XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс. Решения

Ратмино, 31 июля 2024 г.

1. (А.Заславский) Даны окружность ω с центром O и точка P внутри нее. Пусть X — произвольная точка ω, прямая XP и окружность XOP пересекают ω во второй раз в точках X_1, X_2 соответственно. Докажите, что все прямые X_1X_2 параллельны друг другу.

   Решение. Из вписанного четырехугольника $XPOX_2$ и равнобедренного треугольника XOX_1 получаем $\angle PX_2O = \angle PXO = \angle PX_1O$ (рис. 8.1). А поскольку $OX_1 = OX_2$, то $\angle PX_1X_2 = \angle PX_2X_1$ и $PX_1 = PX_2$. Таким образом, PO — серединный перпендикуляр ко всем отрезкам X_1X_2, т.е все эти отрезки параллельны.

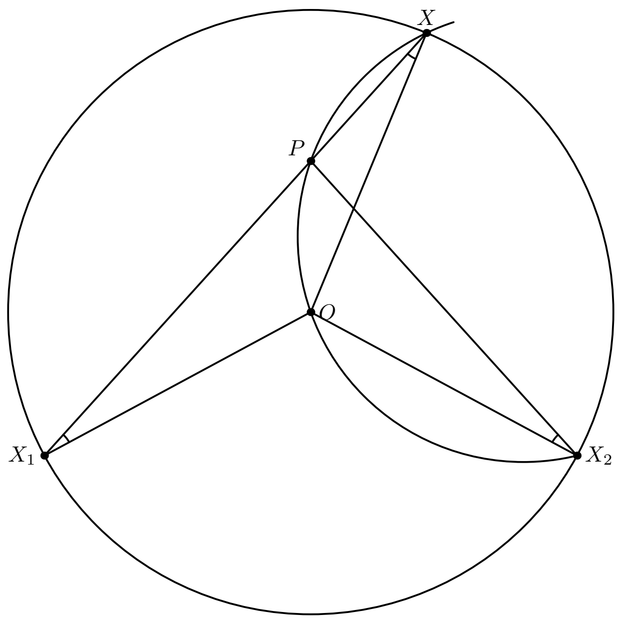

Рис. 8.1.

2. (Л.Емельянов) В остроугольном треугольнике ABC CM — медиана, P — проекция ортоцентра H на биссектрису угла C. Докажите, что MP делит отрезок CH пополам.

   Решение. Пусть E — середина CH. Тогда $CE = EH = EP$ и $\angle PEH = 2\angle PCH = |\angle A - \angle B|$. Но точки E и M лежат на окружности девяти точек, поэтому $\angle MEH = \angle MND = |\angle A - \angle B|$, где N — середина BC, а D — основание высоты из C (рис. 8.2).

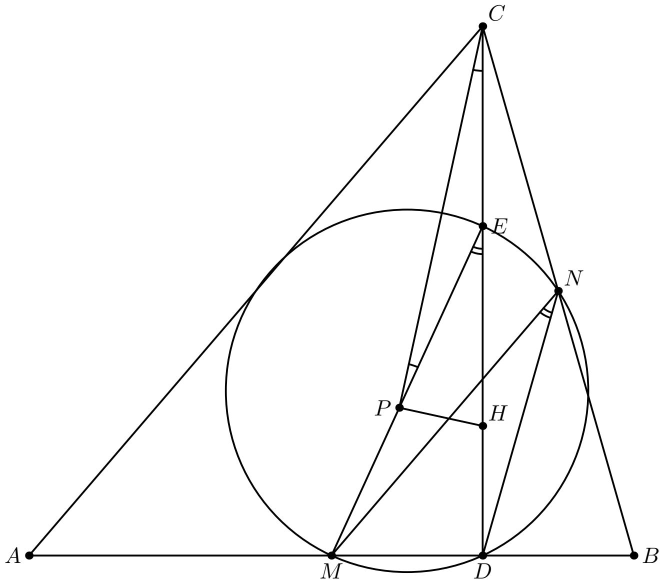

Рис. 8.2.

3. (Р.Прозоров) В остроугольном треугольнике ABC D — основание высоты из вершины A, A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная A. На отрезке AD выбрана точка P, а на отрезках AB и AC точки X и Y так, что $\angle CBP = \angle ADY$, $\angle BCP = \angle ADX$. Пусть PA' пересекает BC в точке T. Докажите, что D, X, Y, T лежат на одной окружности.

   Решение. Пусть окружность DXY пересекает BC в точке T'. Отметим точку L — вторичное пересечение прямой AP и окружности BPC, тогда $\angle PCB = \angle PLB = \angle ADX$ и $XD \parallel BL$, аналогично и $DY \parallel CL$, отсюда треугольники DXY и LBC гомотетичны с центром в A, тогда гомотетичны и их описанные окружности. Пусть прямая через L параллельная BC пересекает окружность BPC вторично в точке N, тогда точки T' и N соответственны, и A, T', N лежат на одной прямой. Основание перпендикуляра из A' на BC — точка G симметрична D относительно середины BC, также и основание перпендикуляра из N симметрично D относительно середины BC, т.е. $NA' \perp BC$. Пусть K — вторичное пересечение NA' с окружностью ABC, тогда $AD \cdot A'G = A'G \cdot GK = GC \cdot GB = DB \cdot DC = DP \cdot DL = DP \cdot GN$, из равенства первого и последнего выражения $A'G : GN = DP : DA$, т.е. точки P и A' соответственны в подобных треугольниках $DT'A$ и $GT'N$ и P, T', A' лежат на одной прямой (рис. 8.3), что завершает доказательство.

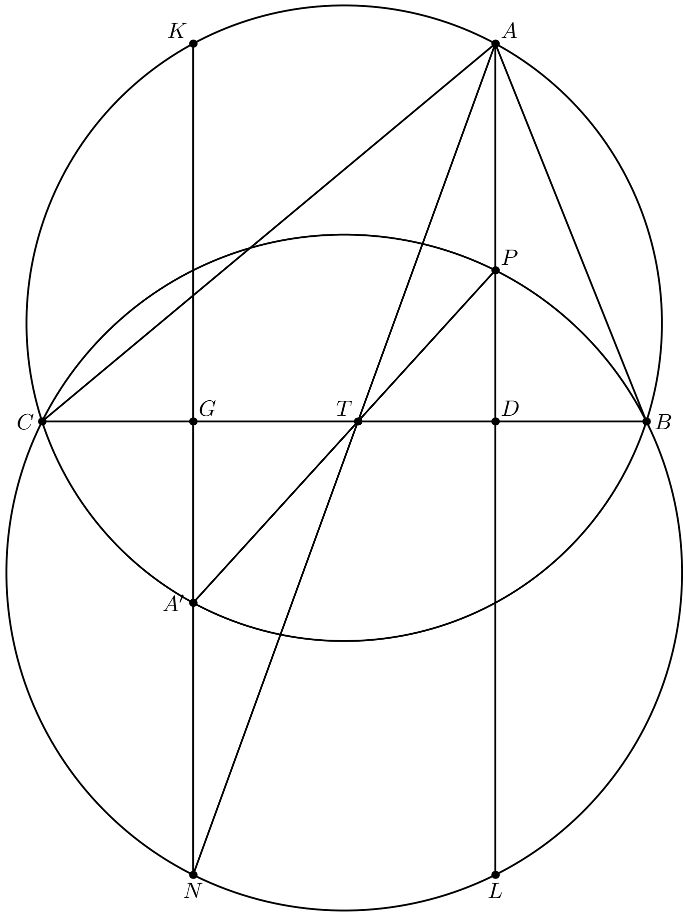

Рис. 8.3.

4. (М.Евдокимов) Из бумаги вырезан квадрат, сторона которого равна 1. Сделав не больше 20 сгибов, постройте отрезок длины 1/2024. Никаких инструментов нет, можно только сгибать бумагу по прямым и отмечать точки пересечения линий сгиба.

Первое решение. Пусть $ABCD$ — данный квадрат.

1–2. Дважды согнув квадрат по прямым, параллельным AD, построим на сторонах AB, CD точки U, V соответственно такие, что $AU = DV = 1/4$.

3–7. Согнув квадрат пять раз по прямым, параллельным AB, разделим сторону AD и отрезок UV на 32 равных части.

