Девятнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Заочный тур. Решения

1. (А.Марданов) (8) Пусть L — середина меньшей дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины B на касательную к описанной окружности, проведённую в точке L, опустили перпендикуляр BP. Докажите, что точки P, L и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

   Решение. Пусть M, N и K — середины сторон AB, BC и AC; H — основание высоты, проведённой из вершины B. Тогда H является точкой пересечения BP и AC. Ясно, что $MN \parallel AC \parallel PL$, значит, $MPLN$ — трапеция. Известно, что $MHKN$ — равнобокая трапеция, поэтому $\angle MHP = \angle NKL$, $MH = KN$. Также понятно, что $PH = KL$. Значит, равны и треугольники MHP и NKL, то есть $MPLN$ — равнобокая трапеция (рис.1), а тогда точки P, L и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

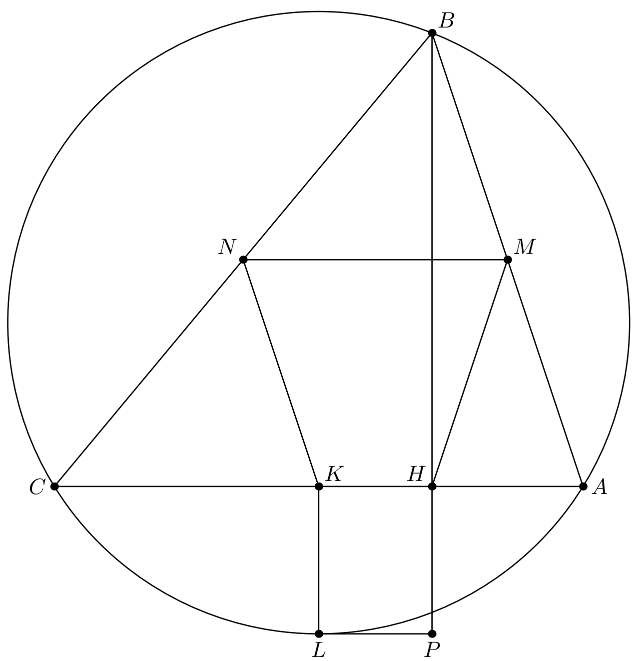

Рис. 1.

2. (Н.Москвитин) (8) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Окружность с центром в точке E лежит внутри прямоугольника. Из вершин C, D, A проведены касательные к окружности CF, DG, AH, причем CF пересекает DG в точке I, EI пересекает AD в точке J, а прямые AH и CF пересекаются в точке L. Докажите, что отрезок LJ перпендикулярен AD.

   Решение. Поскольку прямые DG и AH симметричны относительно серединного перпендикуляра к AD, а прямые AH и CF относительно серединного перпендикуляра к AC, то $\angle CID = 2\angle EAD = \angle CED$, т.е. точки C, D, I, E лежат на одной окружности. Поэтому $\angle AEI = \angle CDI$, а так как $\angle AEL = \angle ADC = 90°$, то $\angle JEL = \angle IDA = \angle JAL$. Следовательно, точки A, J, E, L лежат на одной окружности и $\angle AJL = 90°$ (рис.2).

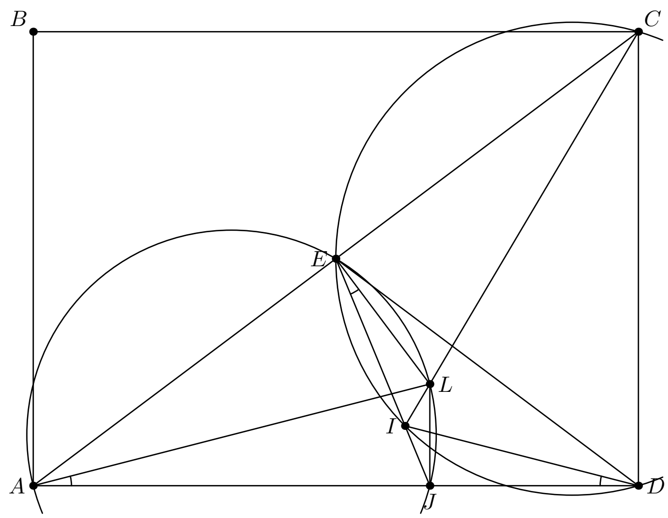

Рис. 2.

3. (Д.Мухин) (8) Окружность касается боковых сторон трапеции $ABCD$ в точках B и C, а её центр лежит на AD. Докажите, что диаметр окружности меньше средней линии трапеции.

Решение. Пусть O — центр окружности; EF — её диаметр, лежащий на прямой AD; G, H — проекции B и C на AD. Так как дуги BE и CF равны, то $\angle ABG = \angle DCH$, т.е. $AG = DH$ и трапеция равнобокая. Следовательно, ее средняя линия равна $AH = EH + AE = EH + OA - OB$. Но из подобия треугольников OAB и OBG получаем, что $OA - OB > OB - OG = GE = HF$, значит $AH > EH + HF = EF$ (рис.3).

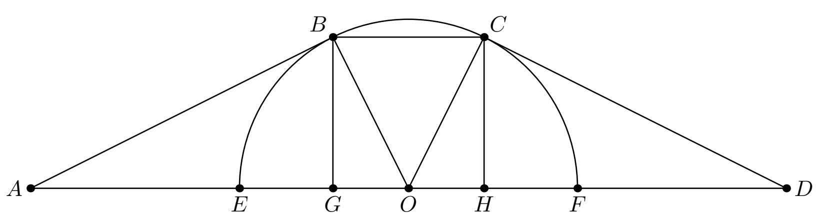

Рис. 3.

4. (Ф.Ивлев, А.Марданов) (8) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle BED = 3\angle BDE$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой AC. Докажите, что прямая $D'E$ проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

Решение. Пусть биссектрисы AL и CH пересекаются в точке I. Так как $\angle BLA = \angle BAL + \angle ACL = 3\angle BAL$, то $DE \parallel AL$. Кроме того, $AD' \parallel BL$. При этом $LE : AD' = LE : AD = BL : BA = IL : IA$, следовательно, прямая ED' проходит через I (рис.4).

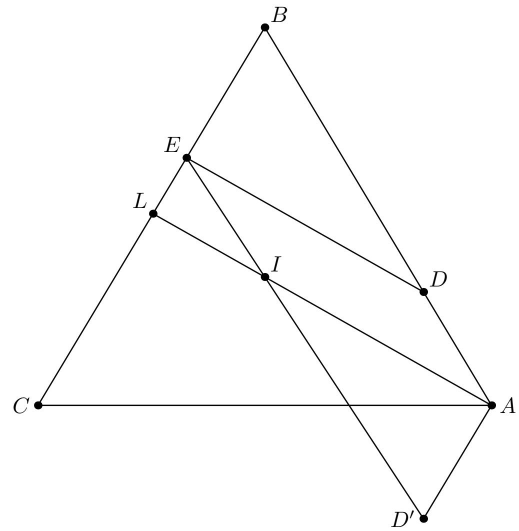

Рис. 4.

5. (И.Кухарчук) (8) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На сторонах AD и CD взяты точки E и F так, что $AE = BC$ и $AB = CF$. Пусть M — середина EF. Докажите, что угол AMC прямой.

Первое решение. В пятиугольнике $ABCFE$ $\angle A + \angle C = 180°$, значит, $\angle B + \angle E + \angle F = 360°$. Отложим от произвольной точки U отрезки $UX = AB = CF$, $UY = BC = AE$, $UZ = ME = MF$ так, что $\angle XUY = \angle B$, $\angle YUZ = \angle E$, $\angle ZUX = \angle F$. Тогда треугольники UXY, UYZ, UZX и XYZ равны соответственно треугольникам BAC, EMA, FMC и ACM, следовательно, $\angle AMC = \angle AME + \angle CMF = 90°$ (рис.5).

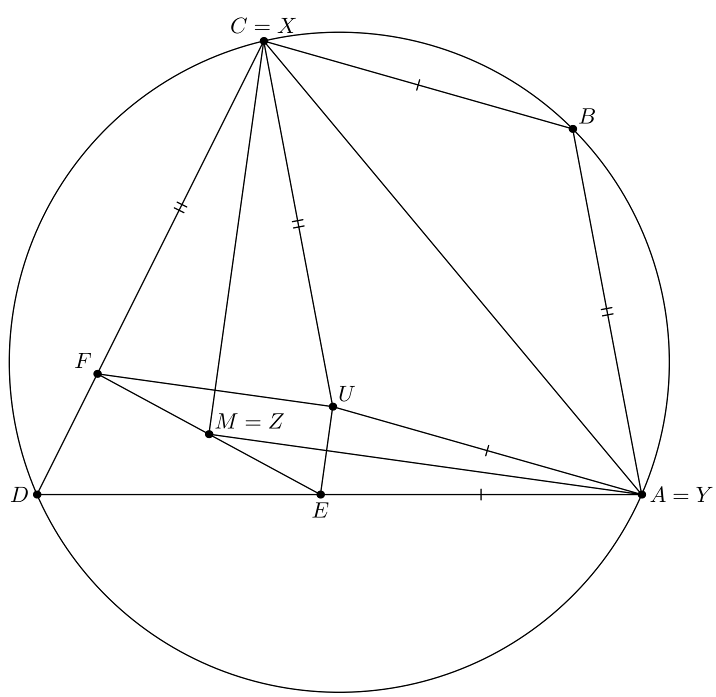

Рис. 5.

Второе решение. Построим параллелограмм $ABCU$. Точки E, F симметричны U относительно биссектрис углов BAD, BCD соответственно. Поскольку $\angle AUC +$

$\angle ADC = 180^\circ$, эти биссектрисы перпендикулярны. Следовательно, треугольник UEF прямоугольный, а биссектрисы пересекаются в центре описанной около него окружности — точке M.

6. (Д.Швецов) (8–9) Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается сторон A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 в точках C_2, B_2, A_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC.

   Решение. Высоты треугольника ABC являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$, которые перпендикулярны сторонам треугольника $A_2B_2C_2$, поэтому треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ гомотетичны (рис.6). Центр гомотетии лежит на прямой, соединяющей центры описанных окружностей треугольников, т.е. прямой Эйлера треугольника ABC.

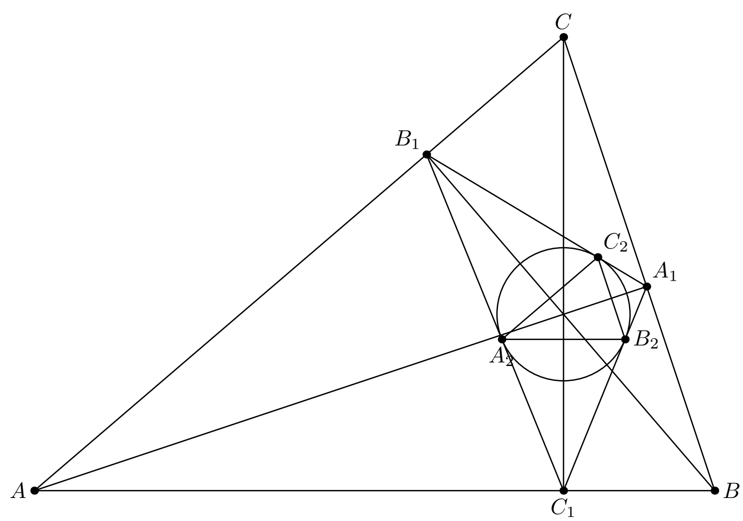

Рис. 6.

7. (Д.Демин, И.Кухарчук) (8–9) На окружности ω зафиксирована точка A. Хорды BC окружности ω выбираются так, что проходят через фиксированную точку P. Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC касаются фиксированной окружности, не зависящей от выбора BC.

