Двадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

1. (8, Д.Швецов) Биссектрисы AI и CI пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, C_1 соответственно. Описанная окружность треугольника AIC_1 пересекает сторону AB в точке C_0; аналогично определим A_0. Докажите, что точки A_0, A_1, C_0, C_1 лежат на одной прямой.

   Решение. Пусть прямая A_1C_1 пересекает AB в точке A'. Тогда

$$\angle C_1A'A = (\smile AC_1 + \smile BA_1)/2 = (\smile AC_1 + \smile A_1C)/2 = \angle C_1IA.$$

   Следовательно, точки A, I, A', C_1 лежат на одной окружности и A' совпадает с A_0 (рис. 1). Аналогично получаем, что A_1C_1 проходит через C_0.

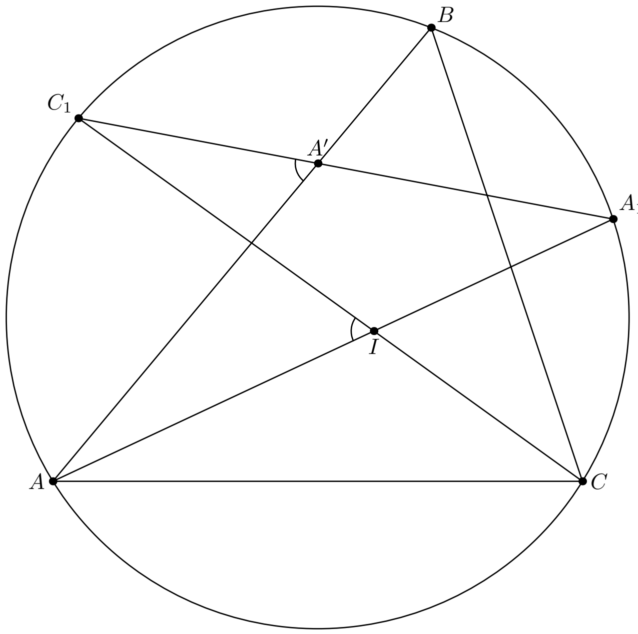

Рис. 1.

2. (8, Б.Френкин) Даны три попарно различные точки на прямой. Сколько существует равнобедренных треугольников, в которых они являются (в каком-нибудь порядке) центрами описанной, вписанной и вневписанной окружностей?

   Ответ. Два, если отношение частей, на которые средняя точка делит отрезок между двумя крайними, не превосходит 3, и три в противном случае.

   Решение. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с вершиной C; O, I, I_c — центры его описанной, вписанной и вневписанной (касающейся AB) окружностей соответственно. Тогда точки A, B, I, I_c лежат на окружности с диаметром II_c, центром которой является середина W дуги AB. Поэтому, если даны точки O, I, I_c, то для построения треугольника ABC нужно найти середину W отрезка II_c, построить окружности с центрами O, W и радиусами OW, WI соответственно, найти точки

A и B пересечения этих окружностей, а также точку C, симметричную W относительно O. При этом точка I должна лежать внутри описанной окружности. Это условие всегда будет выполнено, если O — одна из двух крайних точек (тогда I — средняя точка). Если же O — средняя из трех точек, то должно выполняться условие $OW > OI$, т.е. $OI_c : OI > 3$.

3. (8, К.Бельский) В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина меньшей дуги BC описанной окружности. Окружность ω касается сторон AB, AC в точках P, Q соответственно и проходит через точку M. Докажите,что $BP + CQ = PQ$.

   Решение. Из условия следует, что $\angle PAQ = (\smile PMQ - \smile PQ)/2 = \pi - \smile PQ = \pi - 2\angle PMQ$, т.е. $\angle PMQ = \angle APQ$. Значит, PM и QM — биссектрисы углов BPQ, CQP соответственно, а M — центр вневписанной окружности треугольника APQ. Тогда, опустив перпендикуляры MX, MY на AB, AC соответственно, получим, что $PX = QY = PQ/2$. Кроме того, поскольку $MB = MC$, то $BX = CY$ (рис. 3). Следовательно, $BP + QC = PX + XB + QY - YC = PQ$.

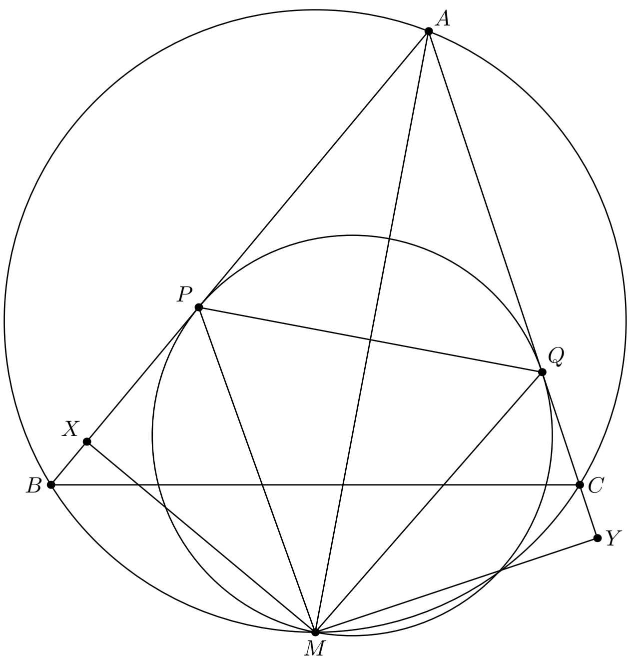

Рис. 3.

4. (8, Л.Емельянов) В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, P — произвольная точка этой окружности. Прямая AP вторично пересекает описанную окружность треугольника AB_1C_1 в точке A_2. Аналогично строятся точки B_2 и C_2. Докажите, что описанная около треугольника $A_2B_2C_2$ окружность касается ω.

   Решение. Точки A, B_1, C_1 лежат на окружности с диаметром AI, где I — центр вписанной окружности. Поэтому $\angle IA_2A = \angle IA_2P = 90^\circ$ и точка A_2 лежит на окружности с диаметром IP, которая касается ω в точке P (рис. 4). Точки B_2, C_2 также лежат на этой окружности.

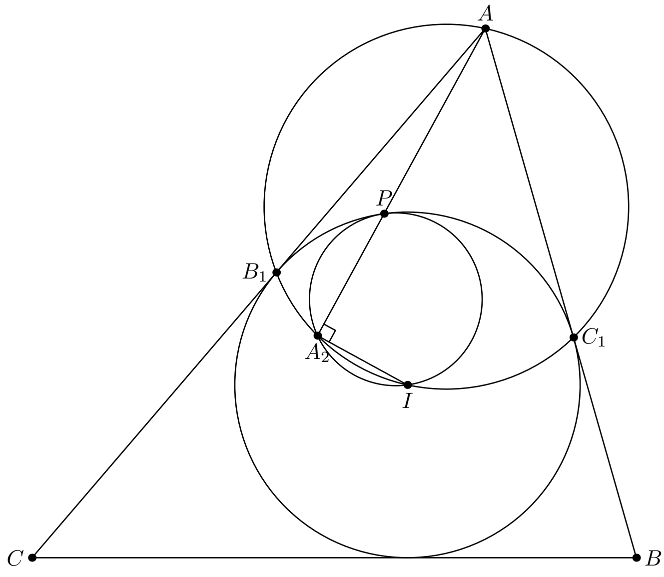

Рис. 4.

5. (8, П.Погосян) Точки A', B', C' соответственно симметричны вершинам A, B, C относительно противоположных сторон треугольника ABC. Докажите, что окружности $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ пересекаются в одной точке.

   Решение. Пусть X — вторая точка пересечения окружностей $AB'C'$ и $A'BC'$. Тогда $\angle(XB', XC') = \angle(AB', AC') = 3\angle(AC, AB)$. Аналогично $\angle(XC', XA') = 3\angle(BA, BC)$. Следовательно, $\angle(XB', XA') = 3\angle(AC, BC) = \angle(CB', CA')$.

6. (8–9, А.Шекера) Даны окружность ω и точки A и B на ней. Пусть C — произвольная точка на одной из дуг AB этой окружности, CL — биссектриса треугольника ABC, окружность BCL пересекает AC в E, а CL пересекает BE в F. Найдите геометрическое место центров окружностей AFC.

   Ответ. Отрезок с концом в середине дуги ACB, образующий с прямой AB угол, равный $\pi/2 - \angle ACB$

   Решение. Пусть O — центр окружности ACF. Тогда $\angle AOF = 2\angle ACF = \angle ACB$ не зависит от точки C. Поэтому все треугольники AOF подобны друг другу и точка O является образом F при поворотной гомотетии с центром A. Кроме того, $\angle ABF = \angle LBE = \angle LCE$ не зависит от C, значит точка F движется по прямой. Следовательно, все точки O также лежат на одной прямой. Эта прямая образует с прямой BE угол, равный $OAF = (\pi - \angle ACB)/2 = i/2 - \angle ABE$, поэтому она перпендикулярна прямой, симметричной AB относительно BE (рис. 6). Когда точка C стремится к B, точка O стремится к середине дуги ACB, а когда C стремится к A, точка F приближается к касательной к окружности ABC в точке A. Поэтому искомое ГМТ — указанный в ответе отрезок.

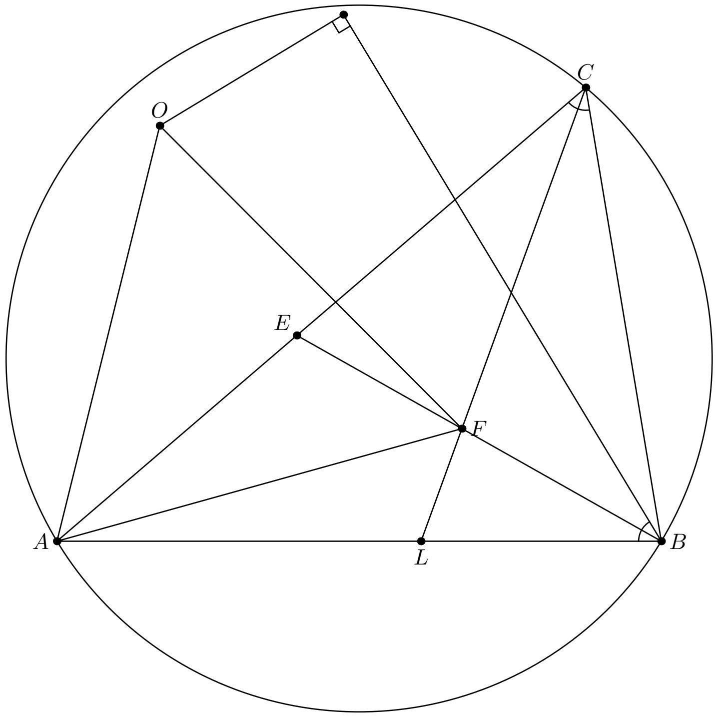

Рис. 6.

7. (8–9, Б.Френкин) Постройте вписанно-описанный четырёхугольник по двум противоположным вершинам и центру вписанной окружности.

   Решение. Пусть центр I вписанной окружности четырехугольника $ABCD$ лежит внутри треугольника ABC. Тогда $\angle AIC = \angle ABC + \angle IAB + \angle ICB = \angle ABC + \pi/2$. Таким образом, если даны точки A, C, I, то мы можем найти угол B и построить описанную окружность с центром O. Кроме того, из теоремы Понселе следует, что прямая OI проходит через точку L пересечения диагоналей четырехугольника, середины M, N диагоналей AC, BD соответственно лежат на окружности с диаметром OL, а прямая MN проходит через I. Поэтому мы можем построить точку N, а затем и диагональ BD.

8. (8–9, К.Бельский) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$ и $AD = CD$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AC, BD, AE и CF лежат на одной окружности.

   Решение. Пусть K, L, M, N — середины BD, AC, AE, CF соответственно. Так как $LM \parallel BC$ и $LN \parallel AB$, то $\angle MLN = \angle CBA$. С другой стороны, $\overrightarrow{KM} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BE})/2$, $\overrightarrow{KN} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF})/2$, а, поскольку $DA = DC$, $BE = BF$ и угол между векторами $\overrightarrow{DA}$ и $\overrightarrow{DC}$ равен углу между $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{BF}$, то и угол MKN равен этим углам.

9. (8–9, А.Марданов) В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана окружность ω, которая касается сторон AB, BC, CD и AD в точках P, Q, R, S соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно основаниям трапеции, пересекает прямую QR в точке X. Докажите, что прямые AB, QS и DX пересекаются в одной точке.

Первое решение. Пусть I — центр данной вписанной окружности. Тогда стороны треугольников PQX и AID попарно параллельны (рис. 9). Значит такие треугольники гомотетичны, откуда следует требуемое в задаче.

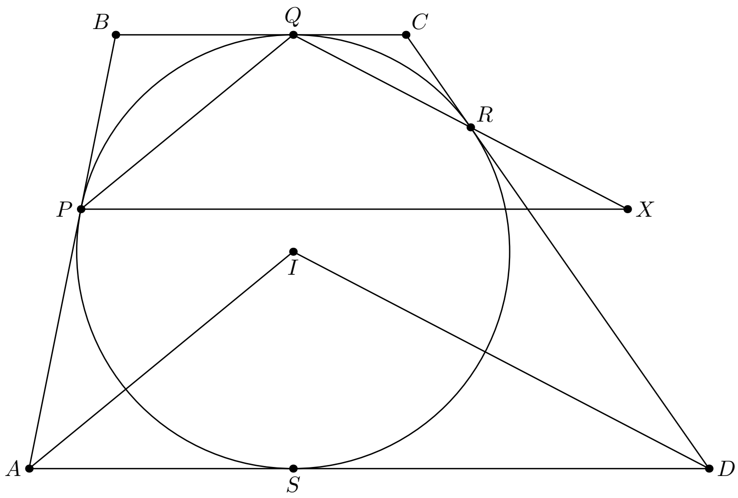

Рис. 9

Второе решение. Зафиксируем точки A, B, P, Q, S и будем двигать точку R по окружности ω. Тогда точки D и X будут двигаться по прямой AS и параллельной ей прямой, проходящей через точку P. Очевидно, что соответствие между D и S проективно, а поскольку на бесконечность они уходят одновременно, то это соответствие линейно, т.е. все прямые DX проходят через одну точку. Ясно также, что эта точка лежит на прямой AB, поэтому достаточно найти одно положение, при котором DX, AB и QS пересекаются в одной точке. Этому условию удовлетворяет положение, при котором трапеция $ABCD$ — равнобокая.

10. (8–9, А.Терешин) Треугольник ABC вписан в окружность ω. Точка T на прямой BC выбрана так, что прямая AT касается ω. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L, а окружность ω в точке A_0. Прямая TA_0 пересекает ω в точке P. Точка K на отрезке BC такова, что $BL = CK$. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAK$.

    Решение. Проекция окружности ω на себя из точки T меняет местами B с C и P с A_0, а точку A оставляет на месте. Отсюда получаем равенство двойных отношений $(BCAA_0) = (CBAP)$, т.е. $\sin\angle BAP : \sin\angle CAP = PB : PC = AB^2 : AC^2$. С другой стороны, применяя теорему синусов к треугольникам AKC и BKC, получаем $\sin\angle CAK : \sin\angle BAK = (CK/AC) : (BK/AB) = (AB/AC) \cdot (BL/AL) = AB^2 : AC^2$, что влечет искомое равенство.

11. (8–10, Б.Бутырин) В треугольнике ABC точки M, N — середины сторон AB, AC соответственно; серединный перпендикуляр к биссектрисе AL пересекает биссектрисы углов B и C в точках P, Q соответственно. Докажите, что прямые PM и QN пересекаются на касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке A.

    Решение. Заметим, что прямые PQ и MN пересекаются в середине K отрезка AL. Кроме того, точка P является серединой дуги AL окружности ABL, следовательно,

$\angle BPL = \angle CAL = \angle BIC - \pi/2$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC, т.е. $PL \perp CI$. Аналогично $QL \perp BI$. Таким образом, стороны треугольника PQL параллельны сторонам треугольника, образованного точками касания сторон треугольника ABC с вписанной окружностью, а значит, касательные в этих точках к окружности PQL параллельны сторонам ABC. Поскольку окружность APQ симметрична окружности LPQ относительно PQ, то касательная к этой окружности в точке P параллельна AB, а касательная в точке A совпадает с касательной к окружности ABC. При этом $\angle PAQ = \angle PLQ = \pi - \angle PIQ$, поэтому точка I лежит на окружности APQ, а касательная к окружности в этой точке параллельна BC. Обозначим точку пересечения касательных в точках A и I через T (рис. 11)

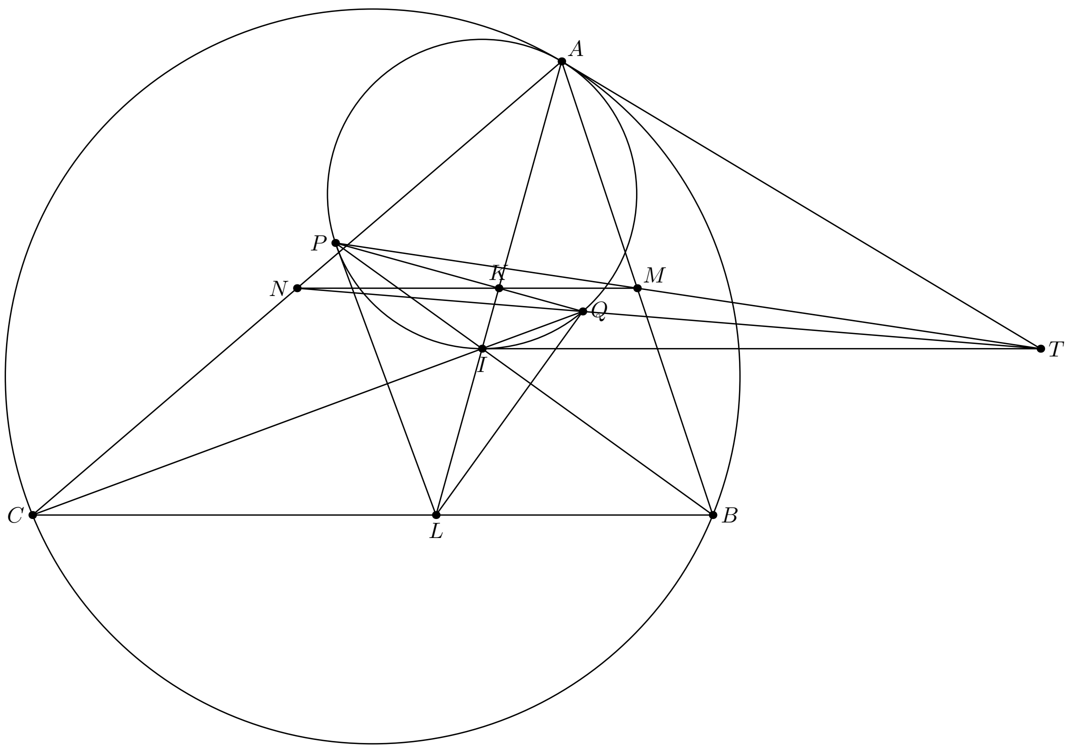

Рис. 11

Для решения задачи достаточно доказать, что прямая PM проходит через T, т.е. что прямая, проходящая через A, параллельная касательной к окружности в точке P, и прямая , проходящая через проекцию K точки P на AI, параллельная касательной в точке I, пересекают AT в одной точке. Пусть S — точка пересечения касательных к окружности в точках A и P, а U — точка пересечения AI с прямой, проходящей через P и параллельной IT. Тогда $IK : KU = AT : AS = \operatorname{ctg}\angle IPA : \operatorname{ctg}\angle AIP$, откуда и следует искомое утверждение.

12. (8–10, Д.Швецов) Биссектрисы AA_1, CC_1 треугольника ABC, в котором $\angle B = 60°$, пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников ABC, A_1IC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PI проходит через середину стороны AC.

Решение. Так как $\angle A_1IC_1 = 120° = 180° - \angle A_1BC_1$, окружности ABC и A_1IC_1 пересекаются в точках B и P (рис. 12). Поэтому треугольники PA_1C и PC_1A подобны, т.е. $PB_1 : PC_1 = A_1C : AC_1$. С другой стороны, поскольку $\angle AC_1I + \angle IA_1C = 180^\circ$, то, применяя теорему синусов к треугольникам AC_1I и CA_1I, получаем, что $A_1C : AC_1 = IC : IA$. Следовательно, $\sin\angle PIA_1 : \sin\angle PIC_1 = IC : IA$ и IP — медиана треугольника IAC.

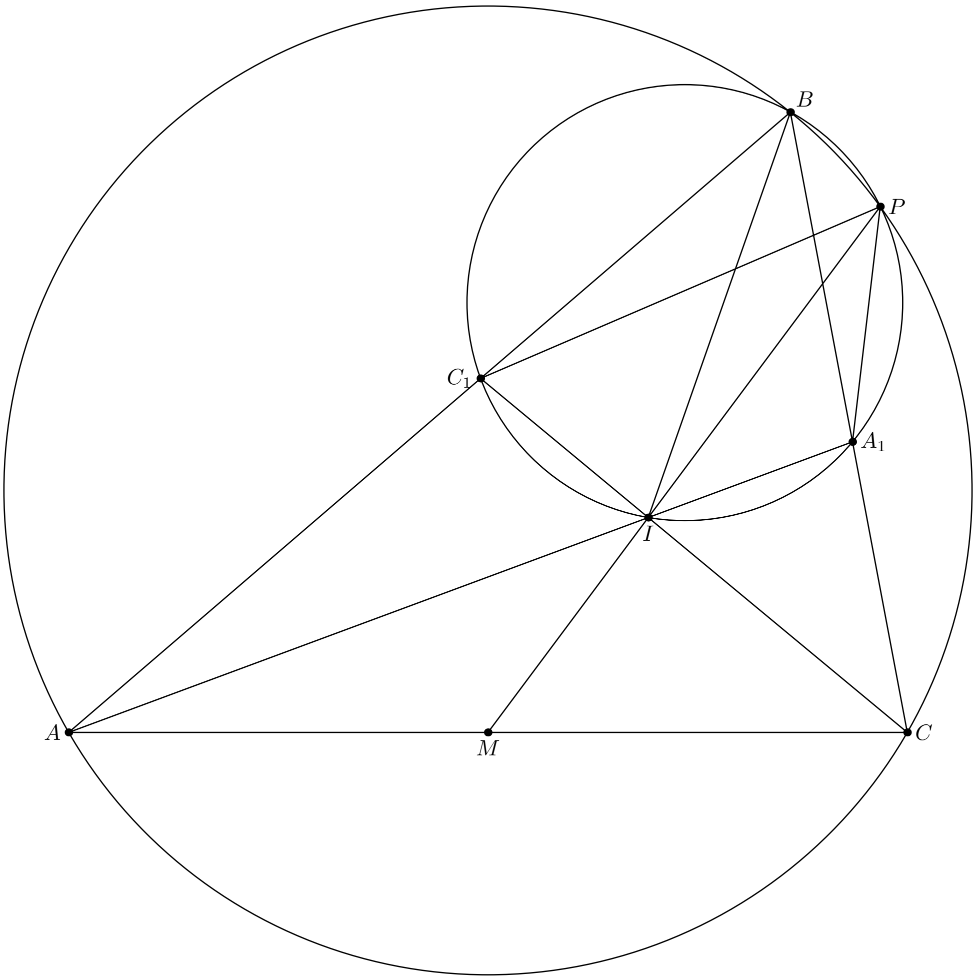

Рис. 12.

13. (8–11, А.Заславский) Верно ли, что любой многоугольник можно разрезать на равнобокие трапеции?

Ответ. Да.

Решение. Поскольку любой многоугольник можно разрезать на треугольники, а любой треугольник на равнобедренные треугольники (проведя высоту к наибольшей стороне и соединив ее основание с серединами двух других сторон), то достаточно решить задачу для равнобедренных треугольников.

Заметим, что правильный треугольник можно разрезать на три равнобоких трапеции, проведя из его центра три луча, параллельных сторонам (рис. 13.1).

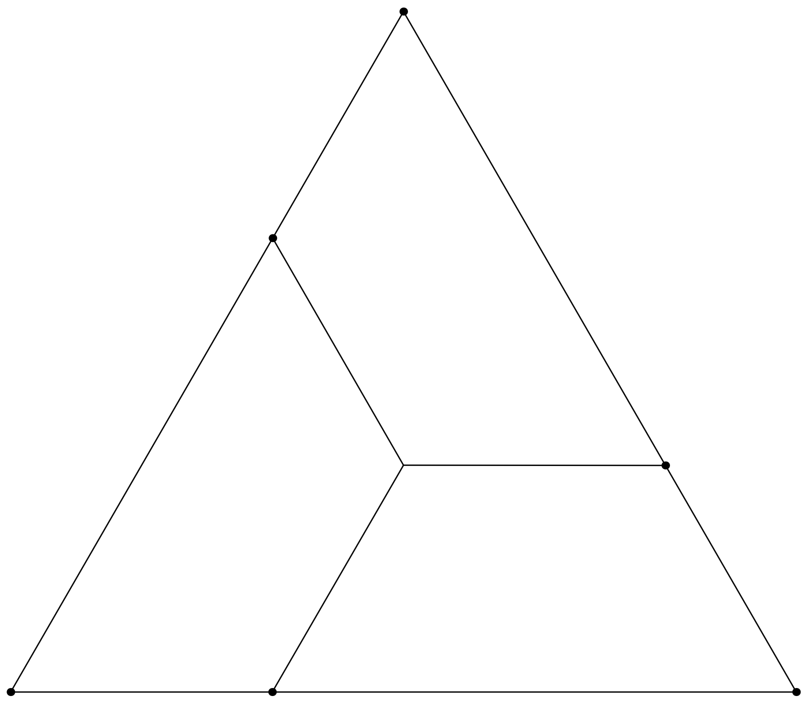

Рис. 13.1

Теперь, если угол при вершине равнобедренного треугольника больше 60°, его можно разрезать на равнобокие трапеции, применив несколько раз конструкцию на рис. 13.2.

