

Двадцать первая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Двадцать первой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырёх классов средней школы. В списке, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса (на момент старта заочного тура) решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решённые задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчётливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.** Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто сослаться на него (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2024 и не позднее 1 марта 2025 года.** Для этого нужно зайти на сайт <https://contest.yandex.ru/geomshar/>, справа наверху указать язык (русский) и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в **отдельном** файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них **архив** (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается.**

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

4. После загрузки зайдите на сервер, откройте загруженный файл и проверьте, что он правильно загрузился.

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)

Финальный тур состоится летом 2025 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получают грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте www.geometry.ru к 1 июня 2025 г. Свои результаты Вы сможете узнать по адресу geomshar@yandex.ru после публикации списков.

1. (8) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC ; D — произвольная точка отрезка AC ; A_1, A_2 — точки пересечения перпендикуляра, опущенного из точки D на биссектрису CI , с прямыми BC и AI соответственно. Аналогично определяются точки C_1, C_2 . Докажите, что шесть точек B, A_1, A_2, I, C_1, C_2 лежат на одной окружности.
2. (8) На плоскости даны 4 точки, не лежащие на одной окружности и такие, что никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Докажите, что найдется точка Z такая, что для любой из данных точек точка, симметричная ей относительно Z , лежит на окружности, проходящей через оставшиеся данные точки.
3. (8) Вневыписанная окружность с центром I_A касается стороны BC треугольника ABC в точке D . Докажите, что педальные окружности D относительно треугольников ABI_A и ACI_A равны.
4. (8) Пусть AL — биссектриса треугольника ABC ; X — произвольная точка на внешней биссектрисе угла A ; прямые BX, CX пересекают серединный перпендикуляр к AL в точках P, Q соответственно. Докажите, что точки A, X, P, Q лежат на одной окружности.
5. (8) Точка M — середина катета AC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Перпендикуляр, опущенный из точки M на биссектрису угла ABC , пересекает гипотенузу AB в точке N . Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника ANM , касается биссектрисы угла ABC .
6. (8–9) Докажите, что если у треугольника одна из сторон его треугольника Нагеля параллельна одной из биссектрис, то ещё одна из сторон треугольника Нагеля параллельна другой биссектрисе.
7. (8–9) Точки I, I_a являются центром вписанной и A -вневыписанной окружности треугольника ABC ; вписанная окружность касается сторон AC, AB в точках E, F ; G — точка пересечения BE и CF . Перпендикуляр к BC , проходящий через точку G , пересекает AI в точке J . Докажите, что E, F, J, I_a лежат на одной окружности.
8. (8–9) Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ с точкой пересечения диагоналей P на отрезках AC, BD отмечены точки K и L соответственно. При этом $CK = AP$ и $DL = BP$. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения окружностей ALC и BKD , содержит центр масс четырехугольника $ABCD$.

9. (8–9) Прямая ℓ , проходящая через ортоцентр H треугольника ABC ($BC > AB$) и параллельная AC , пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Прямая, проходящая через центр описанной окружности этого треугольника и параллельная его медиане BM , пересекает прямую ℓ в точке F . Докажите, что длина отрезка HF втрое больше разности отрезков FE и DH .
10. (8–9) Из бумаги вырезан остроугольный треугольник, одна из сторон которого равна опущенной на нее высоте. Постройте внутри треугольника точку, квадрат расстояния от которой до одной из вершин треугольника равен сумме квадратов расстояний до двух других. Никаких инструментов нет, можно только сгибать бумагу и отмечать точки пересечения линий сгиба.
11. (8–10) Через точку X проведены три луча, образующие друг с другом углы, равные 120° . Окружность w радиуса R выбирается произвольным образом так, чтобы точка X лежала внутри неё. Пусть A, B, C — точки пересечения лучей с окружностью. Найдите $\max(XA + XB + XC)$.
12. (8–10) Даны окружности ω_1 и ω_2 . Пусть M — середина отрезка, соединяющего их центры. На ω_1 выбрана точка X , а на ω_2 — точка Y так, что $MX = MY$. Найдите геометрическое место середин отрезков XY .
13. (8–11) Дан выпуклый $2n$ -угольник, у которого каждые две противоположные стороны параллельны друг другу. (Стороны противоположны, если при движении от одной к другой по контуру $2n$ -угольника нужно пройти $n - 1$ других сторон.) Пару противоположных сторон назовём *правильной*, если у них есть общий перпендикуляр, концы которого принадлежат самим сторонам, а не их продолжениям. Каково наименьшее возможное количество правильных пар?
14. (9–11) На биссектрисе угла B внутри треугольника ABC отметили точку D . Пусть ω_1 и ω_2 — окружности, касающиеся прямых AD и CD в точке D и проходящие через точку B ; P и Q — отличные от B точки пересечения ω_1 и ω_2 с описанной окружностью ABC . Докажите, что описанные окружности треугольников PQD и ACD касаются.
15. (9–11) Точка C лежит на биссектрисе острого угла с вершиной S . Точки P, Q — проекции C на стороны угла. Окружность с центром C и радиусом PQ пересекает стороны угла в точках A и B , причем $SA \neq SB$. Докажите, что окружность с центром A , касающаяся SB , и окружность с центром B , касающаяся SA , касаются друг друга.
16. (9–11) Точка Фейербаха неравнобедренного треугольника лежит на биссектрисе одного из его углов. Докажите, что она делит пополам отрезок между вершиной этого угла и центром вписанной окружности.
17. (9–11) Пусть O, I — центры описанной и вписанной окружностей неравнобедренного остроугольного треугольника ABC ; D, E, F — точки касания его внеписанной окружности со стороной BC и продолжениями сторон AC и AB соответственно. Докажите, что если ортоцентр треугольника DEF лежит на описанной окружности треугольника ABC , то он симметричен середине дуги BC относительно прямой OI .

18. (9–11) Дан четырехугольник $ABCD$. Внеписанные окружности ω_1 и ω_2 треугольников ABC и BCD , касающиеся сторон AB и BD соответственно, касаются продолжения стороны BC в общей точке P . Отрезок AD пересекает ω_2 в точке Q , а прямая AD пересекает ω_1 в точках R и S . Докажите, что один из углов RPQ и SPQ прямой.
19. (10–11) Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC ; A', B', C' — ортоцентры треугольников BIC, AIC, AIB ; M_a, M_b, M_c — середины BC, CA, AB , а S_a, S_b, S_c — середины AA', BB', CC' . Докажите, что M_aS_a, M_bS_b, M_cS_c пересекаются в одной точке
20. (10–11) Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , а M и N — середины BC и AH соответственно. Перпендикуляр из N к прямой MH пересекает BC в точке A' . Точки B' и C' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C' лежат на одной прямой.
21. (10–11) Внутри четырехугольника $ABCD$ отметили точку P такую, что $\angle APB + \angle CPD = 180^\circ$. Точки P_a, P_b, P_c, P_d изогонально сопряжены P в треугольниках BCD, CDA, DAB, ABC . Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $P_aP_bP_cP_d$ совпадают.
22. (10–11) Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусами F_1, F_2 . Постройте хорду окружности AB , касающуюся эллипса и такую, что четырехугольник AF_1F_2B — вписанный.
23. (10–11) Будем говорить, что множество M точек плоскости содержит дыру, если существует круг, не содержащийся в M , но содержащийся внутри многоугольника, граница которого лежит в M .
- Можно ли представить плоскость в виде объединения n таких выпуклых множеств, что объединение любых $n - 1$ из них имеет дыры?
24. (11) Сфера, вписанная в тетраэдр $ABCD$, касается граней ABC, BCD, CDA, DAB в точках D', A', B', C' соответственно. Обозначим через S_{AB} площадь треугольника $AC'B$. Аналогично определим $S_{AC}, S_{BC}, S_{AD}, S_{BD}, S_{CD}$. Докажите, что из отрезков с длинами $\sqrt{S_{AB}S_{CD}}, \sqrt{S_{AC}S_{BD}}, \sqrt{S_{AD}S_{BC}}$ можно составить треугольник.