на окружности, но и для шести точек, принадлежащих любому коническому сечению!

Отметим также, что справедлива и теорема, обратная теореме Паскаля, которая уже целиком относится к проективной геометрии: ***если три пары противолежащих сторон шестиугольника пересекаются в точках, лежащих на одной прямой, то вершины шестиугольника принадлежат некоторому коническому сечению***.

Задачи для самостоятельного решения

1. Не используя проективной формулировки теоремы Паскаля, докажите, что если две пары противолежащих сторон вписанного шестиугольника параллельны, то и третья пара сторон также параллельна.

2. Дан вписанный шестиугольник *ABCDEF* и три точки попарного пересечения его диагоналей: *M* = (*AC*) I (*BD*), *P* = (*BE*) I (*ÑF*), *N* = (*DF*) I (*AE*). Докажите, что точки *M*, *P* и *N* лежат на одной прямой.

3. Даны пять точек некоторой окружности. С помощью одной линейки постройте еще одну точку этой окружности.

4. В окружность вписан четырехугольник *ABCD*. Через произвольную точку *X* проведены прямые *AX* и *DX*, пересекающие прямые *CD* и *AB* в точках *E* и *F* соответственно и вторично пересекающие окружность в точках *M* и *N* соответственно. Докажите, что прямые *EF*, *MN* и *BC* пересекаются в одной точке или параллельны.

5. Хорда *CD* окружности с центром *O* перпендикулярна ее диаметру *AB*, а хорда *AE* делит пополам радиус *OC*. Докажите, что хорда *DE* делит пополам хорду *BC*.

6. Точка *M* лежит на окружности, описанной около треугольника *ABC*, *P* – произвольная точка. Прямые *AP*, *BP* и *CP* пересекают окружность в точках *A*', *B*' и *C*' соответственно. Докажите, что точки пересечения прямых *MA*' и *BC*, *MB*' и *CA*, *MC*' и *AB* лежат на одной прямой, проходящей через точку *P*.