8. Согнув квадрат по прямой ST, где S — точка на AD такая, что $SD = 23/32$, а T — точка на UV такая, что $TV = 1/32$, получим на CD точку P такую, что $PV : PD = 1 : 23$, т.е. $PV = 1/88$ (рис. 8.4).

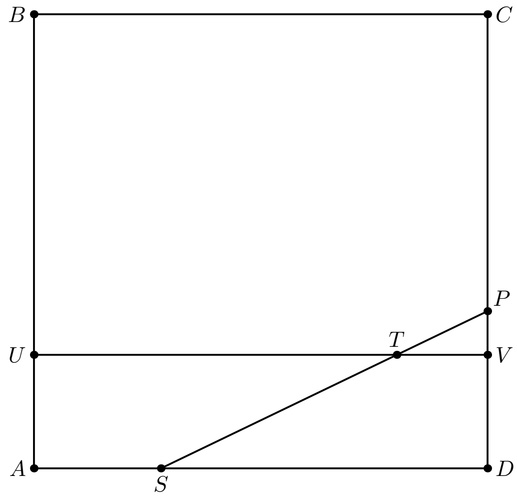

Рис. 8.4.

9. Аналогично согнув квадрат по прямой $S'T$, где $DS' = 24/32$, получим на CD такую точку Q, что $VQ = 1/92$. Соответственно $PQ = 1/2024$.

Второе решение. Обозначим через X_n такую точку на стороне AD, что $DX_n = AD/n$, а через Y_n такую точку на диагонали BD, что $DY_n = BD/n$.

Лемма. Для любого n прямая X_nY_{n+1} проходит через C.

Для доказательства достаточно применить теорему Менелая к треугольнику AOD, где O — центр квадрата, и точкам X_n, Y_{n+1}, C.

Пользуясь леммой, проведем следующее построение.

1. Перегнем квадрат по диагонали BD.

2. Перегнув квадрат по средней линии, отметим точку X_2.

3. Перегнув квадрат по прямой CX_2, отметим Y_3.

4–5. Разделив отрезок DY_3 на четыре части, отметим точку Y_{12}.

6. Перегнув квадрат по прямой CY_{12}, отметим точку X_{11}.

7. Разделив отрезок DX_{11} пополам, отметим точку X_{22}.

8. Перегнув квадрат по прямой CX_{22}, отметим точку Y_{23}.

9. Перегнув квадрат по прямой, проходящей через Y_{23} и параллельной CD, отметим точку X_{23}.

10–11. Разделив отрезок $X_{22}X_{23}$ на четыре части, получим отрезок длины $(1/22 - 1/23)/4 = 1/2024$.

Примечание. Возможны и другие построения.

XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс. Решения

Ратмино, 1 августа 2024 г.

5. (М.Евдокимов, Т.Казицына) Вершины M, N, K прямоугольника $KLMN$ лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно правильного треугольника ABC так, что $AM = 2$, $KC = 1$, а вершина L лежит вне треугольника. Найдите угол KMN.

   Ответ. $30°$.

   Решение. Возьмем на стороне BC точку N' такую, что $CN' = 2$. Очевидно, что $MN' \parallel AC$. Кроме того, поскольку $CN' = 2CK$ и $\angle N'CK = 60°$, треугольник CKN' — прямоугольный, следовательно, $\angle MN'K = \angle MNK = 90°$. При этом $N \neq N'$, поскольку в противном случае точка L лежала бы на стороне AC.

   Так как точки N и N' лежат на окружности с диаметром MK, то $\angle MKN = \angle MN'N = 60°$ (рис. 8.5). Соответственно $\angle KMN = 30°$.

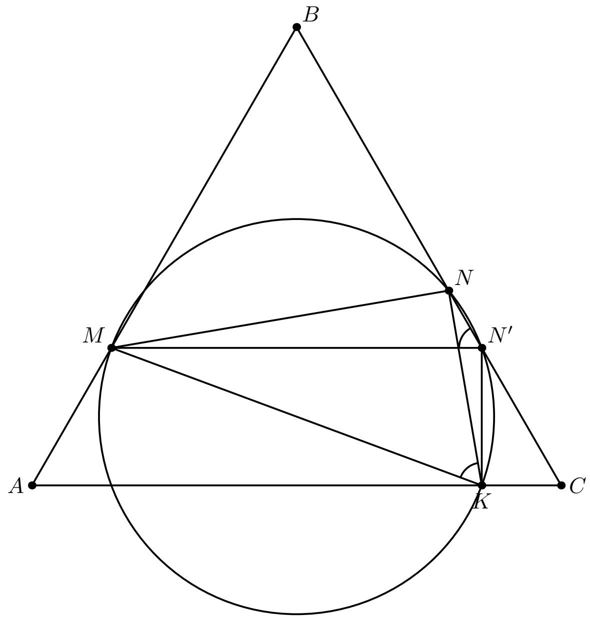

Рис. 8.5.

6. (Ф.Нилов) Окружность ω касается прямых a и b в точках A и B соответственно. Произвольная касательная к ω пересекает a и b в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно A и B соответственно. Найдите геометрическое место проекций центра окружности на $X'Y'$.

Ответ. Окружность, симметричная ω относительно прямой AB с двумя выколотыми точками.

Решение. Рассмотрим случай, когда окружность ω вписана в треугольник, образованный прямыми a, b и XY. Другие случаи разбираются аналогично.

Пусть I — центр ω, P — проекция I на $X'Y'$, T — точка касания ω с XY. Так как точки A и P лежат на окружности с диаметром IX', то $\angle API = \angle AX'I = \angle IXA = \angle ITA$ (рис. 8.6). Аналогично $\angle IPB = \angle BTI$ и, следовательно, $\angle APB = \angle BTA$.

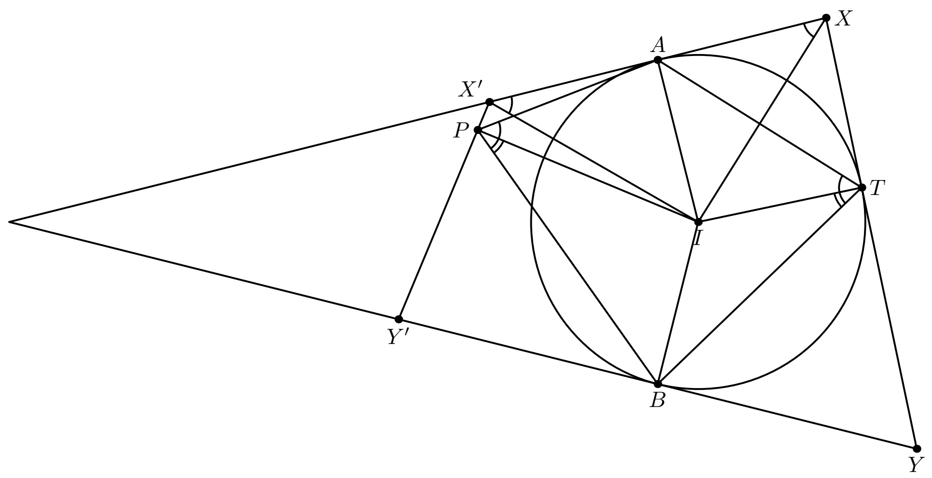

Рис. 8.6.

Аналогично показывается, что по любой точки P полученной окружности можно построить точки X, Y, причем прямая XY будет касаться ω. Исключением являются только две точки для которых прямая IP перпендикулярна одной из сторон угла, так как в этих случаях одна из точек X', Y' не существует.

7. (Л.Шатунов) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $l \parallel AC$ пересекает прямые AD, BC, AB, CD в точках X, Y, Z, T. Описанные окружности треугольников XYB и ZTB вторично пересекаются в точке R. Докажите, что R лежит на прямой BD.

Решение. Пусть прямая BD пересекает XT в точке U (рис. 8.7). Применяя теорему Менелая к треугольнику BUZ и точкам X, A, D, получаем

$$\frac{XZ}{XU} \cdot \frac{UD}{DB} \cdot \frac{AB}{AZ} = 1.$$

Аналогично
$$\frac{TY}{TU} \cdot \frac{UD}{DB} \cdot \frac{BC}{CY} = 1.$$
Отсюда, поскольку $AB : AZ = BC : CY$, получаем, что $UX : UZ = UT : UY$, т.е. степени точки U относительно обеих окружностей равны. Поэтому U, а значит и D, лежат на прямой BR.

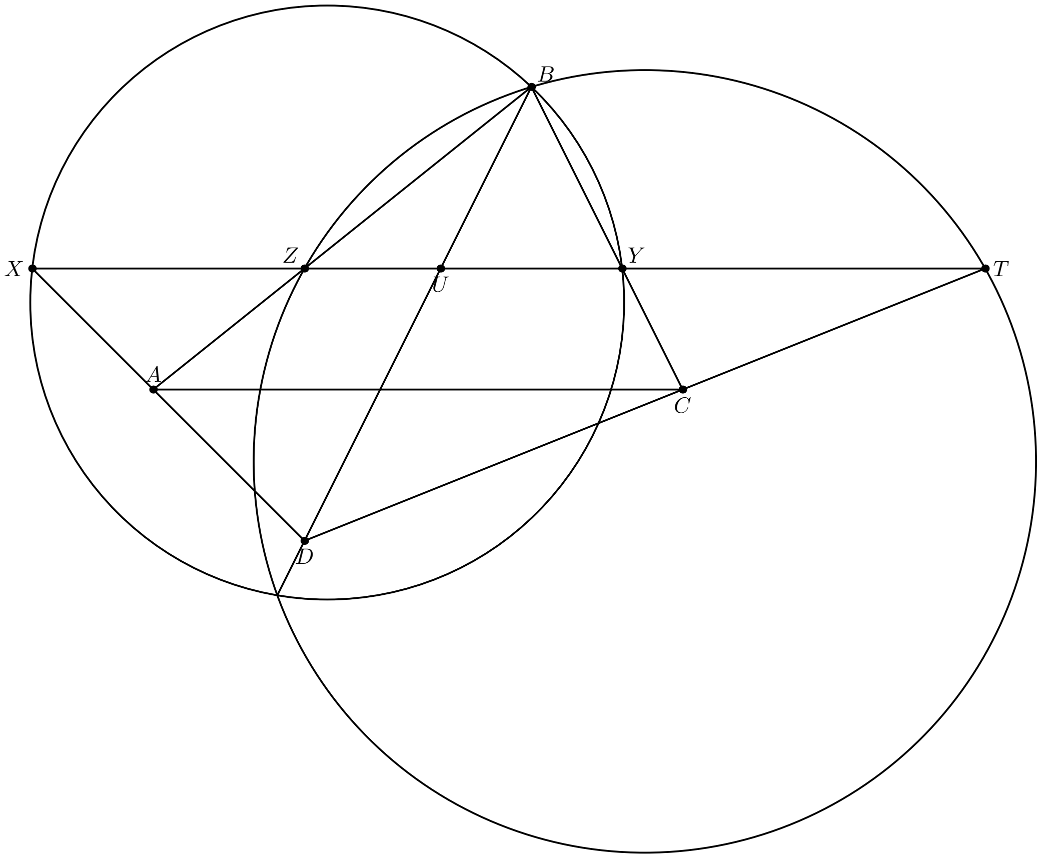

Рис. 8.7.

8. (С.Шмарин) Из картона вырезали два многоугольника. Может ли быть, что при любом их расположении на плоскости они либо имеют общие внутренние точки, либо пересекаются по конечному множеству точек?

Ответ. Да.

Решение. Пусть один многоугольник — это восьмиугольник $A_1 \ldots A_8$ такой, что $A_2A_4A_6A_8$ — квадрат, длины всех сторон равны и $\angle A_2A_1A_3 > 40°$ (рис.8.8), а второй — правильный девятиугольник со стороной больше, чем A_1A_3. Тогда, если у них есть общий отрезок границы, то он должен содержать одну из вершин A_1, A_3, A_5, A_7 восьмиугольника. Пусть этот общий отрезок — A_1B, где B — точка на стороне A_1A_2. Поскольку внешний угол девятиугольника равен $40°$, его сторона пересекает отрезок A_2A_3. Следовательно, у многоугольников есть общие внутренние точки.

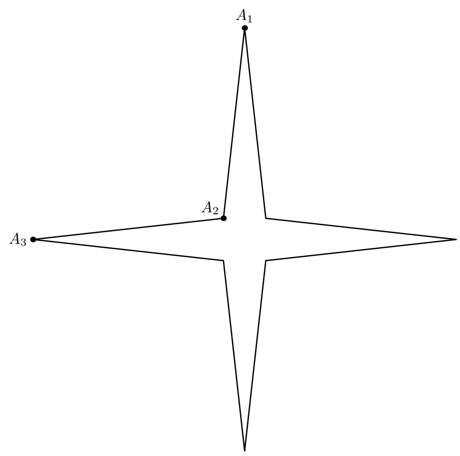

Рис. 8.8.

Примечание. Можно показать, что в приведенном примере суммарное количество сторон у двух многоугольников наименьшее.

XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс. Решения

Ратмино, 31 июля 2024 г.

1. (Л.Емельянов) В остроугольном треугольнике ABC H — ортоцентр; A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности с BC, CA, AB соответственно; E_A, E_B, E_C — середины AH, BH, CH соответственно; окружность с центром E_A, проходящая через A, повторно пересекает биссектрису угла A в точке A_2; точки B_2, C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

   Решение. Точки A_2, B_2, C_2 являются проекциями ортоцентра на биссектрисы и, значит, лежат на окружности с диаметром HI, где I — центр вписанной окружности. Поэтому, например, $\angle A_2C_2B_2 = \angle A_2IB_2 = (\angle A + \angle B)/2 = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 9.1.). Равенство остальных углов треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ доказывается аналогично.

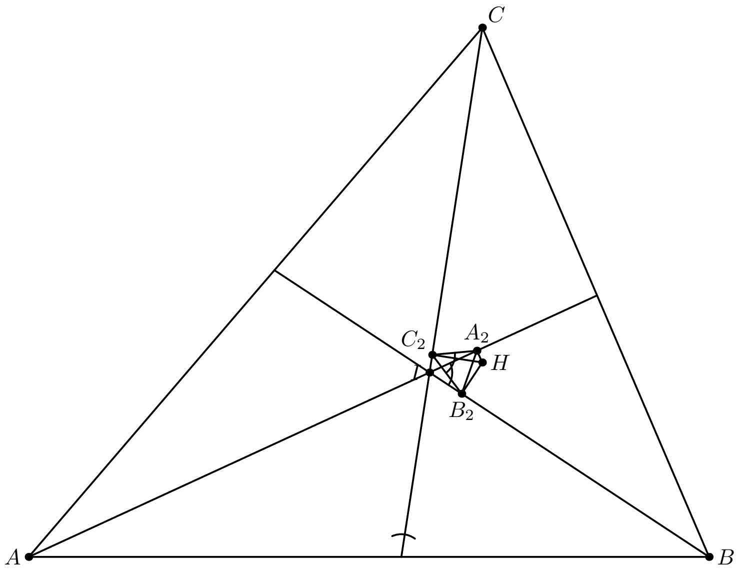

Рис. 9.1.

   Примечание. Утверждение задачи останется верным, если заменить ортоцентр любой другой точкой плоскости.

2. (А.Шекера) Даны 4 точки на плоскости A, B, C, D, не образующие прямоугольник. Пусть стороны треугольника T равны $AB + CD$, $AC + BD$, $AD + BC$. Докажите, что T — остроугольный.

Решение. Заметим, что

$$\begin{aligned}(AB+CD)^2+(AD+BC)^2-(AC+BD)^2 &= \\ =(AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-AC^2-BD^2) &+ \\ +2(AB\cdot CD+AD\cdot BC-AC\cdot BD).\end{aligned}$$

Вторая скобка неотрицательна по неравенству Птолемея. Обозначим $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$, $\vec{d}=\vec{OD}$, где O — произвольная точка. Тогда первая скобка равна

$$(\vec{a}-\vec{b})^2+(\vec{b}-\vec{c})^2+(\vec{c}-\vec{d})^2+(\vec{d}-\vec{a})^2-(\vec{a}-\vec{c})^2-(\vec{b}-\vec{d})^2=(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}-\vec{d})^2\geq 0.$$

При этом первая скобка обращается в нуль тогда и только тогда, когда четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а вторая — тогда и только тогда, когда этот четырехугольник вписанный. Поскольку $ABCD$ — не прямоугольник, оба условия не могут выполняться одновременно. Таким образом, $(AC+BD)^2<(AB+CD)^2+(AD+BC)^2$. Из этого и двух аналогичных неравенств следует утверждение задачи. Заметим, что приведенное рассуждение работает и для четырех точек, лежащих на одной прямой: первая скобка обращается в нуль, когда одна из точек A, C лежит на отрезке BD, а другая вне его; вторая, когда середины отрезков AC и BD совпадают. Оба условия выполняться одновременно не могут.

3. (Л.Шатунов, В.Шеломовский) Пусть (P,P') и (Q,Q') — две пары точек, изогонально сопряженных относительно треугольника ABC, R — точка пересечения прямых PQ и $P'Q'$. Докажите, что педальные окружности точек P, Q и R соосны.

   Первое решение. Будем обозначать через X_a, X_b, X_c проекции произвольной точки X на BC, CA, AB соответственно. Пусть p, q, r — педальные окружности точек P, Q, R, а M, N, K соответственно — их центры. Тогда M, N, K лежат на прямой Гаусса четырехсторонника $PQP'Q'$. По теореме Менелая для треугольников PQR' и $P'Q'R'$ (R' изогонально сопряжена R).

$$\frac{P'Q}{P'R'}\frac{Q'R'}{Q'P}\frac{PR}{RQ}=\frac{P'Q}{QR'}\frac{R'P}{PQ'}\frac{Q'R}{RP'}=1.$$

Следовательно,

$$\frac{RP\cdot RP'}{RQ\cdot RQ'}=\frac{R'P\cdot R'P'}{R'Q\cdot R'Q'}.$$

По теореме Фалеса

$$\frac{R_aP_a \cdot R_aP_a'}{R_aQ_a \cdot R_aQ_a'} = \frac{R_a'P_a \cdot R_a'P_a'}{R_a'Q_a \cdot R_a'Q_a'},$$

т.е. отношения степеней точек R_a, R_a' относительно окружностей p и q равны. Следовательно, эти точки лежат на какой-то окружности, соосной с p и q. Поскольку центр этой окружности лежит на прямой MN, она совпадает с r.

Второе решение. Дважды применив теорему Фалеса получаем $\frac{R_aP_a \cdot R_aP_a'}{R_aQ_a \cdot R_aQ_a'} = \frac{RP \cdot RP'}{RQ \cdot RQ'}$. Аналогично $\frac{RP \cdot RP'}{RQ \cdot RQ'} = \frac{R_bP_b \cdot R_bP_b'}{R_bQ_b \cdot R_bQ_b'} = \frac{R_cP_c \cdot R_cP_c'}{R_cQ_c \cdot R_cQ_c'} = \frac{R_aP_a \cdot R_aP_a'}{R_aQ_a \cdot R_aQ_a'}$. По лемме о соосности (также известной как обобщенная теорема об окружности Аполлония) имеем, что точки R_a, R_b, R_c образуют окружность, соосную с педальными окружностями P и Q.

4. (П.Пучков) Для каких $n > 0$ можно отметить на плоскости несколько различных точек и несколько различных окружностей так, чтобы были выполнены следующие условия:
- через каждую отмеченную точку проходит ровно n отмеченных окружностей;
- на каждой отмеченной окружности лежит ровно n отмеченных точек;
- у каждой отмеченной окружности отмечен ее центр?

Ответ. При любых.

Решение. Будем строить искомую конфигурацию по индукции. При $n = 1$ она состоит из двух окружностей с радиусами 1, каждая из которых проходит через центр другой и их центров. Пусть конфигурация для n построена и состоит из 2^n единичных окружностей и их центров. Сдвинем ее на единичный вектор, отличный от всех векторов между отмеченными точками. Тогда на каждой из старых окружностей появится одна новая отмеченная точка — образ ее центра, а через каждую из старых точек пройдет одна новая окружность — образ окружности с центром в данной точке. Аналогично через каждую новую точку будут проходить n новых и одна старая окружность, а на каждой новой окружности будут лежать n новых и одна старая точка.

Примечание. Если в описанной конфигурации соединить каждую точку с центрами проходящих через нее окружностей, получим проекцию на плоскость n-мерного гиперкуба, в которой все ребра имеют равные длины.

XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс. Решения

Ратмино, 1 августа 2024 г.

5. (А.Заславский) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, P — такая точка внутри треугольника, что $\angle APH = \angle BPO = \pi/2$. Докажите, что $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$.

Решение. Пусть M — середина AB. Тогда B, O, P, M лежат на окружности с диаметром OB, а A, H, P, M лежат на окружности с диаметром AH. Отсюда $\angle PAH = \angle PMH = \angle PMO = \angle PBO$ (рис. 9.5). Видим, что $PAH \sim PBO$, иначе говоря, P — центр поворотной гомотетии, переводящей $\vec{AH}$ в $\vec{BO}$. Но из простого счета углов ($\angle OBC = \angle OCB = 90° - \angle ABC = \angle HAB = \angle HBA$) следует, что $AHB \sim BOC$. Это значит, что поворотная гомотетия, о которой говорилось выше, переводит также B в C. Значит, $PAB \sim PBC$, откуда $\angle PCB = \angle PBA$ и $\angle PBC = \angle PAB$. Тогда $\angle PAC = \angle BAC - \angle PAB = \angle CBA - \angle PBC = \angle PBA$, и все доказано.

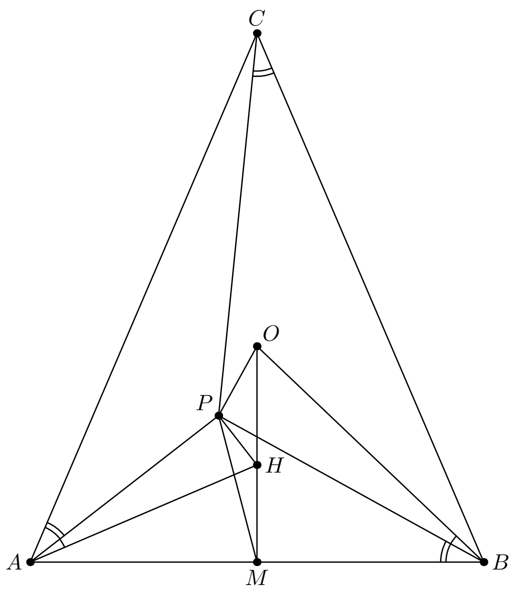

Рис. 9.5.

Примечание. Точка P, для которой $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$, а также точка Q, для которой $\angle QAB = \angle QBC = \angle QCA$, называются *точками Брокара* треугольника ABC. Из решения задачи видно, что в равнобедренном треугольнике точка P удовлетворяет условиям

$\angle PAC = \angle PCB, \angle PAB = \angle PBC$. Такая (и две аналогичные) точки называются *точками Шалтая* и являются проекциями ортоцентра на медианы треугольника. Кроме того, для точки P имеем $\angle PBA = \angle PCB$, $\angle PBC = \angle PAB$. Такие (и аналогичные) условия определяют *точки Болтая*, являющиеся проекциями центра описанной окружности на симедианы треугольника. Таким образом, утверждение задачи можно переформулировать: в равнобедренном треугольнике точки Брокара являются также точками Шалтая и Болтая, соответствующими вершинам при основании.

6. (А.Марданов, К.Марданова) Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Вневписанная окружность с центром J касается стороны AC в точке B_2 и продолжений сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. Пусть прямые IB_2 и JB_1 пересекаются в точке X, прямые IC_2 и JC_1 — в точке Y, прямые IA_2 и JA_1 — в точке Z. Докажите, что если одна из точек X, Y, Z лежит на вписанной окружности, то и две другие тоже.

   Решение. Точка Y является точкой пересечения диагоналей трапеции IC_1C_2J, поэтому $IY : IC_2 = IC_1 : (IC_1 + JC_2) = r : (r + r_b)$, где r —радиус вписанной окружности, а r_b — радиус вневписанной. Соответственно, Y лежит на вписанной окружности тогда и только тогда, когда $IC_2 = r + r_b$, а, поскольку $C_1C_2 = AC = b$, это равносильно $b^2 = r_b^2 + 2rr_b$. Такое же условие, очевидно получаем и для точки Z.

   Перейдем к точке X. Пусть BH — высота треугольника, BL — биссектриса. Поскольку точки B, L, I, J образуют гармоническую четверку, это верно и для их проекций H, L, B_1, B_2. Следовательно, точка X пересечения боковых сторон трапеции IB_1JB_2 лежит на BH (рис. 9.6). При этом $BX : B_2J = BI : IJ = r : (r_b - r)$, т.е. $1/BX = 1/r - 1/r_b = p/S-(p-b)/S = 2/BH$ и X — середина BH. Условие $IX = r$ равносильно равенству $r : BX = IB_2 : r_b$, а поскольку $B_1B_2 = |AB-AC| = |a-c|$, его можно переписать в виде $r_b^2 - 2rr_b = (a - c)^2$.

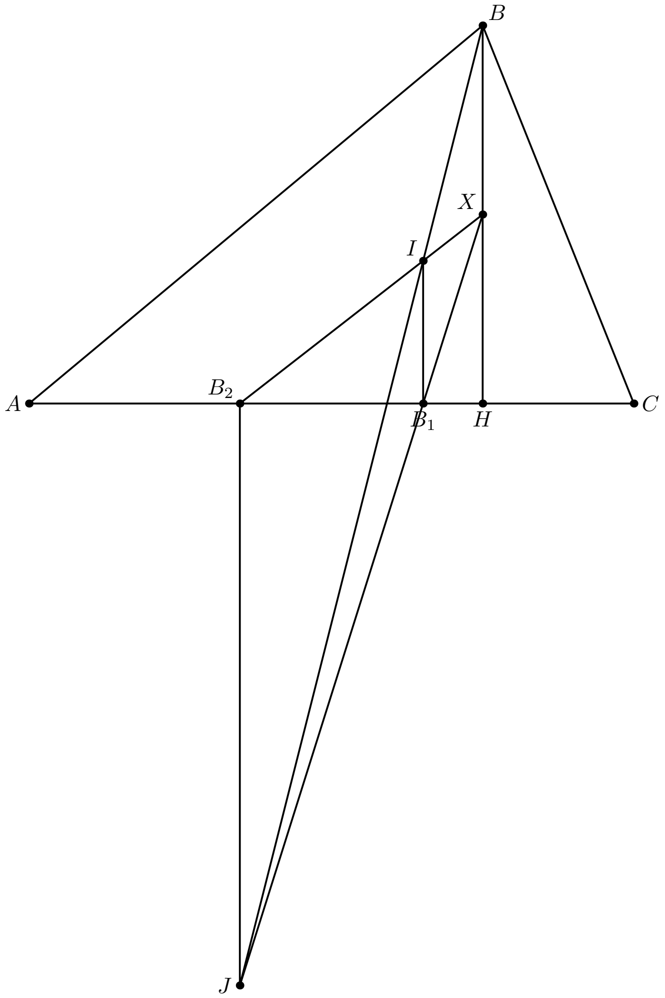

Рис. 9.6.

Осталось заметить, что $b^2 - (a - c)^2 = 4(p - a)(p - c) = 4S^2/(p(p - b)) = 4rr_b$. Таким образом, для всех трех точек условия попадания на вписанную окружность одинаковы.

7. (Д.Бродский) Точки P и Q выбираются на стороне BC треугольника ABC так, что $BP = CQ$. Отрезки AP и AQ в пересечении со вписанной в треугольник окружностью образуют четырехугольник $XYZT$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей таких четырехугольников.

   Ответ. Точка пересечения медианы из A и отрезка, соединяющего точки касания вписанной окружности со сторонами AB и AC.

   Решение. Пусть AM — медиана треугольника, B', C' — точки касания вписанной окружности со сторонами AC, AB соответственно. Точка M' пересечения диагоналей вписанного четырехугольника $XYZT$ лежит на поляре точки пересечения его противоположных сторон XY и ZT, т.е. на прямой $B'C'$. Пусть прямые AP, AQ пересекают $B'C'$ в точках P', Q' соответственно. По обобщенной теореме о бабочке $(B'C'M'P') = (C'B'M'Q')$. Поскольку $(CBMP) = (BCMQ)$, отсюда следует, что A, M, M' лежат на одной прямой (рис. 9.7).

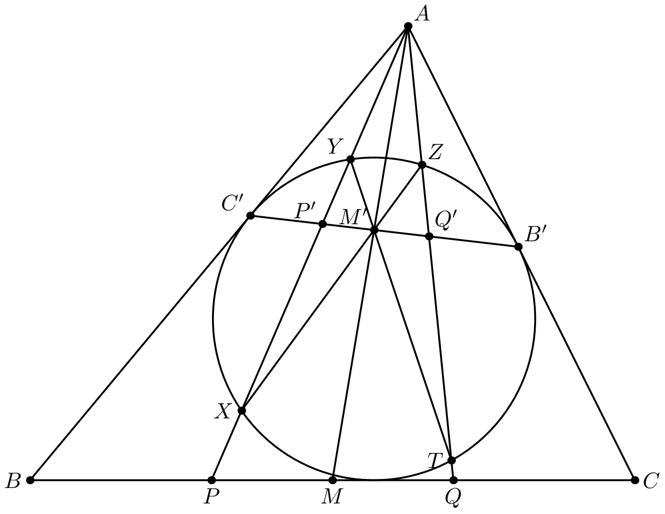

Рис. 9.7.

8. (Г.Забазнов) В треугольнике ABC точки P и Q изогонально сопряжены. Прямая PQ пересекает окружность ABC в точке X. Прямая, симметричная BC относительно PQ, пересекает прямую AX в точке E. Докажите, что точки A, P, Q, E лежат на одной окружности.

   Решение.

   Лемма. Пусть фиксированы окружность S с точкой A на ней, точка P и прямая t через P. Произвольная, проходящая через P прямая q пересекает S в двух точках X, Y. Прямые AX, AY пересекают t в точках E, F. Тогда точка Микеля четырёхугольника $FEXY$ фиксирована.

   Доказательство. Пусть W — такая точка на S, что $AW \parallel t$; PW вторично пересекает S в точке M; U, V — точки пересечения t и S (рис. 9.8.1). Тогда $\angle PMY = \smile WY/2 = (\smile UY + \smile AV)/2 = \angle UFY$, т.е. M лежит на окружности PFY. Аналогично M лежит на окружности PEX.

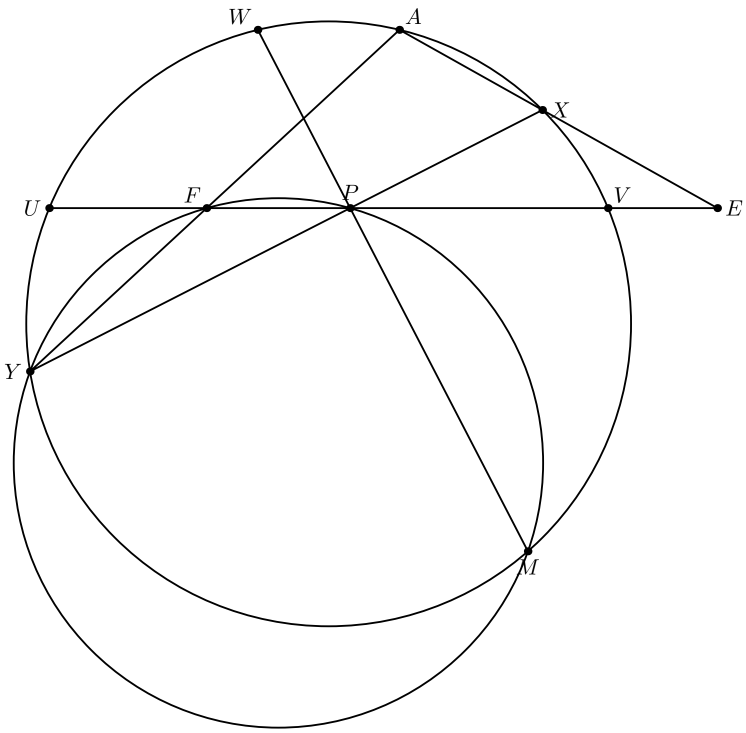

Рис. 9.8.1.

Вернемся к задаче. Пусть прямая PQ пересекает BC в точке R, а окружность ABC второй раз в точке Y. Пусть K, L, F — точки пересечения прямой RE с AB, AC, AY соответственно. По лемме точки Микеля четырёхугольников $BCLK$ и $XYFE$ совпадают, обозначим эту точку через M. Заметим, что соответствующие обоим четырёхугольникам композиции инверсии и симметрии относительно M меняют местами точки R и A. Следовательно, эти композиции совпадают.

Поскольку P и Q лежат на биссектрисе угла FRC, они изогонально сопряжены относительно четырехугольника $CBKL$, поэтому указанная композиция инверсии и симметрии меняет их местами. Осталось заметить, что эта композиция переводит прямую PQ в окружность $AMEF$ (рис. 9.8.2).

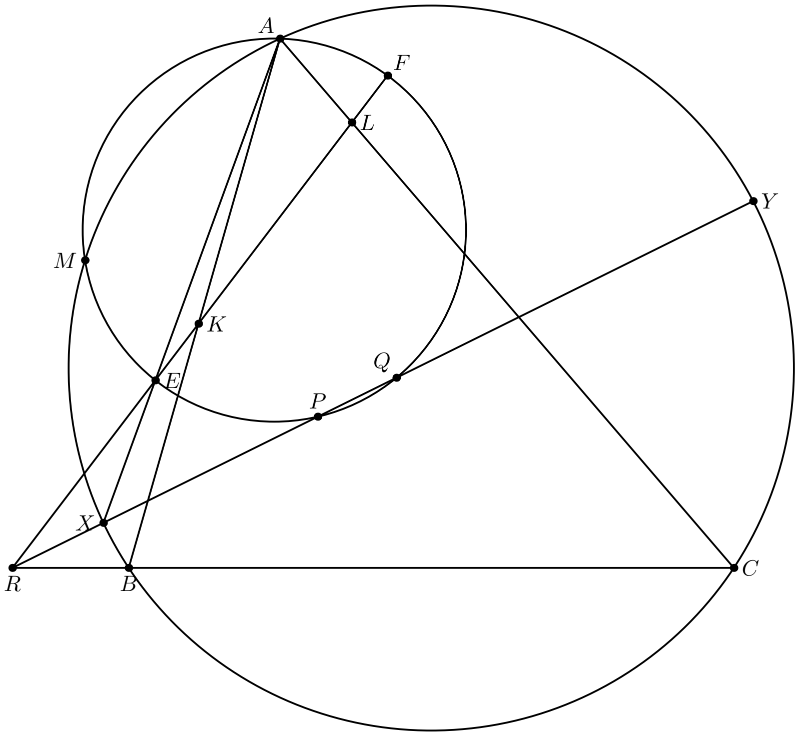

Рис. 9.8.2.

XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс. Решения

Ратмино, 31 июля 2024 г.

1. (Д.Швецов) Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Биссектриса угла ABD пересекает диагональ AC в точке E, а биссектриса угла ACD — диагональ BD в точке F. Докажите, что прямые AF и DE пересекаются на медиане треугольника APD.

   Решение. Поскольку треугольники APB и DPC подобны, то $AE : EP = AB : BP = CD : CP = DF : FP$ и утверждение задачи следует из теоремы Чевы (рис.10.1).

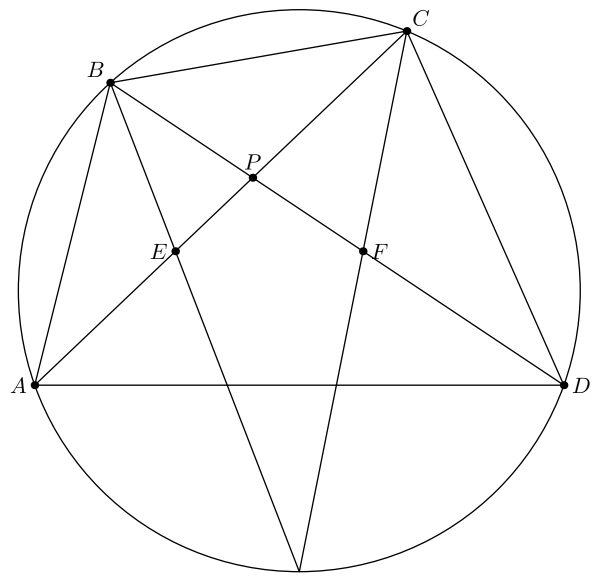

Рис. 10.1.

2. (Т.Казицына) При каком наибольшем n существует выпуклый многогранник с n гранями, обладающий следующим свойством: для любой грани найдется точка вне многогранника, из которой видны остальные $n-1$ грани?

   Ответ. При $n = 4$.

   Первое решение. Очевидно, что тетраэдр удовлетворяет условию. Предположим, что $n > 4$. Тогда найдутся три грани, не имеющие общей вершины. Многогранник лежит внутри одного из трехгранных углов, образованных плоскостями этих граней. Любой луч из вершины этого угла пересекает многогранник по отрезку. Удалив грани, содержащие ближние к вершине концы этих отрезков, получим многогранник с меньшим числом граней, содержащий исходный. Все грани этого нового многогранника должны быть видны из какой-то точки пространства — противоречие.

Второе решение. Отложим от точки O n векторов, перпендикулярных граням многогранника и направленных во внешнюю сторону. Условие задачи означает, что для каждого из этих векторов существует проходящая через O плоскость такая, что этот вектор лежит по одну сторону от нее, а остальные $n-1$ векторов по другую. Но среди n векторов найдутся четыре таких, что точка O лежит внутри тетраэдра, образованного их концами. Любой вектор, отличный от этих четырех, лежит внутри трехгранного угла, определяемого каким-то тремя из них, поэтому для него такая плоскость существовать не может.

Третье решение. Для каждой грани множество точек, из которых она видна, является полупространством. При $n > 4$ каждые четыре из таких полупространств имеют общую точку. По теореме Хелли все полупространства также имеют общую точку, что невозможно.

3. (Н.Штейнберг, Л.Финаревский) В треугольнике ABC провели биссектрисы BE и CF. Докажите, что $2EF \leq BF + CE$.

   Решение. При $AB = AC$ $BF = FE = EC$ и утверждение задачи выполнено. Пусть $AB < AC$. Тогда $BF : FA < CE : EA$, поэтому EF пересекает продолжение BC за точку B и $\angle BEF < \angle CBE$. С другой стороны, точка C лежит вне окружности BFE, значит, $\angle BEF > \angle BCF$. Поскольку $\angle BEF + \angle CFE = \angle BCF + \angle CBE$, получаем, что $|\angle BEF - \angle CFE| < \angle CBE - \angle BCF$ (рис. 10.3).

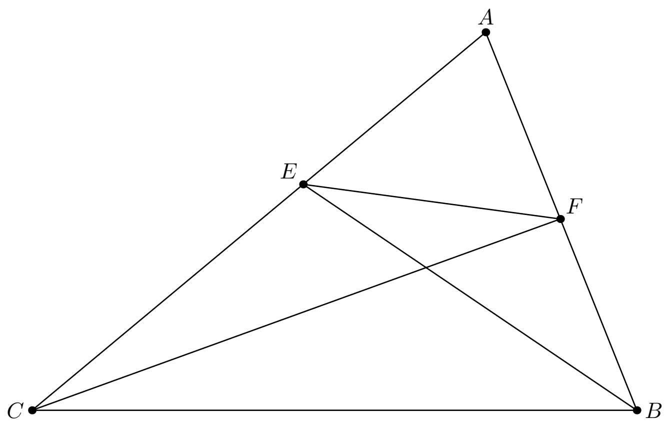

Рис. 10.3.

Применив теорему синусов к треугольникам BFE и CEF, получим

$$\frac{BF+CE}{EF}=\frac{\sin\angle BEF}{\sin\angle FBE}+\frac{\sin\angle CFE}{\sin\angle ECF}.$$

Так как произведение дробей в правой части

$$\frac{\sin\angle BEF\sin\angle CFE}{\sin\angle FBE\sin\angle ECF}=\frac{\cos(\angle BEF-\angle CFE)-\cos(\angle BEF+\angle CFE)}{\cos(\angle FBE-\angle ECF)-\cos(\angle FBE+\angle ECF)}>1,$$

их сумма больше 2.

4. (С.Кузнецов, М.Векшин) Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку A параллельно BI, CI пересекают серединный перпендикуляр к AI в точках S, T соответственно. Прямые BT и CS пересекаются в точке Y, а точка A^* такова, что $BICA^*$ параллелограмм. Докажите, что середина отрезка YA^* лежит на вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

   Первое решение. Легко видеть, что $\angle IST=\angle AST=\angle ICB$, $\angle ITS=\angle ATS=\angle IBC$. Поэтому треугольники BIC и TIS подобны, т.е. I — точка Микеля четырехсторонника $BCST$ и Y лежит на окружностях ICB, ITS. Пусть J — центр вневписанной окружности. Тогда A^* — ортоцентр треугольника JBC, а значит, середина A^*Y лежит на окружности девяти точек этого треугольника.

   Пусть B', C' — вторые точки пересечения прямых AS, AT с окружностью ITS. Тогда $\angle B'C'T=\angle TC'I=\angle B'ST=\angle TSI$, следовательно, $C'A$ — биссектриса угла $B'C'I$, равного углу ACB. Аналогично $B'A$ — биссектриса угла $C'B'I$, равного углу ABC. При этом соответствующие стороны треугольников ABC и $IB'C'$ параллельны, поскольку параллельны из биссектрисы, значит, эти треугольники симметричны относительно середины AI. Тогда $AB'CA^*$, $AC'BA^*$ — параллелограммы и при гомотетии с центром A^* и коэффициентом $1/2$ окружность ITS перейдет в окружность девяти точек треугольника ABC.

   Таким образом середина A^*Y является пересечением окружностей девяти точек треугольников ABC и JBC. Через эту точку проходит и педальная окружность точки J относительно треугольника ABC — вневписанная окружность (рис.10.4).

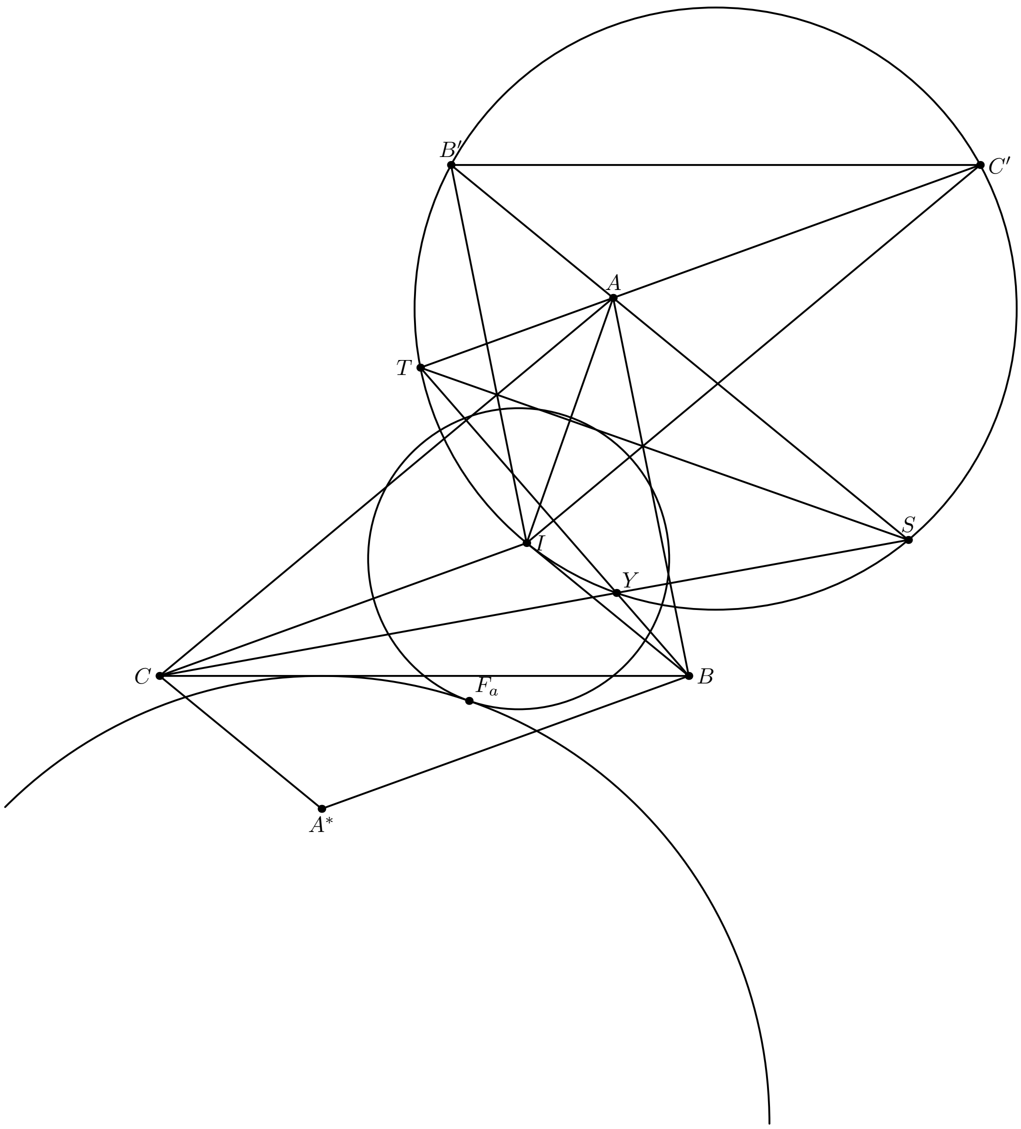

Рис. 10.4.

Примечание. Из решения следует, что середина A^*Y является точкой Фейербаха F_a.

Второе решение. Пусть ST пересекает BC в точке P. При инверсии+симметрии с центром A, меняющей B и C местами, точка I переходит в J, а точка P — в такую точку P' на описанной окружности, что равнобедренные треугольники API и AJP' подобны. Пусть вневписанная окружность касается BC в точке D. Так как треугольник из внешних биссектрис подобен треугольнику BCJ, а точки A и D в них соответствующие, то существует такая точка P'' на окружности Эйлера треугольника BCJ, что равнобедренные треугольники AJP' и DJP'' подобны. Пусть M — середина BC и $\alpha = \angle API = \angle DJP''$. Нетрудно видеть, что дуга MP'' окружности Эйлера треугольника BCJ и дуга IY

окружности BCJ равны α, поэтому гомотетия с центром A^* и коэффициентом 2 переводит M в I, а P'' в Y.

Третье решение. Переобозначим A^* через Z. Штрихом будем обозначать образы при симметрии относительно AI. Пусть M — середина BC, а вписанная и вневписанная окружности касаются BC в точках P и Q. Мы докажем, что середина $Y'Z'$ — вторая точка пересечения $M'Q$ со вневписанной. Заметим, что S' и T' — середины дуг AC и AB описанной окружности. Треугольники $S'IC'$ и $T'IB'$ подобны — углы при I равны, и $IS'/IC' = IS'/IC = IT'/IB = IT'/IB'$. Значит, они поворотно гомотетичны, а тогда Y' — вторая точка пересечения окружностей BIC и $S'IT'$. Пусть K — точка, симметричная I относительно серединного перпендикуляра к BC (она тоже лежит на окружности $BB'CC'IY'$), а F — радикальный центр окружностей ABC, BIC, $S'IT'$. Тогда, поскольку $MI \parallel AQ$, имеем $MM' : MQ = 2IP : IA = BC : S'T' = \sin BFI : \sin S'FI = \sin Y'IK : \sin Y'KI = Y'K : Y'I$. Поскольку $\angle QMM' = \angle KY'I$, получаем, что треугольники QMM' и $IY'K$ подобны. В частности, прямые IY' и $M'Q$ параллельны, и первая получается из второй гомотетией из Z с коэффициентом 2. Пусть при этой гомотетии Q переходит в X. Тогда $\angle KXI = \angle MM'Q = \angle Y'KI$, откуда $IY' \cdot IX = IK^2 = 4M'Q'^2$. Значит, $M'Q'^2 = IX \cdot IY'/4 = M'Q \cdot (IY'/2)$. Значит, $M'Q$ вторично пересекает вневписанную в точке, лежащей на расстоянии $IY'/2$ от M', то есть в середине ZY'.

XX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2024 г.

5. (М.Васильев) В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся гипотенузы AB в точке T. Квадраты $ATMP$ и $BTNQ$ лежат вне треугольника. Докажите, что площади треугольников ABC и TPQ равны.

   Решение. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AT = p - a$, $BT = p - b$. Тогда радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $p - c$, а его площадь

$$S = p(p-c) = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} = (p-a)(p-b).$$

   Поскольку треугольник PTQ — прямоугольный с катетами $PT = \sqrt{2}(p-a)$, $TQ = \sqrt{2}(p-b)$, его площадь тоже равна $(p-a)(p-b)$.

6. (А.Заславский) На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдется такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.

   Решение. Пусть P лежит на медиане из вершины B. Тогда AC касается окружности PB, а значит, и окружности APB, потому что медиана является их радикальной осью. С другой стороны, окружность APB касается стороны BC (рис.10.6), следовательно, $AC = BC$ и точка Q, симметричная P относительно оси симметрии треугольника удовлетворяет условию.

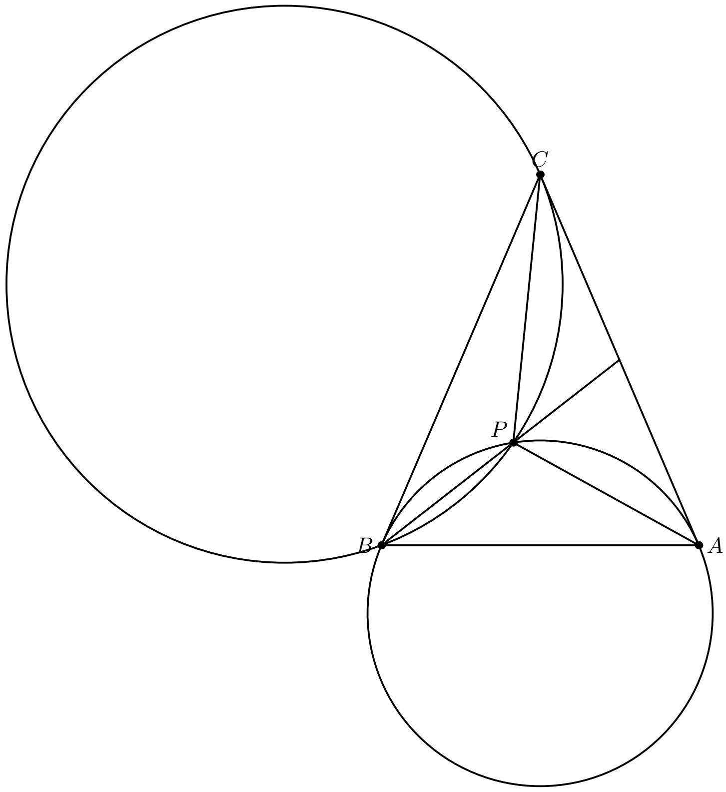

Рис. 10.6.

Примечание. Утверждение задачи можно переформулировать: если точка Брокара лежит на медиане (симедиане), то треугольник равнобедренный и эта точка является также точкой Шалтая и Болтая.

7. (К.Бельский) В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$; AD, BE и CF — биссектрисы; P, Q — проекции A на EF и BC; R — вторая точка пересечения окружности DEF с прямой AD. Докажите, что P, Q, R лежат на одной прямой.

   Решение. Известно, что окружность, проходящая через основания биссектрис, походит через точку Фейербаха. Кроме того, поскольку $\angle A = 60^\circ$, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника симметричны относительно биссектрисы угла A. Поэтому центр окружности девяти точек, а значит, и точка Фейербаха лежат на прямой AD, т.е. точка Фейербаха совпадает с точкой R. При этом, если I, r — центр и радиус вписанной окружности, то $AI = 2r = 2IR$. Таким образом, задача сводится к доказательству того, что прямая PQ делит отрезок AI пополам. Докажем, что это верно для произвольного треугольника.

   Пусть прямая EF пересекает AD в точке S, а BC — в точке T. Так как четверка A, I, S, D — гармоническая, точки S и D инверсны относительно окружности с диаметром AI. С другой стороны, T — основание внешней биссектрисы угла A, поэтому AQ и AP — высоты прямоугольных треугольников DAT и SAT. Следовательно, $TS \cdot TP = TD \cdot TQ = TA^2$ и инверсия относительно окружности с центром T и радиусом TA меняет местами S и P, T и Q. Поскольку эта окружность перпендикулярна окружности с диаметром AI, точки P, Q инверсны относительно последней окружности, т.е. PQ проходит через ее центр R (рис. 10.7).

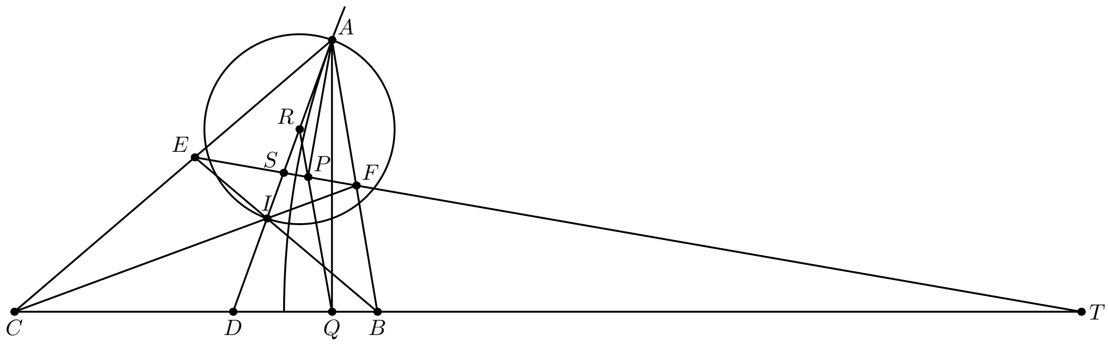

Рис. 10.7.

8. (Г.Галяпин) Общие касательные к описанной и вневписанной окружностям треугольника ABC пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Треугольник Δ_1 образован прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, а треугольник Δ_2 — прямыми AA_2, BB_2 и CC_2. Докажите, что радиусы описанных окружностей этих треугольников равны.

Решение.

Лемма. Пусть J — центр вневписанной окружности, P — точка касания прямой $A_1B_1C_1$ с описанной окружностью. Тогда точки C, J, C_1, P лежат на одной окружности.

Доказательство. Пусть W — вторая точка пересечения прямой CJ с описанной окружностью. Тогда $UW \parallel C_1J$ и $\angle(PC, CJ) = \angle(PC_1, C_1J)$ (рис.10.8).

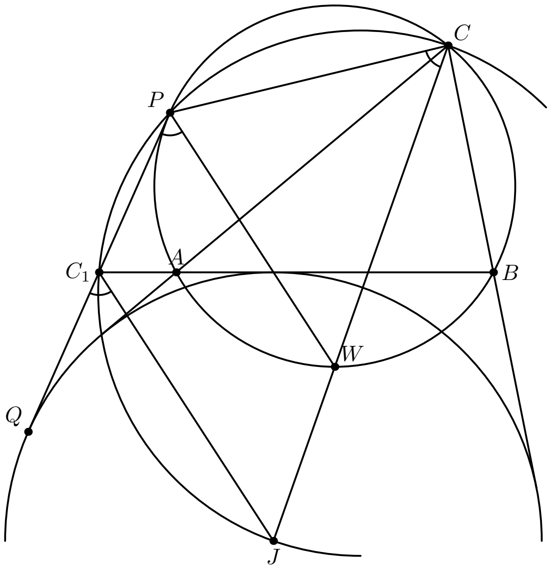

Рис. 10.8.

Утверждение леммы можно переформулировать следующим образом: AA_1, AA_2 — изогонали в угле BAC, причем $2\varphi = 2\angle(A_2A, AA_1) = \angle(JP, PQ)$, где P,Q — точки касания описанной и вневписанной окружности с общей касательной. Аналогичные равенства верны и для точек B, C.

Поскольку $\angle(A_2A, AA_1) = \angle(B_2B, BB_1) = \angle(C_2C, CC_1)$, то $\angle(B_2B, C_2C) = \angle(BB_1, CC_1)$. Следовательно, B, C, J, $A_3 = BB_1 \cap CC_1$ и $A_4 = BB_2 \cap CC_2$ лежат на одной окружности, причем J — середина дуги A_3A_4 и $\angle(A_4J, JA_3) = 2\varphi$. Аналогичные равенства верны для других пар вершин треугольников Δ_1, Δ_2, поэтому поворот с центром J на угол 2φ переводит один из треугольников в другой, что, очевидно, влечет утверждение задачи.