Девятнадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Девятнадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

Задачи олимпиады рассчитаны на учащихся последних четырёх классов средней школы. В списке, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса (на момент старта заочного тура) решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решённые задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчётливые чертежи достаточного размера. **Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением**. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто сослаться на него (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме **не раньше 1 декабря 2022 и не позднее 1 марта 2023 года**. Для этого нужно зайти на сайт **https://contest.yandex.ru/geomshar/**, справа наверху указать язык (русский) и следовать появляющимся инструкциям.

ВНИМАНИЕ:

1. Решение каждой задачи (и каждого её пункта, если задача имеет пункты) должно содержаться в **отдельном** файле формата pdf, doc, docx или jpg. Если решение состоит из нескольких файлов, то нужно создать из них **архив** (zip или rar) и загрузить его.

2. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. **Во всех случаях необходимо убедиться перед отправкой, что файл хорошо читается**.

3. Если несколько раз загружается решение одной и той же задачи, то в системе проверки остается только последнее. **Поэтому при необходимости что-то изменить Вам следует снова загрузить решение задачи полностью.**

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomshar@yandex.ru. (НЕ присылайте работы на этот адрес!)**

Финальный тур состоится летом 2023 года под Москвой. На него будут приглашены победители заочного тура, не закончившие к этому времени школу. Критерии прохождения на финал определяются после проверки работ заочного тура в зависимости от количества участников с тем или иным результатом. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** к 1 июня 2023 г. Свои результаты Вы сможете узнать по адресу **geomshar@yandex.ru** после публикации списков.

1. (8) Пусть L — середина меньшей дуги AC описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Из вершины B на касательную к описанной окружности, проведённую в точке L, опустили перпендикуляр BP. Докажите, что точки P, L и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности.

2. (8) Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Окружность с центром в точке E лежит внутри прямоугольника. Из вершин C, D, A проведены касательные к окружности CF, DG, AH, причем CF пересекает DG в точке I, EI пересекает AD в точке J, а прямые AH и CF пересекаются в точке L. Докажите, что отрезок LJ перпендикулярен AD.

3. (8) Окружность касается боковых сторон трапеции $ABCD$ в точках B и C, а её центр лежит на AD. Докажите, что диаметр окружности меньше средней линии трапеции.

4. (8) На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $\angle BED = 3\angle BDE$. Точка D' симметрична точке D относительно прямой AC. Докажите, что прямая $D'E$ проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

5. (8) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. На сторонах AD и CD взяты точки E и F так, что $AE = BC$ и $AB = CF$. Пусть M — середина EF. Докажите, что угол AMC прямой.

6. (8–9) Пусть A_1, B_1, C_1 — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник $A_1B_1C_1$, касается сторон A_1B_1, A_1C_1, B_1C_1 в точках C_2, B_2, A_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке, лежащей на прямой Эйлера треугольника ABC.

7. (8–9) На окружности ω зафиксирована точка A. Хорды BC окружности ω выбираются так, что проходят через фиксированную точку P. Докажите, что окружности 9 точек треугольников ABC касаются фиксированной окружности, не зависящей от выбора BC.

8. (8–9) В треугольнике ABC ($a > b > c$) указаны инцентр I, а также точки K и N касания вписанной окружности со сторонами BC и AC соответственно. Проведя не более трёх линий одной линейкой, постройте отрезок длины $a - c$.

9. (8–9) Про треугольник ABC известно, что точка, симметричная ортоцентру относительно центра описанной окружности, лежит на стороне BC. Пусть A_1 — основание высоты, проведенной из точки A. Докажите, что A_1 лежит на окружности, проходящей через середины трёх высот треугольника ABC.

10. (8–9) Высоты BE и CF остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Перпендикуляр из H к прямой EF пересекает прямую ℓ, проходящую через точку A и параллельную BC, в точке P. Биссектрисы углов, образованных прямыми ℓ и HP, пересекают прямую BC в точках S и T. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и PST касаются.

11. (8–10) Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC; E, F — такие точки на сторонах AB, AC соответственно, что $AEHF$ — параллелограмм; X, Y — точки пересечения прямой EF с описанной окружностью ω треугольника ABC; Z — точка ω, диаметрально противоположная A. Докажите, что H — ортоцентр треугольника XYZ.