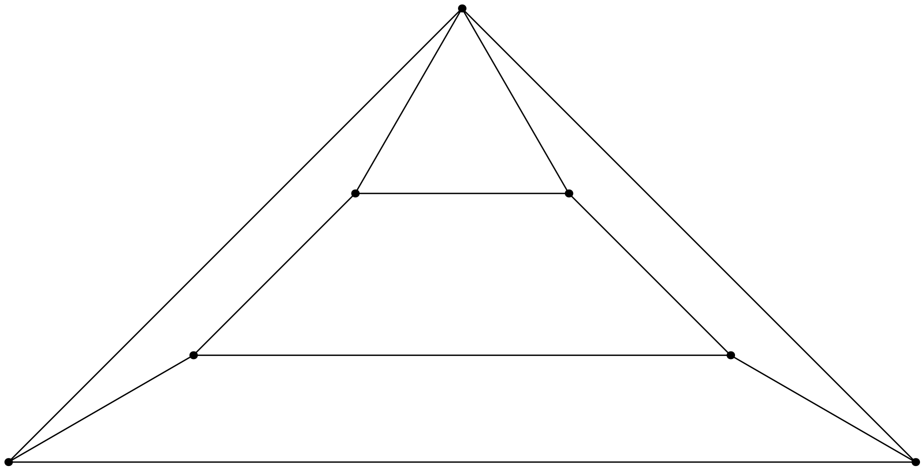

Рис. 13.2

Если же угол при вершине равнобедренного треугольника меньше 60°, то разрежем его на три треугольника, соединив вершины с центром описанной окружности. Два из получившихся треугольников будут тупоугольными, а у третьего угол при вершине вдвое больше, чем у исходного. Повторив этот прием несколько раз, мы разрежем исходный треугольник на равнобедренные с углами при вершине больше 60°.

14. (9–11, А.Терешин) Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC касается окружности, проходящей через середины его сторон, в точке F. Из середины O гипотенузы AB проведена касательная OE к ω, отличная от AB. Докажите, что $CE = CF$.

Решение. При гомотетии с центром C и коэффициентом 2 точка F перейдет в точку касания описанной и полувписанной окружностей треугольника. Поэтому прямая CF симметрична относительно биссектрисы угла C прямой, проходящей через точку касания гипотенузы с вневписанной окружностью. Пусть вписанная и вневписанная окружности касаются гипотенузы в точках T и S соответственно. Так как $OE = OT = OS$, получаем, что $\angle SET = \pi/2$, т.е. прямая SE проходит через точку ω, диаметрально противоположную T. Но прямая SC также проходит через эту точку, следовательно, E лежит на SC и симметрична F относительно биссектрисы угла C (рис. 14).

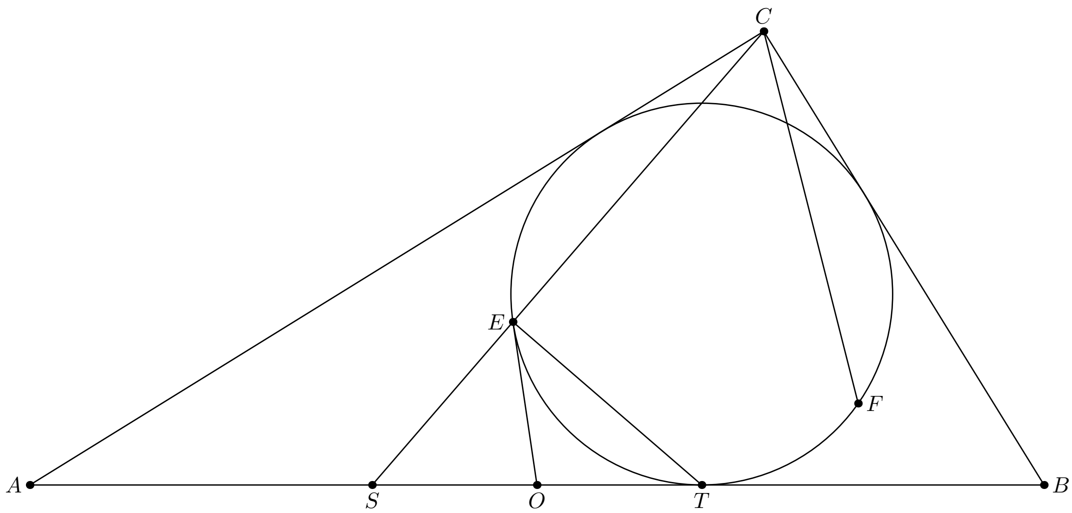

Рис. 14

15. (9–11, М.Панов) Разность двух углов треугольника больше 90°. Докажите, что отношение радиусов его описанной и вписанной окружностей больше 4.

Первое решение. Пусть в треугольнике ABC угол A — наименьший, B — наибольший, O — центр описанной окружности, L — середина дуги AB, CD и PQ — хорда и диаметр окружности, параллельные AB (рис. 15). Так как $\smile CD = \smile ADC - \smile AD = \smile ADC - \smile BC > \pi$, точки A, B, C лежат по одну сторону от PQ, т.е. $\angle OLC > \pi/4$ и расстояние от O до прямой LC, проходящей через центр I вписанной окружности больше, чем $R/\sqrt{2}$. Следовательно, $OI^2 = R^2 - 4Rr > R^2/2$, что равносильно искомому неравенству.

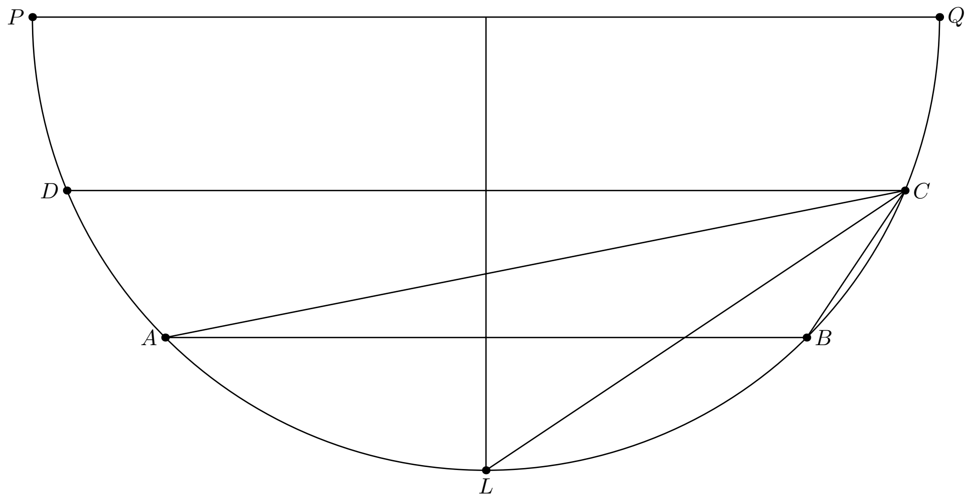

Рис. 15

Второе решение. Воспользовавшись формулой $r = 4R\sin(A/2)\sin(B/2)\sin(C/2)$, получаем

$$\frac{r}{R} = 2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B-A}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) < 2\sin\frac{C}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\frac{C}{2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Примечание. Полученная оценка точна. При $\cos C = 3/4$, $A = \pi/4 - C/2$, $B = 3\pi/4 - C/2$ все неравенства обращаются в равенства и $R = 4r$.

16. (9–11, А.Марданов) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Отрезки BB_1 и A_1C_1 пересекаются в точке D. Точка E — проекция точки D на сторону AC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $EP = PD$, $EQ = QD$. Докажите, что $\angle PDB_1 = \angle EDQ$.

Решение. Для любой точки отрезка A_1C_1 сумма расстояний от нее до прямых AB и BC равна расстоянию до AC (поскольку это верно для концов отрезка). Так как точка D равноудалена от AB и BC, каждое из этих расстояний равно половине DE, т.е. D — центр вписанной окружности треугольника BPQ (рис. 16). Поэтому $\angle EPQ = \angle DPB$ и $\angle EQP = \angle DQB$. Таким образом, точки B и E изогонально сопряжены относительно треугольника DPQ, откуда следует искомое равенство.

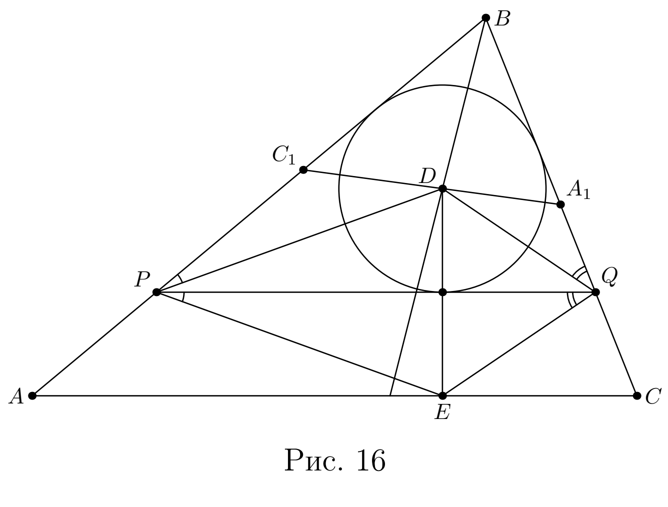

Рис. 16

17. (9–11) (L.Dong) Окружность ω, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Точка M на луче EF такова, что $EM = AB$. Точка N на луче FE такова, что $FN = AC$. Окружности BFM и CEN повторно пересекают ω в точках S и T соответственно. Докажите, что прямые BS, CT и AD пересекаются в одной точке.

Решение.

Лемма. Пусть X, Y, Z — такие точки на ω, что прямые DX, EY, FZ пересекаются в одной точке. Тогда прямые AX, BY, CZ пересекаются в одной точке.

Доказательство. Очевидно, $\angle AEX = \angle EDX$ и $\angle XFA = \angle XDF$. Также, по теореме синусов

$$\frac{\sin\angle FAX}{\sin\angle XFA} = \frac{XF}{AX}, \quad \frac{\sin\angle XAE}{\sin\angle AEX} = \frac{XE}{AX}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC} = \frac{\sin\angle FAX}{\sin\angle XAE} = \frac{XF}{XE}\cdot\frac{\sin\angle XFA}{\sin\angle AEX} = \frac{XF}{XE}\cdot\frac{\sin\angle XDF}{\sin\angle EDX} = \left(\frac{\sin\angle XDF}{\sin\angle EDX}\right)^2.$$

Аналогично

$$\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA} = \left(\frac{\sin\angle YED}{\sin\angle FEY}\right)^2; \frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB} = \left(\frac{\sin\angle ZFE}{\sin\angle DFZ}\right)^2.$$

Поэтому

$$\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}\cdot\frac{\sin\angle CBY}{\sin\angle YBA}\cdot\frac{\sin\angle ACZ}{\sin\angle ZCB} = 1.$$

и утверждение леммы следует из теоремы Чевы.

Вернемся к задаче.

Обозначим через $O(ABCD)$ двойное отношение прямых OA, OB, OC, OD. Пусть J — точка пересечения FT и ES, G — вторая точка пересечения AD и ω, K — точка пересечения EF и BC (рис. 17).

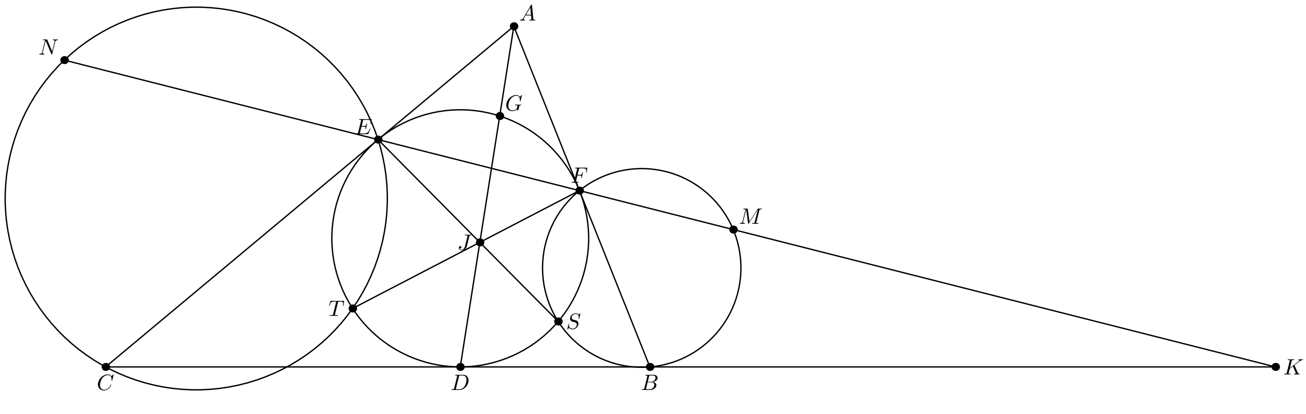

Рис. 17

Так как $\angle FMS = \angle FBS$, $\angle MES = \angle BFS$, получаем, что треугольники SBF и SME подобны. Значит, $SE : SF = ME : BF = AB : BF$. Тогда

$$E(AFJD) = E(EFSD) = (EFSD) = \frac{SE}{SF} : \frac{DE}{DF} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{DF}{DE}.$$

Аналогично

$$F(AEJD) = \frac{AC}{CE} \cdot \frac{DE}{DF}.$$

Таким образом

$$E(AFJD) : F(AEJD) = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{DF^2}{DE^2} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CE}{BF} \cdot \frac{KF}{KE}.$$

Применяя теорему Менелая к треугольнику AEF и точкам K, B, C, получаем

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FK}{KE} \cdot \frac{EC}{CA} = 1.$$

Следовательно, $E(AFJD) = F(AEJD)$, т.е. A, J, D лежат на одной прямой. Поэтому DG, ES и FT пересекаются в точке J и по лемме BS, CT и AG пересекаются в одной точке.

18. (9–11) (Д.Швецов) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; I_a — центр вневписанной окружности, соответствующей вершине A; I'_a — точка, симметричная I_a относительно прямой AA_1. Аналогично построим точки I'_b, I'_c. Докажите, что прямые $A_1I'_a$, $B_1I'_b$, $C_1I'_c$ пересекаются в одной точке.

    Первое решение. Прямые A_1A, A_1B, A_1A' и A_1I_a образуют гармоническую четверку. Следовательно, точки их пересечения с биссектрисой AL тоже образуют гармоническую четверку. Так как точкой, дополняющей A, L, I_a до гармонической четверки является центр I вписанной в треугольник ABC окружности, прямая A_1A' проходит через I. Аналогично B_1B' и C_1C' проходят через I.

    Это рассуждение можно провести немного иначе. Так как прямые A_1A, A_1B, A_1I и A_1I_a образуют гармоническую четверку и $A_1A \perp A_1B$, прямые A_1A и A_1B являются биссектрисами углов между A_1I и A_1I_a. Следовательно, A_1A' проходит через I.

    Второе решение. Докажем, что прямые A_1I_a, B_1I_b, C_1I_c пересекаются в одной точке. Тогда прямые A_1A', B_1B', C_1C', симметричные им относительно биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ также пересекутся в одной точке. Заметим, что, например, $\sin\angle I_bI_aA_1 : \sin\angle I_cI_aA_1 = (BA_1 : CA_1)\cdot(I_aC : I_aB)$. Применяя теорему Чевы к тройкам прямых I_aA, I_bB, I_cC и AA_1, BB_1, CC_1, получаем, что произведение этого и двух аналогичных отношений равно 1.

    Примечание. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта. Если точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC, а точки A_2, B_2, C_2 лежат на сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке и прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то и прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

19. (10–11) (М.Евдокимов) На плоскости начерчены треугольник ABC, описанная около него окружность и центр I его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой, постройте центр описанной окружности.

Решение. Построим точку C_1 пересечения касательных к окружности в точках A, B и вторую точку C_2 пересечения окружности с прямой CI. Прямая C_1C_2 является серединным перпендикуляром к отрезку AB и, следовательно, проходит через центр описанной окружности. Построив аналогично серединный перпендикуляр к отрезку AC, найдем центр.

20. (10–11) (Л.Шатунов) Через вершины A, B, C треугольника ABC провели прямые a_1, b_1, c_1 соответственно. Отразим a_1, b_1, c_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC, получив a_2, b_2, c_2. Пусть $A_1 = b_1 \cap c_1$, $B_1 = a_1 \cap c_1$, $C_1 = a_1 \cap b_1$, аналогично определим A_2, B_2, C_2. Докажите, что у треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ одинаковое отношение площади к радиусу описанной окружности (т.е. $\frac{S_1}{R_1} = \frac{S_2}{R_2}$, где $S_i = S(\triangle A_iB_iC_i)$, $R_i = R(\triangle A_iB_iC_i)$).

    Решение.

    Лемма. Пусть точки X', Y', Z' лежат на сторонах YZ, ZX, XY соответственно треугольника XYZ. Тогда

$$S_{X'Y'Z'} = \frac{XY' \cdot YZ' \cdot ZX' + X'Y \cdot Y'Z \cdot Z'X}{4R_{XYZ}}.$$

    (точки X', Y', Z' могут лежать и на продолжениях сторон. В этом случае отрезки в формуле надо считать направленными)

    Доказательство. Пусть $XY' = \alpha XZ$, $YZ' = \beta YX$, $ZX' = \gamma ZY$. Тогда $S_{X'Y'Z'} : S_{XYZ} = 1 - \alpha(1-\beta) - \beta(1-\gamma) - \gamma(1-\alpha) = \alpha\beta\gamma + (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$ и утверждение леммы следует из формулы $S_{XYZ} = (XY \cdot YZ \cdot ZX)/4R_{XYZ}$.

    Применим теперь лемму к треугольнику $A_1B_1C_1$ и точкам A, B, C на его сторонах. Обозначив $\angle B_1AC = \alpha$, $\angle C_1BA = \beta$, $\angle A_1CB = \gamma$ получим (использовав теорему синусов для треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1)

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot CA(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin(A+\alpha)\sin(B+\beta)\sin(C+\gamma))}{4R_1 \sin\angle A_1B_1C_1 \sin\angle B_1C_1A_1 \sin\angle C_1A_1B_1}.$$

    Применив теорему синусов к треугольнику $A_1B_1C_1$, получим, что знаменатель этой дроби равен $2S_1/R_1$. Осталось заметить, что при замене треугольника $A_1B_1C_1$ на треугольник $A_2B_2C_2$ числитель дроби не изменится.

21. (10–11) (А.Заславский) Хорда PQ окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны BC, AC в точках A', B' соответственно. Касательные к окружности в точках A и B пересекаются в точке X, а касательные в точках P и Q — в точке Y. Прямая XY пересекает AB в точке C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

    Решение. Пусть прямые PQ и AB пересекаются в точке U, а прямые AA' и BB' — в точке V. Тогда прямая XY является полярой точки U относительно описанной окружности и,значит, точки A, B, U, C' образуют гармоническую четверку. Следовательно, прямая CV проходит через C'.

22. (10–11) (D.Reznik, А.Акопян) Дан отрезок AB. Пусть C — произвольная точка на серединном перпендикуляре к AB; O — точка на описанной окружности треугольника ABC, противоположная C; эллипс с центром O касается прямых AB, BC, CA. Найдите геометрическое место точек касания эллипса с прямой BC.

Ответ. Окружность с диаметром BQ, где Q — точка на луче AB такая, что $AQ = 3AB/2$, без точек B и Q.

Решение. Пусть M — середина AB, N — точка, симметричная M относительно O, P — точка пересечения PN и BC, U, V — точки пересечения прямой, проходящей через N и параллельной AB, с прямыми BC, AC соответственно (рис. 22). Так как треугольники BPQ и UPN подобны, $BP : PN = BQ : UN = AB : UV$, т.е. прямая, проходящая через P и параллельная AB, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции $ABUV$. Следовательно, вписанный в трапецию эллипс касается BC в точке P. Поскольку $PN \parallel OB \perp BC$, эта точка лежит на окружности с диаметром BQ. Очевидно, что любая точка окружности, кроме B и Q, принадлежит искомому ГМТ.

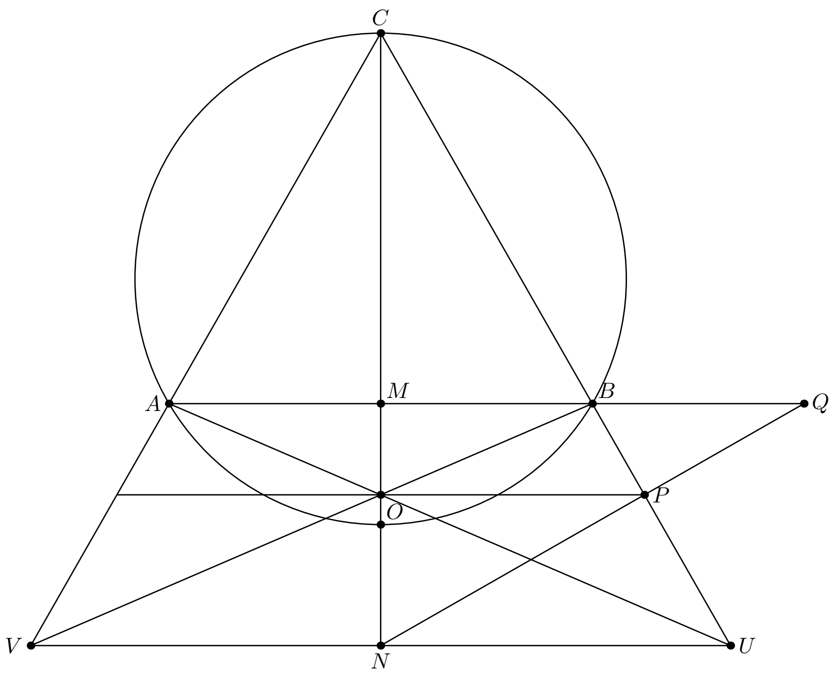

Рис. 22

23. (10–11) (И.Кухарчук) По окружности Ω движется точка P. На окружности Ω зафиксированы точки A и B. Точка C — произвольная точка внутри круга с границей Ω. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников APC и BCP, пересекаются в точке Q. Докажите, что все точки Q лежат на двух фиксированных прямых.

Решение. Точка пересечения внешних касательных является центром окружности ω, инверсия относительно которой меняет окружности APC и BPC местами. Рассмотрим инверсию с центром C, переводящую точки A, B, P в A', B', C' соответственно. Она переведет окружности APC, BPC в прямые $A'P'$, $B'P'$ соответственно, окружность ω в биссектрису одного из углов между этими прямыми, а ее центр Q в точку Q', симметричную C относительно этой биссектрисы. Поскольку биссектрисы углов между прямыми $P'A'$ и $P'B'$ проходят через две фиксированные точки — середины дуг $A'B'$ окружности $A'B'P'$, точка Q' лежит на одной из двух окружностей с центрами в этих точках, проходящих через C. Образами этих окружностей при рассмотренной инверсии являются две фиксированные прямые.

Примечание. Точка Q переходит с одной прямой на другую, когда P пересекает одну из прямых AC, BC.

24. (11) (Tran Quang Hung, N.Dergiados) В пирамиде $SABC$ все углы при вершине S прямые. Точки A', B', C' на ребрах SA, SB, SC соответственно таковы, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Верно ли, что плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны?

    Ответ. Да.

    Первое решение. Предположим, что плоскости ABC и $A'B'C'$ не параллельны. Тогда сделаем гомотетию с центром S, переводящую треугольник $A'B'C'$ в треугольник, равный ABC, а затем движение, переводящее полученный треугольник в ABC. Тогда точка S перейдет в точку S', отличную от S и точки, симметричной S относительно плоскости ABC. С другой стороны, обе точки S, S' лежат на трех сферах с диаметрами AB, BC, CA. Поскольку центры этих сфер не лежат на одной прямой, у них есть лишь две точки пересечения, симметричные относительно плоскости ABC — противоречие.

    Второе решение. Пусть $A'B' = tAB$. Тогда $B'C' = tBC$, $C'A' = tAC$. Так как углы при вершине S прямые, то $SA'^2 + SB'^2 = t^2AB^2$, $SA'^2 + SC'^2 = t^2AC^2$, $SB'^2 + SC'^2 = t^2BC^2$. Из этих равенств получаем, что $SA'^2 = t^2(AB^2 + AC^2 - BC^2)/2 = t^2SA^2$, т.е. $SA' = tSA$. Аналогично $SB' = tSB$, $SC' = tSC$ и, следовательно, плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны.