Двадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Двадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырёх классов средней школы. В списке, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса (на момент старта заочного тура) решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решённые задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчётливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто сослаться на него (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2023 и не позднее 1 марта 2024 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский) и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в **отдельном** файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них **архив** (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

4. После загрузки зайдите на сервер, откройте загруженный файл и проверьте, что он правильно загрузился.

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2024 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** к 1 июня 2024 г. Свои результаты Вы сможете узнать по адресу **geomshar@yandex.ru** после публикации списков.

1. (8) Биссектрисы AI и CI пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, C_1 соответственно. Описанная окружность треугольника AIC_1 пересекает сторону AB в точке C_0; аналогично определим A_0. Докажите, что точки A_0, A_1, C_0, C_1 лежат на одной прямой.

2. (8) Даны три попарно различные точки на прямой. Сколько существует равнобедренных треугольников, в которых они являются (в каком-нибудь порядке) центрами описанной, вписанной и вневписанной окружностей?

3. (8) В остроугольном треугольнике ABC точка M — середина меньшей дуги BC описанной окружности. Окружность ω касается сторон AB, AC в точках P, Q соответственно и проходит через точку M. Докажите,что $BP + CQ = PQ$.

4. (8) В треугольнике ABC вписанная окружность ω касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, P — произвольная точка этой окружности. Прямая AP вторично пересекает описанную окружность треугольника AB_1C_1 в точке A_2. Аналогично строятся точки B_2 и C_2. Докажите, что описанная около треугольника $A_2B_2C_2$ окружность касается ω.

5. (8) Точки A', B', C' соответственно симметричны вершинам A, B, C относительно противоположных сторон треугольника ABC. Докажите, что окружности $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ пересекаются в одной точке.

6. (8–9) Даны окружность ω и точки A и B на ней. Пусть C — произвольная точка на одной из дуг AB этой окружности, CL — биссектриса треугольника ABC, окружность BCL пересекает AC в E, а CL пересекает BE в F. Найдите геометрическое место центров окружностей AFC.

7. (8–9) Постройте вписанно-описанный четырёхугольник по двум противоположным вершинам и центру вписанной окружности.

8. (8–9) В четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$ и $AD = CD$. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AB в точках E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AC, BD, AE и CF лежат на одной окружности.

9. (8–9) В трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$) вписана окружность ω, которая касается сторон AB, BC, CD и AD в точках P, Q, R, S соответственно. Прямая, проходящая через точку P параллельно основаниям трапеции, пересекает прямую QR в точке X. Докажите, что прямые AB, QS и DX пересекаются в одной точке.

10. (8–9) Треугольник ABC вписан в окружность ω. Точка T на прямой BC выбрана так, что прямая AT касается ω. Биссектриса угла BAC пересекает отрезок BC в точке L, а окружность ω в точке A_0. Прямая TA_0 пересекает ω в точке P. Точка K на отрезке BC такова, что $BL = CK$. Докажите, что $\angle BAP = \angle CAK$.

11. (8–10) В треугольнике ABC точки M, N — середины сторон AB, AC соответственно; серединный перпендикуляр к биссектрисе AL пересекает биссектрисы углов B и C в точках P, Q соответственно. Докажите, что прямые PM и QN пересекаются на касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке A.

12. (8–10) Биссектрисы AA_1, CC_1 треугольника ABC, в котором $\angle B = 60°$, пересекаются в точке I. Описанные окружности треугольников ABC, A_1IC_1 пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PI проходит через середину стороны AC.

13. (8–11) Верно ли, что любой многоугольник можно разрезать на равнобокие трапеции?

14. (9–11) Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC касается окружности, проходящей через середины его сторон, в точке F. Из середины O гипотенузы AB проведена касательная OE к ω, отличная от AB. Докажите, что $CE = CF$.

15. (9–11) Разность двух углов треугольника больше $90°$. Докажите, что отношение радиусов его описанной и вписанной окружностей больше 4.

16. (9–11) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Отрезки BB_1 и A_1C_1 пересекаются в точке D. Точка E –– проекция точки D на сторону AC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно так, что $EP = PD$, $EQ = QD$. Докажите, что $\angle PDB_1 = \angle EDQ$.

17. (9–11) Окружность ω, вписанная в неравнобедренный треугольник ABC, касается его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Точка M на луче EF такова, что $EM = AB$. Точка N на луче FE такова, что $FN = AC$. Окружности BFM и CEN повторно пересекают ω в точках S и T соответственно. Докажите, что прямые BS, CT и AD пересекаются в одной точке.

18. (9–11) Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC; I_a — центр вневписанной окружности, соответствующей вершине A; I'_a — точка, симметричная I_a относительно прямой AA_1. Аналогично построим точки I'_b, I'_c. Докажите, что прямые $A_1I'_a$, $B_1I'_b$, $C_1I'_c$ пересекаются в одной точке.

19. (10–11) На плоскости начерчены треугольник ABC, описанная около него окружность и центр I его вписанной окружности. Пользуясь только линейкой, постройте центр описанной окружности.

20. (10–11) Через вершины A, B, C треугольника ABC провели прямые a_1, b_1, c_1 соответственно. Отразим a_1, b_1, c_1 относительно биссектрис соответствующих углов треугольника ABC, получив a_2, b_2, c_2. Пусть $A_1 = b_1 \cap c_1$, $B_1 = a_1 \cap c_1$, $C_1 = a_1 \cap b_1$, аналогично определим A_2, B_2, C_2. Докажите, что у треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ одинаковое отношение площади к радиусу описанной окружности (т.е. $\frac{S_1}{R_1} = \frac{S_2}{R_2}$, где $S_i = S(\triangle A_iB_iC_i)$, $R_i = R(\triangle A_iB_iC_i)$).

21. (10–11) Хорда PQ окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает стороны BC, AC в точках A', B' соответственно. Касательные к окружности в точках A и B пересекаются в точке X, а касательные в точках P и Q — в точке Y. Прямая XY пересекает AB в точке C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

22. (10–11) Дан отрезок AB. Пусть C — произвольная точка на серединном перпендикуляре к AB; O — точка на описанной окружности треугольника ABC, противоположная C; эллипс с центром O касается прямых AB, BC, CA. Найдите геометрическое место точек касания эллипса с прямой BC.

23. (10–11) По окружности Ω движется точка P. На окружности Ω зафиксированы точки A и B. Точка C — произвольная точка внутри круга с границей Ω. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников APC и BCP, пересекаются в точке Q. Докажите, что все точки Q лежат на двух фиксированных прямых.

24. (11) В пирамиде $SABC$ все углы при вершине S прямые. Точки A', B', C' на ребрах SA, SB, SC соответственно таковы, что треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Верно ли, что плоскости ABC и $A'B'C'$ параллельны?