12. В треугольнике ABC с тупым углом B отмечены такие точки P и Q на AC, что $AP = PB$, $BQ = QC$. Окружность BPQ пересекает стороны AB и BC в точках N и M соответственно.

    (a) (8–9) Докажите, что точка R пересечения PM и NQ равноудалена от A и C.

    (b) (10–11) Пусть BR пересекает AC в точке S. Докажите, что $MN \perp OS$, где O — центр описанной окружности треугольника ABC.

13. (8–11) В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC, а угол C в полтора раза больше угла A. Диагональ AC делит угол C на два угла. Определите, какой из них больше?

14. (8–11) Замкнутая, возможно, самопересекающаяся ломаная симметрична относительно не лежащей на ней точки O. Докажите, что число оборотов ломаной вокруг O нечётно. (*Числом оборотов вокруг O называется сумма ориентированных углов $\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \ldots + \angle A_{n-1}OA_n + \angle A_nOA_1$, делённая на 2π.*)

15. (9–10) Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Точки X и Y лежат на продолжениях за точку D сторон CD и AD соответственно, причем $DX = AB$ и $DY = BC$. Аналогично, точки Z и T лежат на продолжениях за точку B сторон CB и AB, причем $BZ = AD$ и $BT = DC$. Пусть M_1 — середина XY, M_2 — середина ZT. Докажите, что прямые DM_1, BM_2 и AC пересекаются в одной точке.

16. (9–11) В треугольнике ABC проведены высоты AH_A и BH_B. Прямая H_AH_B пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Точка A' симметрична точке A относительно BC, точка B' симметрична точке B относительно CA. Докажите, что A', B', P, Q лежат на одной окружности.

17. (9–11) Общая внешняя касательная к окружностям ω_1 и ω_2 касается их в точках T_1, T_2 соответственно. Пусть A — произвольная точка на продолжении отрезка T_1T_2 за точку T_1, а B — точка на продолжении отрезка T_1T_2 за точку T_2 такая, что $AT_1 = BT_2$. Отличные от прямой T_1T_2 касательные из A к ω_1 и из B к ω_2 пересекаются в точке C. Докажите, что нагелианы всех треугольников ABC из вершины C проходят через одну точку.

18. (9–11) Восстановите вписанно-описанный четырёхугольник $ABCD$ по серединам дуг AB, BC, CD его описанной окружности.

19. (10–11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Произвольная окружность, проходящая через точки C и D, пересекает прямые AC, BC в точках X, Y соответственно. Найдите ГМТ пересечения окружностей CAY и CBX.

20. (10–11) В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка D. Касательные, проведенные к описанной окружности треугольника BDC в точках B и C, пересекаются в точке K. Докажите, что DD' параллельно AK, где D' — точка, изогонально сопряжённая точке D относительно треугольника ABC.

21. (10–11) Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Пусть M_{ac} — середина диагонали AC; H_d, H_b — ортоцентры треугольников ABC, ADC соответственно; P_d, P_b — проекции H_d и H_b на BM_{ac} и DM_{ac} соответственно. Аналогично определим P_a, P_c для диагонали BD. Докажите, что P_a, P_b, P_c, P_d лежат на одной окружности.

22. (10–11) В неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина BC, P — ближайшая к A точка пересечения луча AM и вписанной окружности треугольника, Q — дальняя от A точка пересечения луча AM и вневписанной окружности. Касательная к вписанной окружности в точке P пересекает BC в точке X, а касательная к вневписанной окружности в точке Q пересекает BC в точке Y. Докажите, что $MX = MY$.

23. (10–11) Эллипс Γ_1 с фокусами в серединах сторон AB и AC треугольника ABC проходит через вершину A, а эллипс Γ_2 с фокусами в серединах сторон AC и BC проходит через вершину C. Докажите, что точки пересечения этих эллипсов и ортоцентр треугольника ABC лежат на одной прямой.

24. (11) Дан тетраэдр $ABCD$. Прямая ℓ пересекает плоскости ABC, BCD, CDA, DAB в точках D_0, A_0, B_0, C_0 соответственно. Пусть P — произвольная точка, не лежащая на прямой ℓ и в плоскостях граней тетраэдра, а A_1, B_1, C_1, D_1 — вторые точки пересечения прямых PA_0, PB_0, PC_0, PD_0 со сферами $PBCD$, $PCDA$, $PDAB$, $PABC$ соответственно. Докажите, что P, A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности.