Двадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Даны окружность ω с центром O и точка P внутри нее. Пусть X — произвольная точка ω, прямая XP и окружность XOP пересекают ω во второй раз в точках X_1, X_2 соответственно. Докажите, что все прямые X_1X_2 параллельны друг другу.

8.2. В остроугольном треугольнике ABC CM — медиана, P — проекция ортоцентра H на биссектрису угла C. Докажите, что MP делит отрезок CH пополам.

8.3. В остроугольном треугольнике ABC D — основание высоты из вершины A, A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная A. На отрезке AD выбрана точка P, а на отрезках AB и AC точки X и Y так, что $\angle CBP = \angle ADY$, $\angle BCP = \angle ADX$. Пусть PA' пересекает BC в точке T. Докажите, что D, X, Y, T лежат на одной окружности.

8.4. Из бумаги вырезан квадрат, сторона которого равна 1. Сделав не больше 20 сгибов, постройте отрезок длины $1/2024$. Никаких инструментов нет, можно только сгибать бумагу и отмечать точки пересечения линий сгиба.

Двадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Даны окружность ω с центром O и точка P внутри нее. Пусть X — произвольная точка ω, прямая XP и окружность XOP пересекают ω во второй раз в точках X_1, X_2 соответственно. Докажите, что все прямые X_1X_2 параллельны друг другу.

8.2. В остроугольном треугольнике ABC CM — медиана, P — проекция ортоцентра H на биссектрису угла C. Докажите, что MP делит отрезок CH пополам.

8.3. В остроугольном треугольнике ABC D — основание высоты из вершины A, A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная A. На отрезке AD выбрана точка P, а на отрезках AB и AC точки X и Y так, что $\angle CBP = \angle ADY$, $\angle BCP = \angle ADX$. Пусть PA' пересекает BC в точке T. Докажите, что D, X, Y, T лежат на одной окружности.

8.4. Из бумаги вырезан квадрат, сторона которого равна 1. Сделав не больше 20 сгибов, постройте отрезок длины $1/2024$. Никаких инструментов нет, можно только сгибать бумагу и отмечать точки пересечения линий сгиба.

Двадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. В остроугольном треугольнике ABC H — ортоцентр; A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности с BC, CA, AB соответственно; E_A, E_B, E_C — середины AH, BH, CH соответственно; окружность с центром E_A, проходящая через A, повторно пересекает биссектрису угла A в точке A_2; точки B_2, C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

9.2. Даны 4 точки на плоскости A, B, C, D, не образующие прямоугольник. Пусть стороны треугольника T равны $AB+CD$, $AC+BD$, $AD+BC$. Докажите, что T — остроугольный.

9.3. Пусть (P, P') и (Q, Q') — две пары точек, изогонально сопряженных относительно треугольника ABC, R — точка пересечения прямых PQ и $P'Q'$. Докажите, что педальные окружности точек P, Q и R соосны.

9.4. Для каких $n > 0$ можно отметить на плоскости несколько различных точек и несколько различных окружностей так, чтобы были выполнены следующие условия:
— через каждую отмеченную точку проходит ровно n отмеченных окружностей;
— на каждой отмеченной окружности лежит ровно n отмеченных точек;
— у каждой отмеченной окружности отмечен ее центр?

Двадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. В остроугольном треугольнике ABC H — ортоцентр; A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности с BC, CA, AB соответственно; E_A, E_B, E_C — середины AH, BH, CH соответственно; окружность с центром E_A, проходящая через A, повторно пересекает биссектрису угла A в точке A_2; точки B_2, C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

9.2. Даны 4 точки на плоскости A, B, C, D, не образующие прямоугольник. Пусть стороны треугольника T равны $AB+CD$, $AC+BD$, $AD+BC$. Докажите, что T — остроугольный.

9.3. Пусть (P, P') и (Q, Q') — две пары точек, изогонально сопряженных относительно треугольника ABC, R — точка пересечения прямых PQ и $P'Q'$. Докажите, что педальные окружности точек P, Q и R соосны.

9.4. Для каких $n > 0$ можно отметить на плоскости несколько различных точек и несколько различных окружностей так, чтобы были выполнены следующие условия:
— через каждую отмеченную точку проходит ровно n отмеченных окружностей;
— на каждой отмеченной окружности лежит ровно n отмеченных точек;
— у каждой отмеченной окружности отмечен ее центр?

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Биссектриса угла ABD пересекает диагональ AC в точке E, а биссектриса угла ACD — диагональ BD в точке F. Докажите, что прямые AF и DE пересекаются на медиане треугольника APD.

10.2. При каком наибольшем n существует выпуклый многогранник с n гранями, обладающий следующим свойством: для любой грани найдется точка вне многогранника, из которой видны остальные $n-1$ грани?

10.3. В треугольнике ABC провели биссектрисы BE и CF. Докажите, что $2EF \leq BF + CE$.

10.4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку A параллельно BI, CI пересекают серединный перпендикуляр к AI в точках S, T соответственно. Прямые BT и CS пересекаются в точке Y, а точка A^* такова, что $BICA^*$ параллелограмм. Докажите, что середина отрезка YA^* лежит на вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Биссектриса угла ABD пересекает диагональ AC в точке E, а биссектриса угла ACD — диагональ BD в точке F. Докажите, что прямые AF и DE пересекаются на медиане треугольника APD.

10.2. При каком наибольшем n существует выпуклый многогранник с n гранями, обладающий следующим свойством: для любой грани найдется точка вне многогранника, из которой видны остальные $n-1$ грани?

10.3. В треугольнике ABC провели биссектрисы BE и CF. Докажите, что $2EF \leq BF + CE$.

10.4. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые, проходящие через точку A параллельно BI, CI пересекают серединный перпендикуляр к AI в точках S, T соответственно. Прямые BT и CS пересекаются в точке Y, а точка A^* такова, что $BICA^*$ параллелограмм. Докажите, что середина отрезка YA^* лежит на вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. Вершины M, N, K прямоугольника $KLMN$ лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно правильного треугольника ABC так, что $AM = 2$, $KC = 1$, а вершина L лежит вне треугольника. Найдите угол KMN.

8.6. Окружность ω касается прямых a и b в точках A и B соответственно. Произвольная касательная к ω пересекает a и b в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно A и B соответственно. Найдите геометрическое место проекций центра окружности на $X'Y'$.

8.7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $l \parallel AC$ пересекает прямые AD, BC, AB, CD в точках X, Y, Z, T. Описанные окружности треугольников XYB и ZTB вторично пересекаются в точке R. Докажите, что R лежит на прямой BD.

8.8. Из картона вырезали два многоугольника. Может ли быть, что при любом их расположении на плоскости они либо имеют общие внутренние точки, либо пересекаются по конечному множеству точек?

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. Вершины M, N, K прямоугольника $KLMN$ лежат на сторонах AB, BC, CA соответственно правильного треугольника ABC так, что $AM = 2$, $KC = 1$, а вершина L лежит вне треугольника. Найдите угол KMN.

8.6. Окружность ω касается прямых a и b в точках A и B соответственно. Произвольная касательная к ω пересекает a и b в точках X и Y соответственно. Точки X' и Y' симметричны точкам X и Y относительно A и B соответственно. Найдите геометрическое место проекций центра окружности на $X'Y'$.

8.7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямая $l \parallel AC$ пересекает прямые AD, BC, AB, CD в точках X, Y, Z, T. Описанные окружности треугольников XYB и ZTB вторично пересекаются в точке R. Докажите, что R лежит на прямой BD.

8.8. Из картона вырезали два многоугольника. Может ли быть, что при любом их расположении на плоскости они либо имеют общие внутренние точки, либо пересекаются по конечному множеству точек?

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. В равнобедренном треугольнике ABC $(AC = BC)$ O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, P — такая точка внутри треугольника, что $\angle APH = \angle BPO = \pi/2$. Докажите, что $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$.

9.6. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Вневписанная окружность с центром J касается стороны AC в точке B_2 и продолжений сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. Пусть прямые IB_2 и JB_1 пересекаются в точке X, прямые IC_2 и JC_1 — в точке Y, прямые IA_2 и JA_1 — в точке Z. Докажите, что если одна из точек X, Y, Z лежит на вписанной окружности, то и две другие тоже.

9.7. Точки P и Q выбираются на стороне BC треугольника ABC так, что $BP = CQ$. Отрезки AP и AQ в пересечении со вписанной в треугольник окружностью образуют четырехугольник $XYZT$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей таких четырехугольников.

9.8. В треугольнике ABC точки P и Q изогонально сопряжены. Прямая PQ пересекает окружность ABC в точке X. Прямая, симметричная BC относительно PQ, пересекает прямую AX в точке E. Докажите, что точки A, P, Q, E лежат на одной окружности.

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. В равнобедренном треугольнике ABC $(AC = BC)$ O — центр описанной окружности, H — ортоцентр, P — такая точка внутри треугольника, что $\angle APH = \angle BPO = \pi/2$. Докажите, что $\angle PAC = \angle PBA = \angle PCB$.

9.6. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром I касается его сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Вневписанная окружность с центром J касается стороны AC в точке B_2 и продолжений сторон AB и BC в точках C_2 и A_2 соответственно. Пусть прямые IB_2 и JB_1 пересекаются в точке X, прямые IC_2 и JC_1 — в точке Y, прямые IA_2 и JA_1 — в точке Z. Докажите, что если одна из точек X, Y, Z лежит на вписанной окружности, то и две другие тоже.

9.7. Точки P и Q выбираются на стороне BC треугольника ABC так, что $BP = CQ$. Отрезки AP и AQ в пересечении со вписанной в треугольник окружностью образуют четырехугольник $XYZT$. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей таких четырехугольников.

9.8. В треугольнике ABC точки P и Q изогонально сопряжены. Прямая PQ пересекает окружность ABC в точке X. Прямая, симметричная BC относительно PQ, пересекает прямую AX в точке E. Докажите, что точки A, P, Q, E лежат на одной окружности.

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся гипотенузы AB в точке T. Квадраты $ATMP$ и $BTNQ$ лежат вне треугольника. Докажите, что площади треугольников ABC и TPQ равны.

10.6. На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдется такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.

10.7. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$; AD, BE и CF — биссектрисы; P, Q — проекции A на EF и BC; R — вторая точка пересечения окружности DEF с прямой AD. Докажите, что P, Q, R лежат на одной прямой.

10.8. Общие касательные к описанной и вневписанной окружностям треугольника ABC пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Треугольник Δ_1 образован прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, а треугольник Δ_2 — прямыми AA_2, BB_2 и CC_2. Докажите, что радиусы описанных окружностей этих треугольников равны.

Двадцатая Всероссийская олимпиада
по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2024 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В прямоугольный треугольник ABC вписана окружность, касающаяся гипотенузы AB в точке T. Квадраты $ATMP$ и $BTNQ$ лежат вне треугольника. Докажите, что площади треугольников ABC и TPQ равны.

10.6. На одной из медиан треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$. Докажите, что на другой медиане найдется такая точка Q, что $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC$.

10.7. В треугольнике ABC $\angle A = 60^\circ$; AD, BE и CF — биссектрисы; P, Q — проекции A на EF и BC; R — вторая точка пересечения окружности DEF с прямой AD. Докажите, что P, Q, R лежат на одной прямой.

10.8. Общие касательные к описанной и вневписанной окружностям треугольника ABC пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 и A_2, B_2, C_2 соответственно. Треугольник Δ_1 образован прямыми AA_1, BB_1 и CC_1, а треугольник Δ_2 — прямыми AA_2, BB_2 и CC_2. Докажите, что радиусы описанных окружностей этих треугольников равны.