   Решение. Геометрическим местом середин хорд BC является окружность с диаметром OP, где O — центр ω. Поэтому геометрическим местом центров тяжести треугольников ABC будет образ этой окружности при гомотетии с центром A и коэффициентом $2/3$. Применив к этой окружности гомотетию с центром O и коэффициентом $3/2$, получим, что геометрическим местом центров окружностей 9 точек тоже будет некоторая окружность. А поскольку радиусы всех окружностей 9 точек равны, то они касаются двух фиксированных окружностей.

8. (Г.Филипповский) (8–9) В треугольнике ABC ($a > b > c$) указаны инцентр I, а также точки K и N касания вписанной окружности со сторонами BC и AC соответственно. Проведя не более трёх линий одной линейкой, постройте отрезок длины $a - c$.

   Решение. Известно, что точка T пересечения прямой KN и биссектрисы BI является проекцией точки A на BI. Поэтому, если AT пересекает BC в точке P, то высота

BT треугольника BPT совпадает с его биссектрисой. Следовательно, $BP = AB$ и CP — искомый отрезок (рис.8).

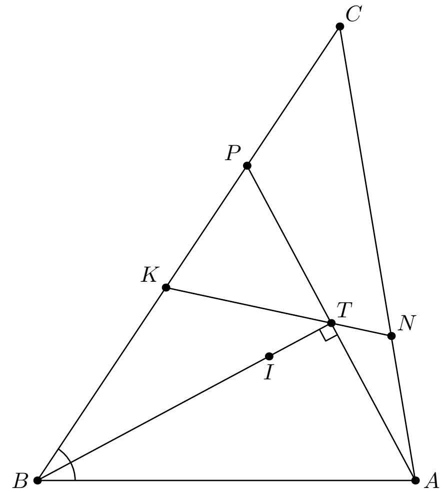

Рис. 8.

9. (С.Губанов) (8–9) Про треугольник ABC известно, что точка, симметричная ортоцентру относительно центра описанной окружности, лежит на стороне BC. Пусть A_1 — основание высоты, проведенной из точки A. Докажите, что A_1 лежит на окружности, проходящей через середины трёх высот треугольника ABC.

   Решение. Расстояние от центра описанной окружности до стороны BC равно половине отрезка AH, где H — ортоцентр. С другой стороны, из условия задачи следует, что это расстояние равно половине отрезка HA_1. Следовательно, H — середина AA_1. Пусть A_0 — середина BC. Так как середины X, Y высот BB_1, CC_1 лежат на средних линиях треугольника, углы A_0XH и A_0YH прямые, т.е. точки X и Y лежат на окружности с диаметром A_0H. Очевидно, что A_1 тоже лежит на этой окружности (рис.9).

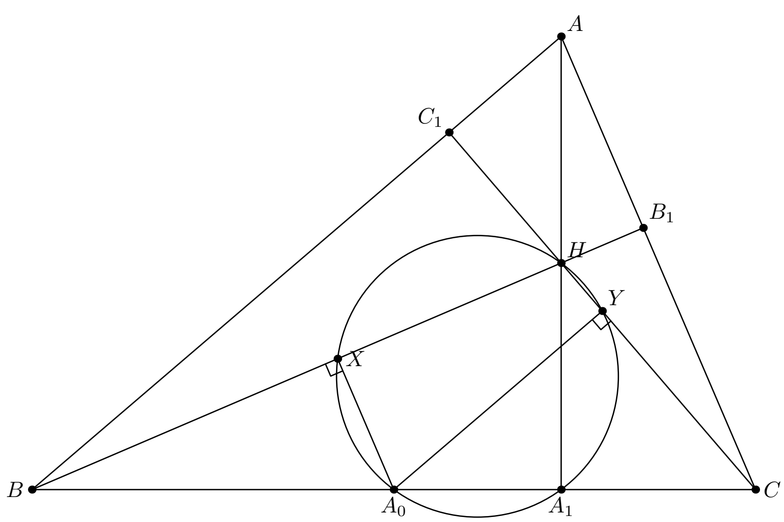

Рис. 9.

10. (Г.Забазнов) (8–9) Высоты BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Перпендикуляр из H к прямой EF пересекает прямую ℓ, проходящую через точку A и параллельную BC, в точке P. Биссектрисы углов, образованных прямыми ℓ и HP, пересекают прямую BC в точках S и T. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PST касаются.

Решение. Пусть PH пересекает BC в точке M. Из равенств $\angle MPT = \angle APT = \angle MTP$ следует, что $MT = MP$. Аналогично $MS = MP$, т.е. M —центр описанной окружности треугольника PST. Кроме того, так как $AO \perp EF$, то $AO \parallel MP$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как точка H', симметричная H относительно BC, лежит на описанной окружности треугольника ABC, то равнобедренные треугольники HMH' и AOH' подобны, значит, M лежит на отрезке OH', а прямые OM и MP образуют равные углы с BC. Тогда точка пересечения прямой OM с ℓ лежит на обеих окружностях ABC и PST, которые в этой точке касаются (рис.10).

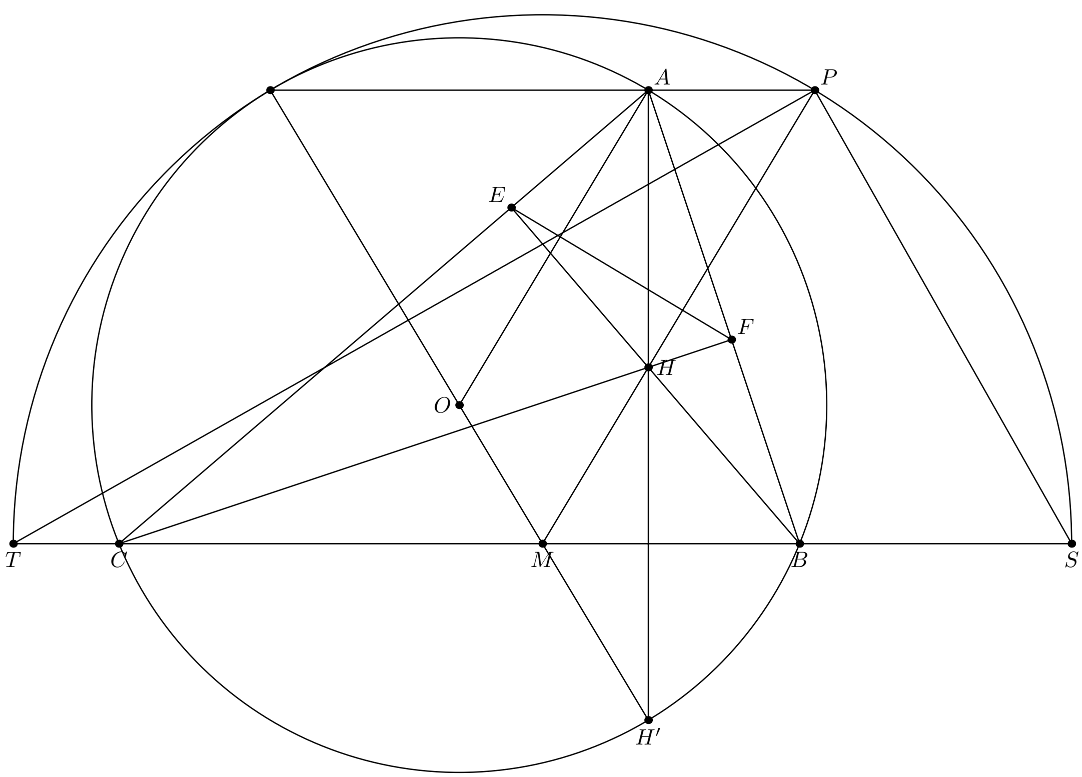

Рис. 10.

11. (М.Курский) (8–10) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; E, F — такие точки на сторонах AB, AC соответственно, что $AEHF$ — параллелограмм; X, Y — точки пересечения прямой EF с описанной окружностью ω треугольника ABC; Z — точка ω, диаметрально противоположная A. Докажите, что H — ортоцентр треугольника XYZ.

Решение. Из условия следует, что $\angle BHE = \angle CHF = \pi/2$, следовательно, треугольники BHE и CHF подобны и $AF : EB = EH : EB = HF : FC = AE : EC$. Поэтому $AE \cdot EB = AF \cdot FC$, т.е. степени точек E и F относительно описанной окружности равны и середина D отрезка AH является также серединой XY. Поэтому средняя линия OD треугольника AHZ перпендикулярна XY. Значит, ZH — высота треугольника XYZ, а поскольку точка A, симметричная H относительно середины XY, лежит на описанной окружности, то H — ортоцентр (рис.11).

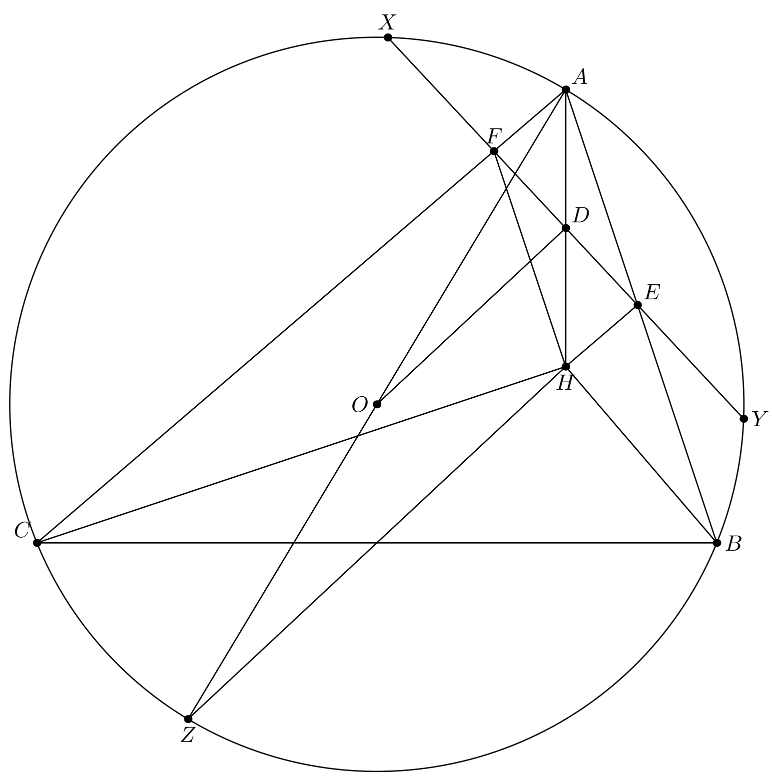

Рис. 11.

12. В треугольнике ABC с тупым углом B отмечены такие точки P и Q на AC, что $AP = PB$, $BQ = QC$. Окружность BPQ пересекает стороны AB и BC в точках N и M соответственно.

    а) (П.Рябов, 8–9) Докажите, что точка R пересечения PM и NQ равноудалена от A и C.

    б) (А.Заславский, 10–11) Пусть BR пересекает AC в точке S. Докажите, что $MN \perp OS$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

    Решение. а) Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Тогда $OP \perp AB$ и $OQ \perp BC$. Кроме того, $\angle NQA = \angle NBP = \angle A$ и аналогично $\angle MPC = \angle C$. Поэтому $\angle PRQ + \angle POQ = \pi$ и четырехугольник $OPRQ$ — вписанный. Следовательно, $\angle PRO = \angle PQO = \pi/2 - \angle C$, т.е. диагонали четырехугольника перпендикулярны и $AR = AC$ (рис.12).

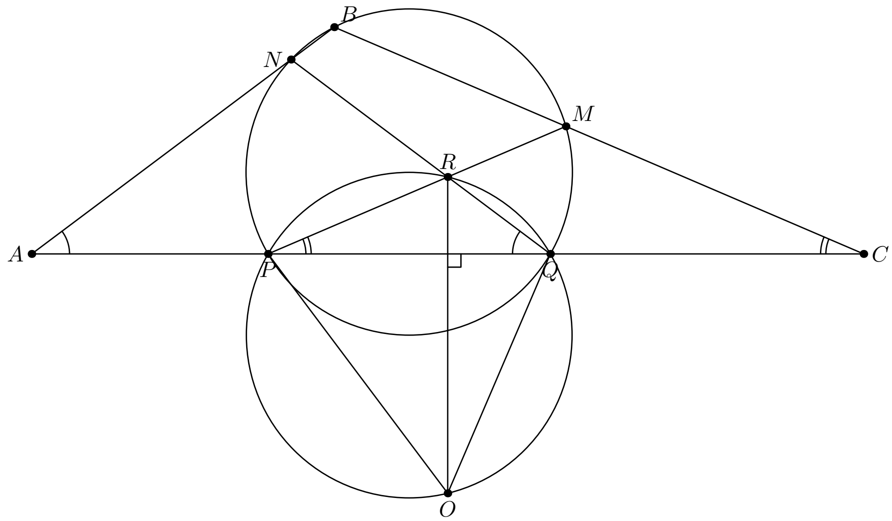

Рис. 12.

б) Из п.а) следует, что треугольники QRP и ABC ортологичны с центром O. Кроме того, они перспективны с центром S. По теореме Сонда прямая OS перпендикулярна оси перспективы — прямой MN.

13. (А.Марданов) (8–11) В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, а угол C в полтора раза больше угла A. Диагональ AC делит угол C на два угла. Определите, какой из них больше?

    Ответ. Угол ACD.

    Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P, также пересечём серединный перпендикуляр к PD с AP в точке Q. Тогда $\angle AQD = 2\angle QPD = \angle QAD$ и $AD = QD > CD$ (гипотенуза прямоугольного треугольника больше катета). Значит $\angle ACD > \angle CAD = \angle BCA$ (рис.13).

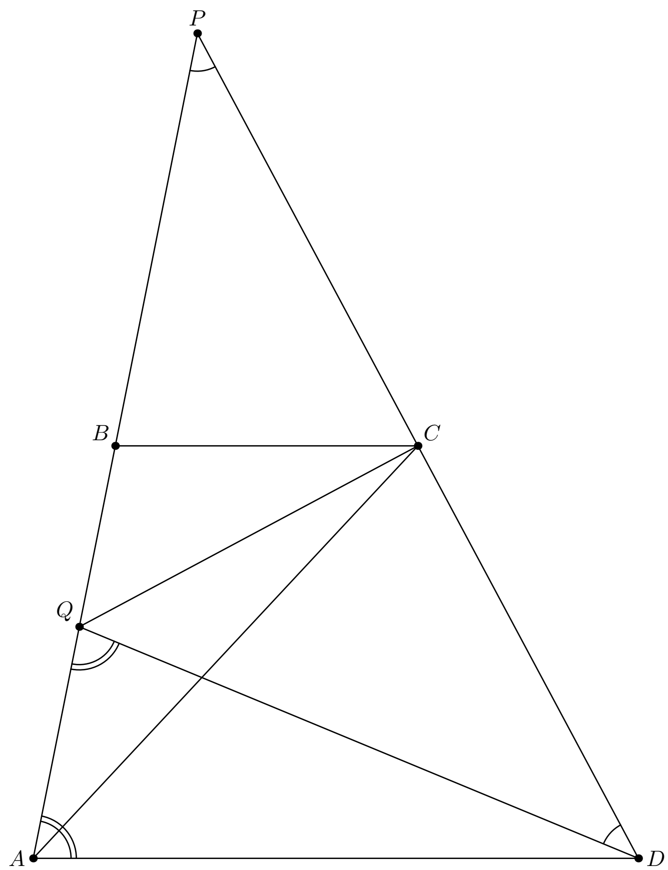

Рис. 13.

14. (А.Скопенков) (8–11) Замкнутая, возможно, самопересекающаяся ломаная симметрична относительно не лежащей на ней точки O. Докажите, что число оборотов ломаной вокруг O нечётно. (*Числом оборотов вокруг O называется сумма ориентированных углов $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$, делённая на 2π.*)

    Решение. Из условия следует, что число звеньев ломаной четно: $n = 2k$. Так как точки A_1 и A_{k+1} симметричны относительно O, то при движении от A_1 до A_{k+1} вектор OA_i поворачивается на угол $m\pi$, где m нечетно. На такой же угол он поворачивается при движении от A_{k+1} до A_1. Следовательно, число оборотов равно $2\pi m$.

15. (А.Матвеев) (9–10) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки X и Y лежат на продолжениях за точку D сторон CD и AD соответственно, причем $DX = AB$ и $DY = BC$. Аналогично, точки Z и T лежат на продолжениях за точку B сторон CB и AB, причем $BZ = AD$ и $BT = DC$. Пусть M_1 — середина XY, M_2 — середина ZT. Докажите, что прямые DM_1, BM_2 и AC пересекаются в одной точке.

    Решение. Пусть DM_1 пересекает AC в точке P. Тогда $\sin\angle ADP : \sin\angle CDP = \sin\angle YDM : \sin\angle XDM = XD : YD = AB : BC$. Следовательно, $AP : CP = (AB \cdot AD) : (CB \cdot CD)$. Такое же отношение получаем для точки пересечения AC с прямой BD_2.

16. (П.Кожевников) (9–11) В треугольнике ABC проведены высоты AH_A и BH_B. Прямая H_AH_B пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q.

Точка A' симметрична точке A относительно BC, точка B' симметрична точке B относительно CA. Докажите, что A', B', P, Q лежат на одной окружности.

Решение. Поскольку точки, симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, лежат на описанной окружности, то $H_AH \cdot H_AA' = H_AB \cdot H_AC = H_AP \cdot H_AQ$, следовательно, точки P, Q, H, A' лежат на одной окружности. Аналогично P, Q, H, B' лежат на одной окружности (рис.16).

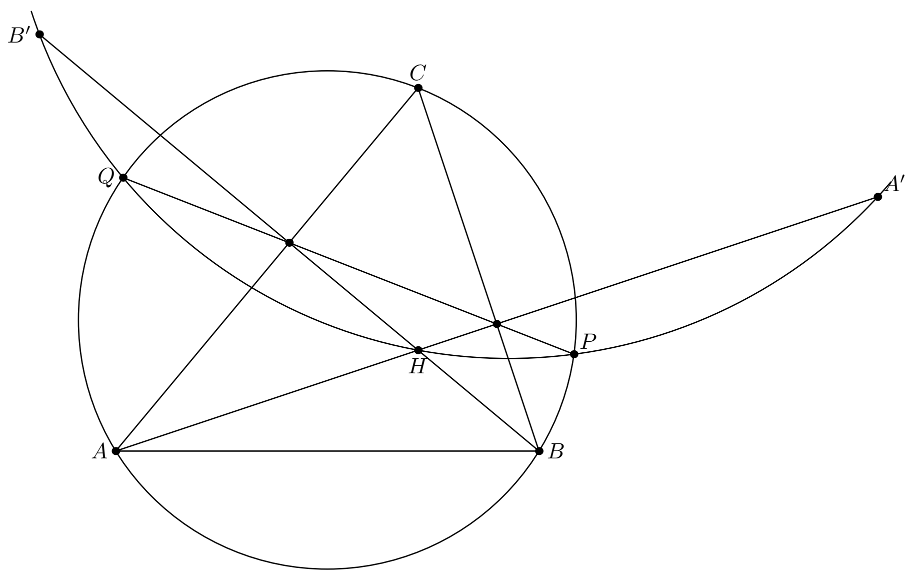

Рис. 16.

17. (Л.Шатунов) (9–11) Общая внешняя касательная к окружностям ω_1 и ω_2 касается их в точках T_1, T_2 соответственно. Пусть A — произвольная точка на продолжении отрезка T_1T_2 за точку T_1, а B — точка на продолжении отрезка T_1T_2 за точку T_2 такая, что $AT_1 =$
$= BT_2$. Отличные от прямой T_1T_2 касательные из A к ω_1 и из B к ω_2 пересекаются в точке C. Докажите, что нагелианы всех треугольников ABC из вершины C проходят через одну точку.

Решение. Докажем, что все нагелианы проходят через центр внутренней гомотетии окружностей. Для этого переформулируем задачу: пусть дан треугольник ABC, точки T_1, T_2 на стороне AB симметричны относительно ее середины, две окружности, вписанные в углы A и B, касаются AB в точках T_1, T_2 соответственно. Тогда центр внутренней гомотетии окружностей лежит на нагелиане CD.

Заметим, что при движении точек T_1, T_2 по AB центры окружностей движутся по биссектрисам углов A и B соответственно, а отношение их радиусов остается равным $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} : \operatorname{ctg}\frac{B}{2} = AD : BD$. Следовательно, центр гомотетии движется по прямой, проходящей через D. При этом, поскольку $AC + AD = BC + BD$, вписанной окружности треугольника ACD при этом движении соответствует вписанная окружность треугольника BCD (рис.17). Очевидно, что центр гомотетии этих окружностей лежит на CD. Значит, это верно для любой пары окружностей.

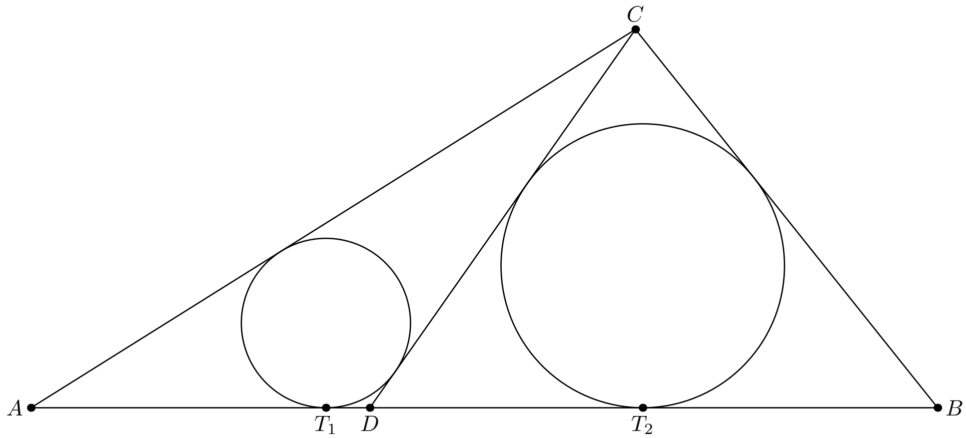

Рис. 17.

18. (А.Заславский) (9–11) Восстановите вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$ по серединам дуг AB, BC, CD его описанной окружности.

    Решение. Описанная окружность четырехугольника проходит через три данные точки, а хорды, соединяющие середины противоположных дуг, перпендикулярны. Поэтому можно найти середину дуги DA. Касательные к описанной окружности в серединах дуг параллельны сторонам четырехугольника, а поскольку оба четырехугольника описанные, то они гомотетичны. Следовательно, описав вокруг четырехугольника, образованного касательными, окружность и применив гомотетию, переводящую эту окружность в описанную окружность четырехугольника, мы восстановим четырехугольник.

19. (А.Заславский) (10–11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Произвольная окружность, проходящая через точки C и D, пересекает прямые AC, BC в точках X, Y соответственно. Найдите ГМТ пересечения окружностей CAY и CBX.

    Ответ. Прямая CE, где $AEBD$ — гармонический четырехугольник.

    Решение. Рассмотрим композицию инверсии с центром C и симметрии относительно биссектрисы угла BCA, меняющую точки A и B местами. Она также меняет местами прямую AB и описанную окружность четырехугольника, т.е. D перейдет в некоторую точку D' на прямой AB, а окружность, проходящая через C и D, — в прямую, проходящую через D' и пересекающую AC, BC в точках Y', X' соответственно. Окружности CAY и CBX перейдут в прямые AX', BY', точка пересечения которых лежит на прямой, проходящей через C и пересекающей AB в такой точке E', что четверка A, B, D', E' гармоническая. При повторном применении инверсии и симметрии эта прямая перейдет в CE (рис.19).

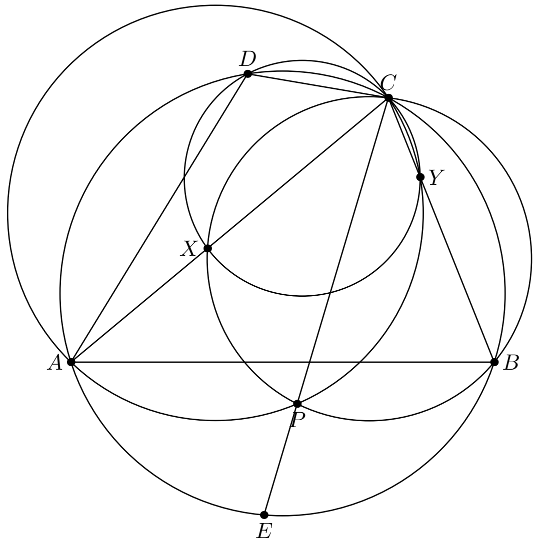

Рис. 19.

20. (А.Шевцов) (10–11) В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка D. Касательные, проведенные к описанной окружности треугольника BDC в точках B и C, пересекаются в точке K. Докажите, что DD' параллельно AK, где D' — точка, изогонально сопряжённая точке D относительно треугольника ABC.

Первое решение. При движении точки D по AM точка D' движется по симедиане, а K по серединному перпендикуляру к BC, причем D' зависит от D проективно, а K квадратично (это полюс фиксированной прямой BC относительно окружности BCD, коэффициенты уравнения которой квадратично зависят от D). Поэтому достаточно доказать утверждение задачи для пяти положений точки D. Если D совпадает с A, то D' — основание симедианы, а K — точка пересечения касательных к описанной окружности треугольника ABC, т.е. все три точки лежат на одной прямой. Если D — вторая точка пересечения AM с описанной окружностью, то K также лежит на симедиане, а D' является ее бесконечной точкой. Если D совпадает с M, то K также совпадает с M, а D' с A. Если $ABDC$ — параллелограмм, то D' — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C, а K симметрична D' относительно M. Наконец, если D — бесконечно удаленная точка, то K совпадает с M. Во всех случаях утверждение задачи верно.

Второе решение

(Н.Белухов, https://artofproblemsolving.com/community/c6h3025566p27515578)

Обозначим через Γ окружность BDC, и пусть AB и AC повторно пересекают Γ в точках B' и C' соответственно. Пусть M' — середина $B'C'$, а касательные к Γ в точках B' и C' пересекаются в точке K'.

Заметим, что A, K и K' лежат на одной прямой (поляре точки пересечения $BC \cap B'C'$ относительно Γ). Поэтому надо доказать, что $DD' \parallel KK'$. Покажем, что DD' и KK' антипараллельны MM' относительно угла BAC.

Сначала докажем это для DD'. Пусть AD повторно пересекает Γ в точке E. Тогда $ABD' \sim AEC$, т.е. $AD' \cdot AE = AB \cdot AC$. Следовательно, $AD : AD' = (AD \cdot AE) : (AD' \cdot AE) = (AB \cdot AB') : (AB \cdot AC) = AB' : AC$.

С другой стороны, $ABCM \sim AC'B'M'$, а значит, $AM : AM' = AC : AB' = AD' : AD$. Кроме того, A, D и M лежат на одной прямой и из того же подобия $\angle BAM = \angle C'AM'$, т.е. A, D' и M' также лежат на одной прямой. Поэтому D, D', M и M' лежат на одной окружности, откуда получаем искомую антипараллельность.

Перейдем к прямой KK'. Пусть O и R — центр и радиус Г. Тогда O, M и K лежат на одной прямой, также как O, M' и K', при этом $OM \cdot OK = R^2 = OM' \cdot OK'$. Следовательно, K, K', M и M' лежат на одной окружности, откуда получаем и вторую искомую антипараллельность.

21. (И.Михайлов) (10–11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть M_{ac} — середина диагонали AC; H_d, H_b — ортоцентры треугольников ABC, ADC соответственно; P_d, P_b — проекции H_d и H_b на BM_{ac} и DM_{ac} соответственно. Аналогично определим P_a, P_c для диагонали BD. Докажите, что P_a, P_b, P_c, P_d лежат на одной окружности.

Решение. Известно, что точки A, C, P_d, H_d лежат на окружности, симметричной окружности ABC относительно M_{ac}. Поэтому $MA{\cdot}MC = MP_d{\cdot}MB' = MP_d{\cdot}MB$, где B' — вершина параллелограмма $ABCB'$. Аналогично $MA \cdot MC = MD \cdot MP_b$, значит, B, D, P_b, P_d лежат на одной окружности. Кроме того, поскольку точки A, C, P_b, P_d лежат на одной окружности, прямые BD, AC и P_bP_d пересекаются в радикальном центре L (рис.21). Аналогично получаем, что P_aP_c проходит через L, причем $LP_a \cdot LP_c = LA \cdot LC = LB \cdot LD = LP_b \cdot LP_d$, откуда следует утверждение задачи.

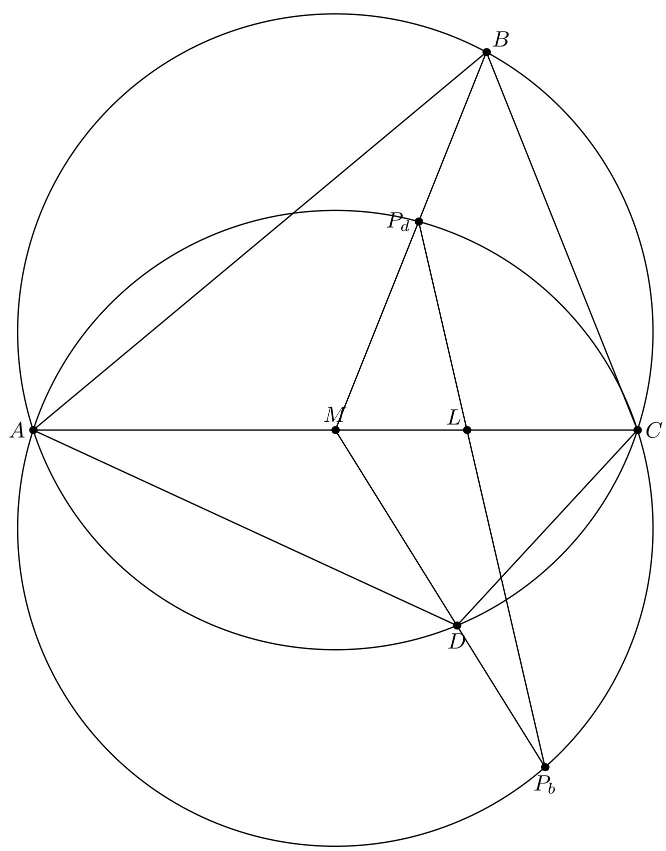

Рис. 21.

22. (A.Mudgal, P.Srivastava) (10–11) В неравнобедренном треугольнике ABC точка M —

середина BC, P — ближайшая к A точка пересечения луча AM и вписанной окружности треугольника, Q — дальняя от A точка пересечения луча AM и вневписанной окружности. Касательная к вписанной окружности в точке P пересекает BC в точке X, а касательная к вневписанной окружности в точке Q пересекает BC в точке Y. Докажите, что $MX = MY$.

Решение. Сделаем гомотетию с центром A, переводящую вневписанную окружность в вписанную. Пусть B', C', M', Q', Y' — образы точек B, C, M, Q, Y соответственно. Тогда $BB'C'C$ — трапеция, описанная около вписанной окружности треугольника, обозначим точки касания окружности со сторонами BC, $B'C'$, BB', CC' через K, L, U, V соответственно. По теореме Брианшона точка J пересечения отрезков KL и UV совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции и, следовательно, лежит на AM (рис.22). При этом $JK : JL = BC : B'C'$. Четырехугольник, образованный прямыми PX, BC, $Q'Y'$ и $B'C'$, описан вокруг той же окружности, значит его диагональ XY' тоже проходит через J и $XM : Y'M' = JK : JL$. Сделав обратную гомотетию, получаем искомое равенство.

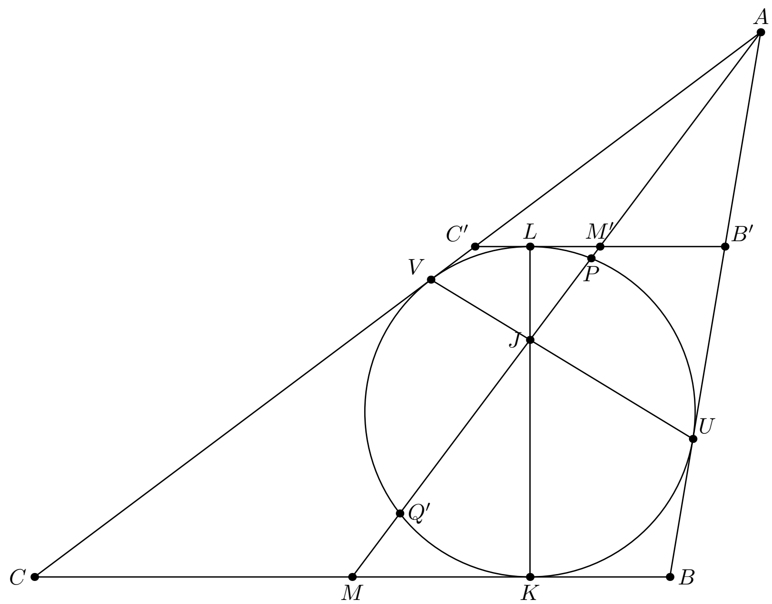

Рис. 22.

23. (А.Марданов) (10–11) Эллипс Γ_1 с фокусами в серединах сторон AB и AC треугольника ABC проходит через вершину A, а эллипс Γ_2 с фокусами в серединах сторон AC и BC проходит через вершину C. Докажите, что точки пересечения этих эллипсов и ортоцентр треугольника ABC лежат на одной прямой.

    Решение. Пусть B_0 — середина AC. Директрисы d_1, d_2 эллипсов Γ_1, Γ_2, соответствующие фокусу B_0, параллельны его высотам AH, CH. Следовательно, расстояния от H до d_1 и d_2 равны расстояниям до этих прямых от точек A и C соответственно. Поскольку $AB_0 = CB_0$, отношение этих расстояний обратно отношению эксцентриситетов эллипсов. Так как для точек пересечения эллипсов отношение расстояний до директрис такое же, три точки лежат на одной прямой.

24. (Tran Quang Hung) (11) Дан тетраэдр $ABCD$. Прямая ℓ пересекает плоскости ABC, BCD, CDA, DAB в точках D_0, A_0, B_0, C_0 соответственно. Пусть P — произвольная

точка, не лежащая на прямой ℓ и в плоскостях граней тетраэдра, а A_1, B_1, C_1, D_1 — вторые точки пересечения прямых PA_0, PB_0, PC_0, PD_0 со сферами $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ соответственно. Докажите, что P, A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.

Решение. Пусть S — описанная сфера тетраэдра $ABCD$, а ω описанная окружность треугольника PA_1B_1. Тогда плоскость BCD — радикальная плоскость S и описанной сферы тетраэдра $PBCD$. Так как A_0 лежит в плоскости BCD, то степень точки A_0 относительно S равна ее степени относительно сферы $PBCD$, т.е. $A_0P \cdot A_0A_1$. Этому произведению равна также степень A_0 относительно описанной около треугольника PA_1B_1 окружности ω. Таким образом, A_0 лежит на радикальной оси сферы S и окружности ω. Аналогично B_0 лежит на радикальной оси S и ω. Следовательно, эта радикальная ось совпадает с прямой ℓ.

Так как точка C_0 лежит в плоскости DAB, являющейся радикальной плоскостью S и описанной сферы тетраэдра $PDAB$, степени C_0 относительно этих сфер равны. Значит, прямая PC_0 — радикальная ось окружности ω и сферы $PDAB$, но PC_0 пересекает эту сферу в точке C_1, следовательно, C_1 лежит на окружности ω. Аналогично D_1 лежит на ω. Таким образом, P, A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.