

Геометрия турнира им. А. П. Савина 2012

- 1 (7).** На листе клетчатой бумаги по сторонам клеток нарисован квадрат $ABCD$ со стороной 8. E — середина стороны BC , Q — такая точка на диагонали AC , что $AQ : QC = 3 : 1$. Найдите угол между прямыми AE и DQ .
- 2 (7).** Медиана BM прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) разбивает его на два. Пусть O_1 и O_2 центры описанных окружностей этих треугольников. Найдите O_1BO_2 .
- 3 (7).** AA_1 , CC_1 — высоты треугольника ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямую AA_1 в точке M . В треугольнике CC_1B проведены три медианы. Докажите, что прямая BM перпендикулярна одной из этих медиан.
- 4 (8).** В треугольнике ABC угол B равен 60° , O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, BM — медиана. Докажите, что если L — середина OB , то LM перпендикулярна OH .
- 5 (8).** В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL и BN . На луче AL взята точка P так, что $PN = PB$, а на луче BN — точка Q так, что $QL = QA$. Докажите, что $QL \parallel PN$.
- 6 (7-8).** Все углы равностороннего выпуклого пятиугольника различны. Докажите, что наибольший и наименьший из них — соседние.
- 7 (8).** Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. На меньшей дуге BC взяли произвольную точку P . Отрезок PA пересекает сторону BC в точке K , а диагональ BD в точке L . Отрезок PD пересекает сторону BC в точке M , а диагональ AC в точке N . Докажите, что NK перпендикулярен LM .
- 8 (9).** Точка P лежит на стороне AC треугольника ABC . Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке R . Точки O_a и O_c — центры описанных окружностей треугольников APR и CPR соответственно. Докажите, что прямые AO_a и CO_c пересекаются на высоте треугольника ABC .
- 9 (8-9).** H — ортоцентр треугольника ABC , в котором $\angle B = 60^\circ$. Серединные перпендикуляры к отрезкам AH и CH пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 . Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1HC_1 лежит на биссектрисе треугольника ABC .
- 10 (8-9).** В квадрате $ABCD$ отмечены середины двух соседних сторон BC и CD — E и F соответственно — и проведены прямые AE и BF , пересекающиеся в точке G . Около квадрата описана окружность. Точка пересечения прямой AE с нею — точка H . Докажите, что $GE = EH$.
- 11 (9).** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle BCD = 120^\circ$, $\angle CBA = 45^\circ$, $\angle CBD = 15^\circ$ и $\angle CAB = 90^\circ$. Найдите угол BAD .
- 12 (8).** Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC , CA в точках S_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников BA_1B_1 и BC_1B_1 , пересекают прямую AC в точках K и L . Докажите, что $B_1K = B_1L$.
- 13 (9).** В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° , H — ортоцентр. Окружность, описанная около треугольника AHB , пересекает прямую BC в точке A_1 , а окружность, описанная около треугольника BHC , пересекает прямую AB в точке C_1 . Докажите, что точки H , A_1 и C_1 лежат на одной прямой.

14 (9). Докажите, что любой треугольник можно разрезать на три меньших треугольника так, чтобы каждую из получившихся частей можно было покрыть двумя другими.

15 (8). Окружность, вписанная в неравносторонний треугольник ABC , касается сторон AB и AC в точках M и N . Прямые, проходящие через M и N параллельно этим сторонам пересекаются в точке K . Оказалось, что $KB = KC$. Докажите, что точка K лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

16 (7). Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), касается сторон AB , BC и AC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. B_1D – диаметр вписанной окружности. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую AC , пересекает вписанную окружность в точке P . Докажите, что середина отрезка DP лежит на биссектрисе ABC .

17 (8). На окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника ABC , взята точка P . Точки A_1 , B_1 , C_1 симметричны P относительно середин сторон BC , AC , AB треугольника ABC . Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр треугольника ABC .¹

18 (9). Графики двух приведенных квадратных трехчленов пересекаются в точке A , а прямая m касается этих графиков в точках B и C . Известно, что $AB = AC$. Докажите, что m горизонтальна.

19 (9). Плоскость раскрасили в два цвета. Докажите, что найдется одноцветный треугольник с углами 48° , 60° , 72° .

20 (9). Окружность (I – центр), вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB , BC , CA в точках C_1 , A_1 , B_1 соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника BA_1B_1 , пересекает прямую AC в точке A_0 , а окружность, описанная вокруг треугольника BC_1B_1 , пересекает прямую AC в точке C_0 . Докажите, что $IA_0 = IC_0$.

21 (9). Восстановите треугольник ABC по ортоцентру и центру вписанной окружности этого треугольника, если известно, что $\angle A = 60^\circ$, а радиус описанной окружности равен R .

22 (9). Дан треугольник ABC . Пусть окружность, проходящая через точку B и середину дуги ABC описанной около него окружности, пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Найдите геометрическое место точек пересечения AK и CM .

23 (9). Дан треугольник ABC . На стороне AC выбираются произвольная точка K и такая точка L , что $\angle ABK = \angle CBL$. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников KBL .

24 (9). CH – высота прямоугольного треугольника ABC (угол C – прямой). AHA_1 , BHB_1 – равнобедренные треугольники (A_1 , B_1 и точка C лежат по разные стороны от гипотенузы). Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1CB_1 лежит на гипотенузе AB .

25 (9). Докажите, что из любого треугольника площади 4 можно вырезать осесимметричную фигуру площади больше 3.

¹На самом деле, эта задача является частным случаем одного свойства так называемой окружности Хаджа.