XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Решения. Первый день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

1. (А.Заславский) Точка D лежит на основании AB равнобедренного тупоугольного треугольника ABC так, что отрезок AD равен радиусу описанной окружности треугольника BCD. Найдите угол ACD.

   Ответ. 30° или 150°.

   Решение. Пусть O — центр описанной окружности треугольника BCD, M — середина CD, H — проекция D на AC. Тогда $\angle DOM = \angle DOC/2 = \angle DBC = \angle DAC$ и $DO = DA$ (рис. 8.1). Следовательно, треугольники DAH и DOM равны, т.е. $DH = DM = DC/2$ и $\angle DCH = 30^\circ$. Соответственно угол ACD равен 30°, если H лежит на отрезке AC, и 150° в противном случае.

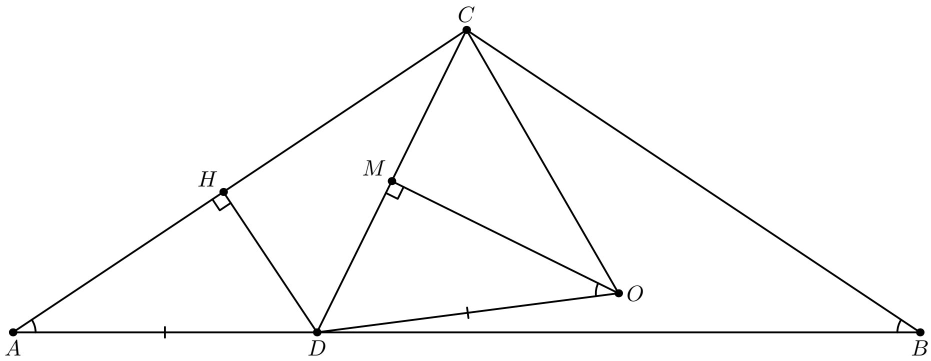

Рис. 8.1

   Примечание. Задачу также нетрудно решить с помощью теоремы синусов

2. (А.Терешин) Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC вторично пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2; C_2 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

   Решение. Так как A_1, B_1, C_1 — середины дуг BC, CA, AB соответственно, то дуги B_1C и A_1C_1 составляют в сумме полуокружность, а значит, прямые CC_1 и A_1B_1 перпендикулярны. Поэтому прямые A_1A, B_1B, C_1C являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$, а точка I их пересечения — его ортоцентром. Точки A_2, B_2, C_2 являются проекциями центра O окружности ABC на AA_1, BB_1, CC_1, следовательно, они лежат на окружности с диаметром OI. Тогда $\angle B_2A_2C_2 = \angle B_2IC_2 = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 8.2). Аналогично получаем, что $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$, а значит, треугольники подобны.

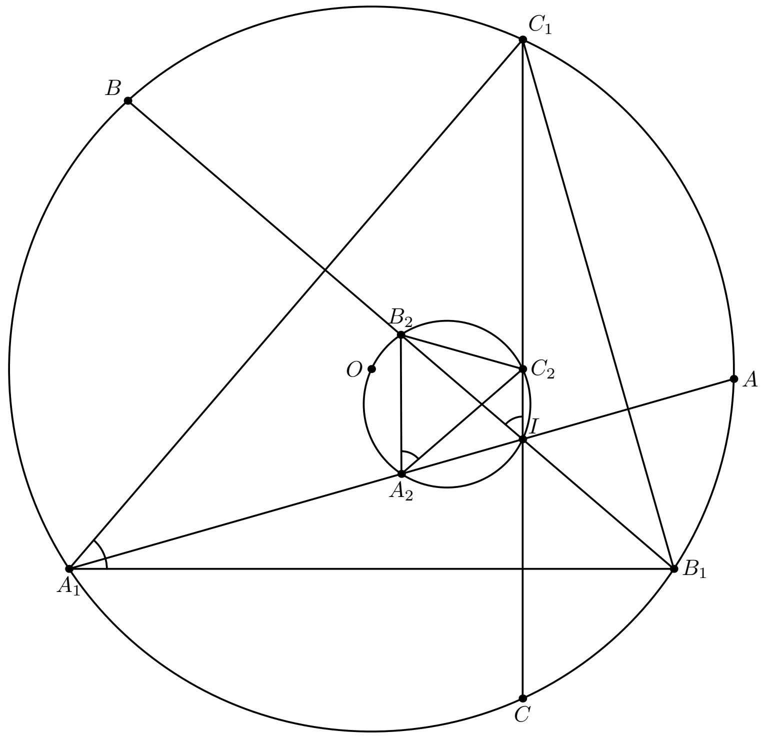

Рис. 8.2

Примечание. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта. Если H — ортоцентр треугольника ABC, P — произвольная точка плоскости, а A', B', C' — проекции P на AH, BH, CH соответственно, то треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны.

3. (А.Тертерян) Высоты параллелограмма больше 1. Обязательно ли в него можно поместить единичный квадрат?

Ответ. Нет.

Решение. Рассмотрим сначала задачу покрытия единичного квадрата полосой ширины h. Так как проекции диагоналей квадрата на прямую, перпендикулярную полосе, не могут превышать h, каждая из диагоналей должна образовывать с этой прямой достаточно большой угол. Выберем h так, чтобы критическое значение угла равнялось $44°$, тогда угол между границей полосы и одной из сторон квадрата будет не больше $1°$.

Возьмем теперь ромб с высотой h. Если в него можно поместить единичный квадрат, то каждая из сторон ромба образует с одной из сторон квадрата угол, меньший 1°. Если эта сторона квадрата одна и та же для обеих сторон ромба, то острый угол ромба не превышает 2°. В противном случае острый угол ромба не меньше 88°. Следовательно, в ромб с высотой h и острым углом 45° поместить единичный квадрат невозможно.

Примечание. Из решения видно, что, если квадрат можно поместить в ромб с углом 45°, то можно и в любой параллелограмм с не меньшими высотами. Таким образом, наименьшее значение высоты, гарантирующее возможность поместить квадрат, равно $\sqrt{2}\sin 67,5^\circ$. Поместить единичный квадрат в ромб с такой высотой можно двумя способами (рис. 8.3).

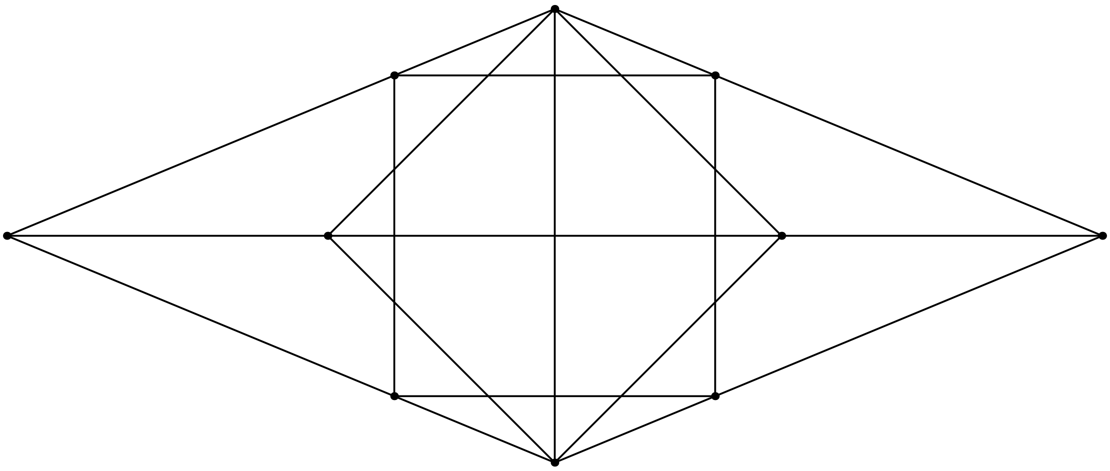

Рис. 8.3

4. (А.Заславский) В остроугольном треугольнике ABC O — центр описанной окружности, BM — медиана, BH — высота. Окружности AOB и BHC повторно пересекаются в точке E, а окружности AHB и BOC — в точке F. Докажите, что $ME = MF$.

   Решение. Продлим BH до пересечения с описанной окружностью треугольника в точке D. Докажем, что точка E лежит также на окружностях DCO и ADH. Действительно, пусть E' — вторая точка пересечения окружностей ABO и DCO. Тогда $\angle BE'C = 2\pi - \angle BE'O - \angle CE'O = BAO + \angle CDO = \pi - (\angle AOB + \angle COD)/2 = \pi/2$, т.е. E' совпадает с E. Аналогично получаем, что F лежит на окружностях CHD и AOD.

   Заметим теперь, что $\angle OEH = 2\pi - \angle OEB - \angle BEH = \angle OAB + \angle BCH = \angle CBH + \angle BCH = \pi/2$, следовательно, E лежит на окружности с диаметром OH. Аналогично на этой окружности лежит F. Очевидно, что M также лежит на этой окружности.

Докажем, что прямые, симметричные AF, BF, CF, DF относительно биссектрис углов A, B, C, D соответственно, пересекаются в точке E. Пусть P, Q, R, S — проекции F на AB, BC, CD, DA соответственно. Тогда $\angle PSR+\angle PQR = \angle FSP+\angle FSR+\angle FQP+\angle FQR = \angle FAB+\angle FRC+\angle FBA+\angle FDC = \pi$, поскольку $\angle AFB = \angle CFD = \pi/2$. Значит точки P, Q, R, S лежат на одной окружности. Тогда точки P', Q', R', S', симметричные F относительно AB, BC, CD, DA тоже лежат на одной окружности. Поскольку, например, $AP' = AF = AS'$, серединный перпендикуляр к отрезку $P'S'$ совпадает с биссектрисой угла $P'AS'$, которая симметрична AF относительно биссектрисы угла A. Таким образом, четыре прямые, симметричные AF, BF, CF, DF относительно биссектрис соответствующих углов, пересекаются в одной точке — центре окружности $P'Q'R'S'$. Нетрудно видеть, что стороны BC и AD видны из этой точки под прямыми углами и, значит, она совпадает с E.

Наконец, получаем, что $\angle EHM = \angle EBC = \angle FCA = \angle FHM$ и, так как точки E, F, H, M лежат на одной окружности, то $EM = FM$ (рис. 8.4).

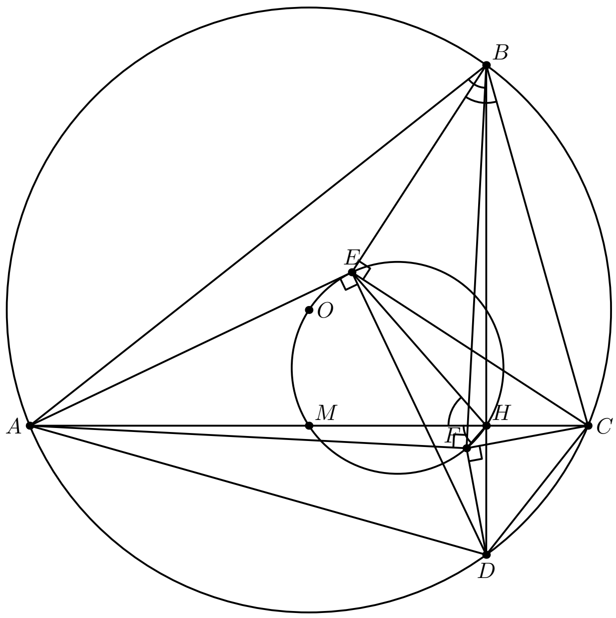

Рис. 8.4

Примечание. Так как прямые, соединяющие E и F с вершинами четырехугольника $ABCD$ симметричны относительно биссектрис его углов, эти точки являются фокусами вписанного в четырехугольник эллипса. Кроме того, они симметричны относительно прямой, соединяющей середины AC и BD.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. Решения. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2023 г.

5. (Л.Попов) В остроугольном треугольнике ABC медиана CM и высота AH пересекаются в точке O. Вне треугольника отмечена точка D так, что $AOCD$ — параллелограмм. Чему равно BD, если известно, что $MO = a$, $OC = b$?

   Ответ. $2a + b$.

   Решение. Возьмем на луче CM такую точку K, что $CM = MK$. Тогда $CAKB$ — параллелограмм, т.е. $AK = BC$ и $AK \parallel BC$. Кроме того, $AO = CD$ и $\angle BCD = \angle OAK = 90°$, потому что AH — высота (рис. 8.5). Следовательно, треугольники BCD и KAO равны, т.е. $BD = OK = 2CM - CO = 2a + b$.

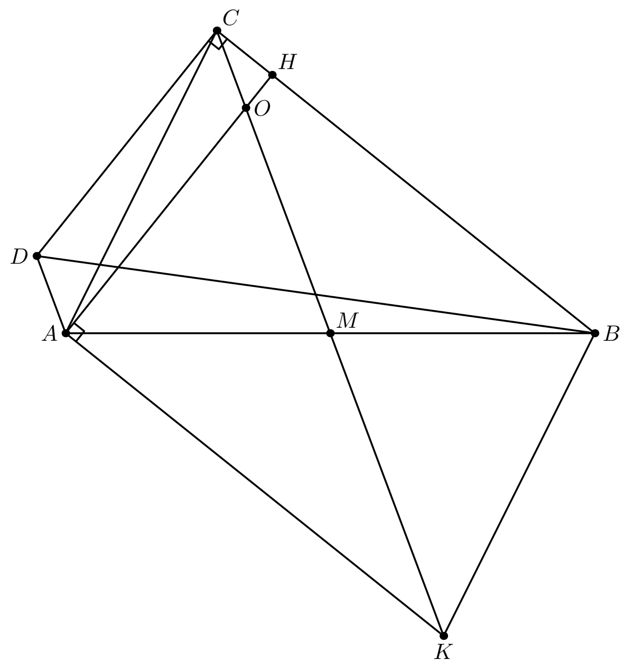

Рис. 8.5

6. (Ф.Нилов) При каких n можно замостить плоскость равными фигурами, ограниченными n дугами окружностей?

   Ответ. $n > 2$.

   Решение. Возьмем квадрат $ABCD$ и заменим стороны AB, AD равными дугами, направленными наружу, а стороны BC, CD такими же дугами, направленными внутрь. Получим фигуру, ограниченную четырьмя дугами, которой, очевидно, можно замостить плоскость. Также можно замостить плоскость полоской из k таких фигур, которая ограничена $2k+2$ дугами. Кроме того, можно выбрать радиусы дуг так, чтобы дуги AB и AD составили одну полуокружность (рис. 8.6). Тогда получится фигура, ограниченная тремя дугами. Составив полоску из k таких фигур, получим фигуру, ограниченную $2k+1$ дугой.

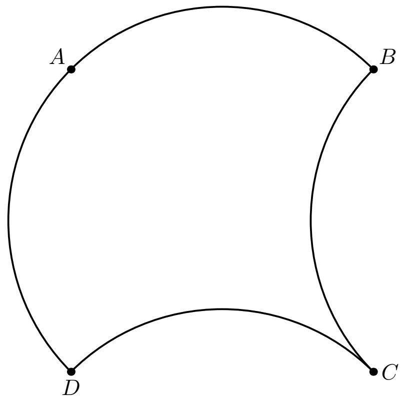

Рис. 8.6

Если $n = 2$, то фигура является полумесяцем, у которого внешняя дуга длиннее внутренней. Поэтому на внешней дуге найдется точка, в которой сходятся два других полумесяца. Очевидно, что угол, образованный их внешними дугами, замостить невозможно.

7. (Г.Филипповский) Биссектриса угла A треугольника ABC при продолжении пересекает описанную около него окружность ω в точке W. Окружность s, построенная на отрезке AH как на диаметре (H — ортоцентр в треугольнике ABC), пересекает ω в точке P. Восстановите треугольник ABC, если остались точки A, P, W.

   Решение. По точкам A, P, W построим окружность ω, ее центр O и точку A', противоположную A. Так как $\angle APA' = \angle APH = 90^\circ$, точка H лежит на прямой PA'. Поскольку $\angle ABA' = \angle ACA' = 90^\circ$, четырехугольник $HBA'C$ — параллелограмм, т.е. H и A' симметричны относительно середины M стороны BC. Поэтому мы можем построить M, как пересечение PA' и OW, а затем провести через M перпендикуляр к OW и найти точки B, C его пересечения с ω (рис. 8.7).

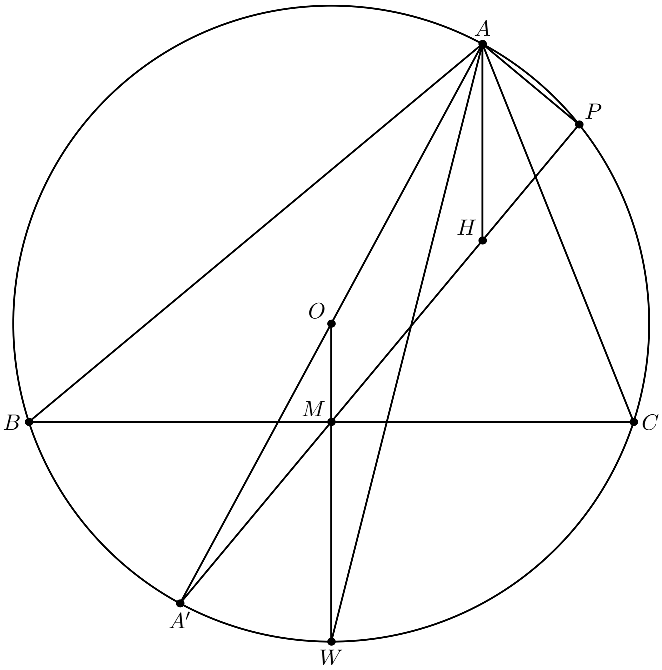

Рис. 8.7

8. (Д.Демин, И.Кухарчук) Даны две окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точке A, и прямая a. Пусть BC — произвольная хорда окружности ω_2, параллельная a, а E и F — вторые точки пересечения прямых AB и AC с ω_1. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых BC и EF.

Ответ. Пусть X_1X_2 — диаметр ω_2, перпендикулярный a, Y_1, Y_2 — вторые точки пересечения прямых AX_1, AX_2 с ω_1. Тогда искомое ГМТ — интервал, ограниченный точками пересечения касательных к ω_2 в X_1, X_2 с касательными к ω_1 в Y_1, Y_2 соответственно.

Решение. Пусть B_1C_1 и B_2C_2 — два положения хорды BC, E_1F_1, E_2F_2 — соответствующие положения хорды EF. Так как дуги B_1B_2 и C_1C_2 равны, дуги E_1F_1 и E_2F_2 также равны, т.е. $E_1F_1 \parallel E_2F_2$. Кроме того, хорды B_iC_i и E_iF_i стягивают дуги одинаковой угловой меры (рис. 8.8). Следовательно, когда прямая BC движется равномерно, EF также движется равномерно, а точка их пересечения движется по прямой. Очевидно, что крайними положениями этой точки будут точки пересечения касательных к окружностям.

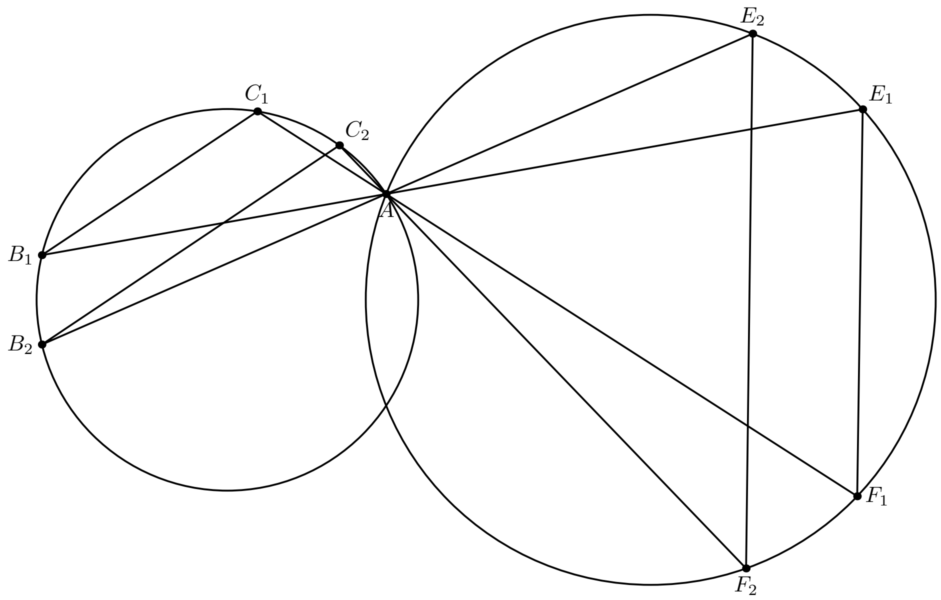

Рис. 8.8

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. Решения. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

1. (Е.Бакаев) В треугольнике ABC отношение медианы AM к стороне BC равно $\sqrt{3} : 2$. На сторонах ABC отмечены точки, делящие каждую сторону на 3 равные части. Докажите, что какие-то 4 из этих 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

Первое решение. Используя формулу медианы, получаем $AM^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4 = 3a^2/4$, т.е. $b^2 + c^2 = 2a^2$. Тогда квадрат медианы из вершины B равен $(2a^2 + 2c^2 - b^2)/4 = 3c^2/4$, аналогично квадрат медианы из вершины C равен $3b^2/4$. Следовательно, треугольник, образованный медианами, подобен треугольнику ABC.

Пусть теперь точки A_1, A_2 лежат на стороне BC, B_1, B_2 — на стороне CA, C_1, C_2 — на стороне AB так, что $BA_1 = A_1A_2 = A_2C$, $CB_1 = B_1B_2 = B_2A$, $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$. Тогда, например, в треугольнике BC_1A_2 медиана $C_1A_1 = 2AM/3$, т.е. треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику из медиан, а значит, и треугольнику ABC. Поэтому $\angle A_1B_1C_1 = \angle A = \angle A_1C_2B$ и окружность $A_1B_1C_1$ проходит через C_2 (рис. 9.1).

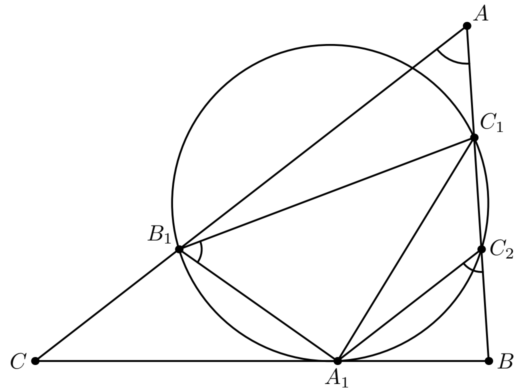

Рис. 9.1

Второе решение. Пусть отрезки B_1C_2 и A_1C_1 пересекаются в точке O. Покажем, что это диагонали вписанного четырехугольника. Несложно найти, в каких отношениях они друг друга делят: $C_1O = A_1O = x$, $B_1O = 3y$, $C_2O = y$. Также понятно, что $A_1C_1 = \frac{2}{3}AM$, $B_1C_2 = \frac{2}{3}BC$, откуда $A_1C_1 : B_1C_2 = AM : BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Получаем $\frac{2x}{4y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, значит $x^2 = 3y^2$, поэтому $B_1O \cdot C_2O = C_1O \cdot A_1O$. То есть $B_1C_1C_2A_1$ вписанный по утверждению о степени точки.

2. (А.Юран) Можно ли поместить правильный треугольник внутрь правильного шестиугольника так, чтобы из любой вершины шестиугольника были видны все три вершины треугольника? (*Точка A видна из точки B, если отрезок AB не содержит внутренних точек треугольника.*)

   Ответ. Нет.

   Решение. Точки, из которых видны все вершины правильного треугольника XYZ, лежат в трех углах, вертикальных к углам треугольника. Если в каждом из этих углов лежат две вершины шестиугольника, то его главные диагонали не могут пересекаться в одной точке. Иначе какие-то две несоседние вершины шестиугольника лежат в одном угле, скажем несоседние вершины A и B лежат в угле, вертикальном с углом X. Тогда $\angle AXB \leq 60^\circ$, и X лежит на дуге AB, лежащей вне шестиугольника.

3. (П.Бибиков) Дан треугольник ABC. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 берутся на его описанной окружности так, что $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$. Прямые AA_2 и CA_1 пересекаются в точке A', а прямые BB_2 и CB_1 — в точке B'. Докажите, что все прямые $A'B'$ проходят через одну точку.

   Первое решение. Пусть прямые CA_1, CB_1 пересекают AB в точках X, Y соответственно. Так как дуги CA_2, BA_1, AB_1 и CB_2 равны, то $AA' \parallel B'Y$, $BB' \parallel A'X$ и треугольники $AA'X$ и $YB'B$ гомотетичны. Их центр гомотетии Z лежит на прямой AB и удовлетворяет условию $ZX \cdot ZY = ZA \cdot ZB$. Поскольку $\angle ACX = \angle BCY$, окружности ABC и CXY касаются. Следовательно, Z лежит на их общей касательной и не зависит от точек A', B' (рис.9.3).

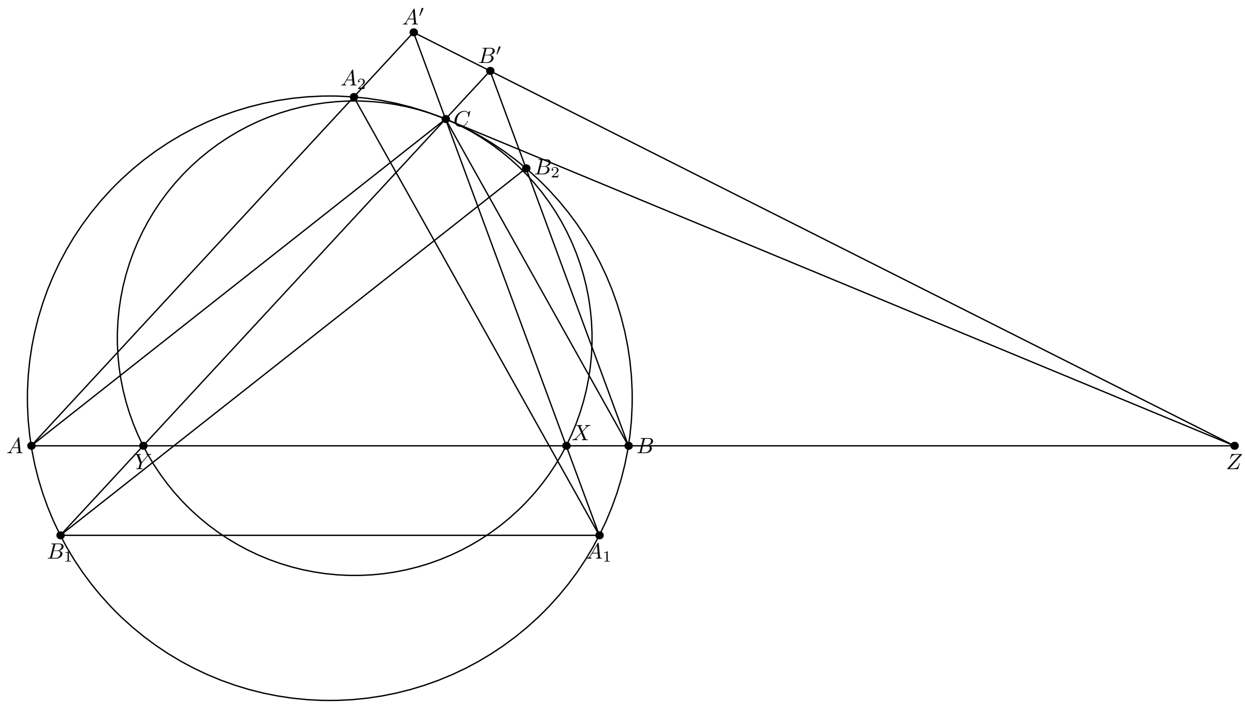

Рис. 9.3

Второе решение (схема). Так как соответствие между точками A_1 и A_2 проективно, геометрическим местом точек A' является коника, проходящая через A и C. Когда A_1 лежит на внутренней или внешней биссектрисе угла C, прямые AA_2 и CA_1 параллельны, следовательно, эта коника — равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными биссектрисам. Аналогично, ГМТ B' — равносторонняя гипербола, проходящая через B и C с асимптотами, параллельными биссектрисам. Соответствие между A' и B' также проективно, причем в точку C и бесконечные точки гипербол эти точки попадают одновременно. Следовательно все прямые $A'B'$ проходят через четвертую точку пересечения гипербол.

4. (Г.Галяпин) В треугольнике ABC вписанная окружность ω с центром I касается BC в точке D. Точка P — проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану из вершины A. Докажите, что окружности AIP и ω высекают на AD равные отрезки

   Решение. Пусть M — середина BC, N — середина AD, E — вторая точка пересечения AD и ω, F — точка пересечения прямой MI с окружностью DIE. Известно, что окружности BCP и ABC равны, поэтому $MP \cdot MA = MB^2$. Кроме того, точки M, I, N лежат на одной прямой (прямая Гаусса вырожденного четырехугольника $ABDC$). Наконец, четырехугольник $DB'EC'$, где B' и C' — точки касания ω со сторонами AC

и AB, — гармонический, поэтому касательная к ω, проведенная в E, проходит через точку $Z = B'C' \cap BC$, дополняющую B, C, D до гармонической четверки. Тогда любая окружность, проходящая через D и Z, ортогональна окружности с диаметром BC, в частности, такова окружность DIE (с диаметром IZ). Следовательно, $MI \cdot MF = MB^2 = MP \cdot MA$, т.е. четырехугольник $AFIP$ – вписанный (рис. 9.4). Тогда степени N относительно ω и (AIP) равны, откуда следует требуемое.

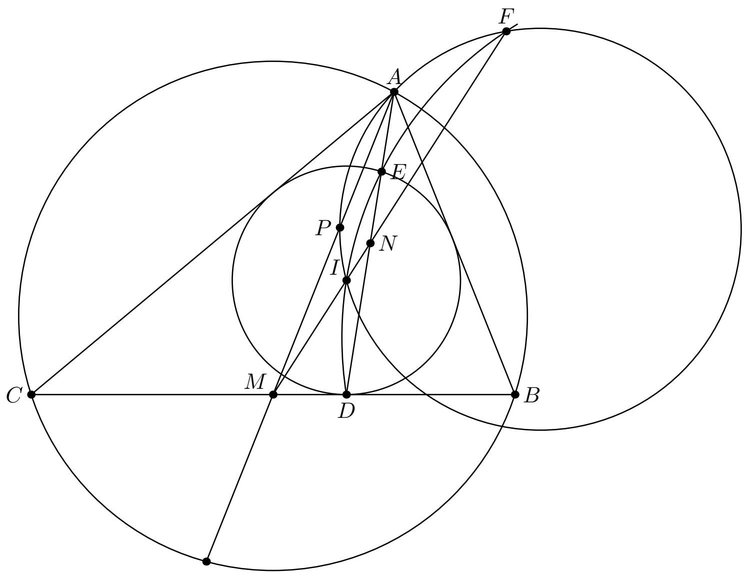

Рис. 9.4

Примечание. Точка F является инверсным образом точек N и I относительно окружности с диаметром BC и ω соответственно.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2023 г.

5. (А.Марданов) На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D. Луч AD пересекает прямую, проходящую через вершину B и параллельную основанию AC, в точке E. Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника ABD в точке B делит отрезок EC пополам.

   Решение. Пусть M — точка пересечения касательной с отрезком CE. Тогда $\angle CBM = \angle DAB$ и, значит, $\angle MBE = \angle CAD$. С другой стороны, $BC : BE = (BC : AC)(AC : BE) = (AB : AC)(CD : BD) = \sin\angle DAC : \sin\angle DAB$. Следовательно, BM — медиана треугольника BCE (рис.9.5).

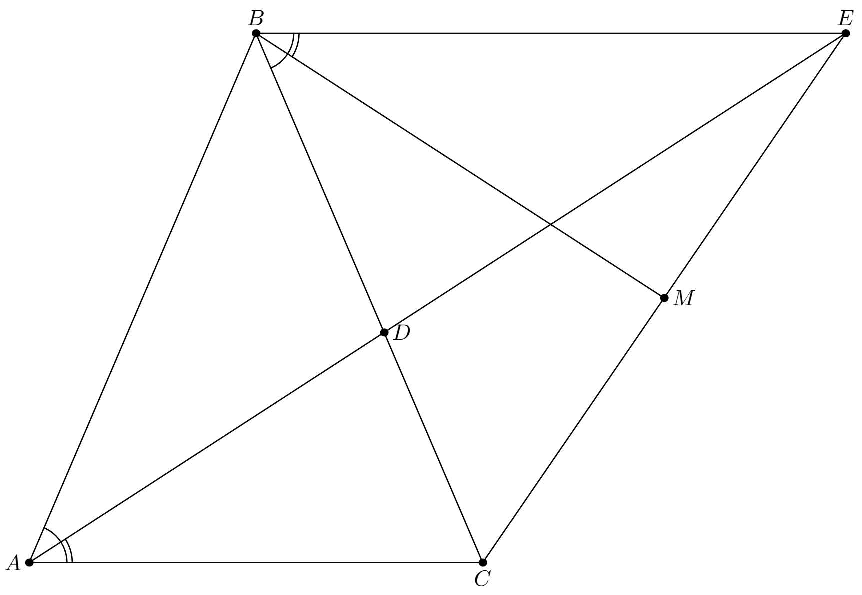

Рис. 9.5

6. (Г.Забазнов) Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Пусть H и M — точка пересечения высот и середина стороны BC соответственно. Прямая HM пересекает окружность ω, описанную около треугольника BHC, в точке $N \neq H$. На дуге BC окружности ω, не содержащей точку H, нашлась точка P такая, что $\angle HMP = 90°$. Отрезок PM пересекает Ω в точке Q. Точки B' и C' симметричны точке A относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$ и PQN касаются.

Решение. Пусть T — точка Ω, противоположная A (центр $AB'C'$, как известно, T лежит на MH), а точка Q' симметрична A относительно Q. Так как окружности Ω и ω симметричны относительно M, $MQ \cdot MP = MH \cdot MN = MT \cdot MN$, т.е. T лежит на окружности PQN. Кроме того, треугольники MQN и MHP (равный MTP) подобны, значит, $\angle NHP = \angle NQM$ и радиусы окружностей PQN и ω равны. Следовательно, окружность PQN симметрична Ω относительно QT и касается в точке Q' окружности $AB'C'$ (рис. 9.6).

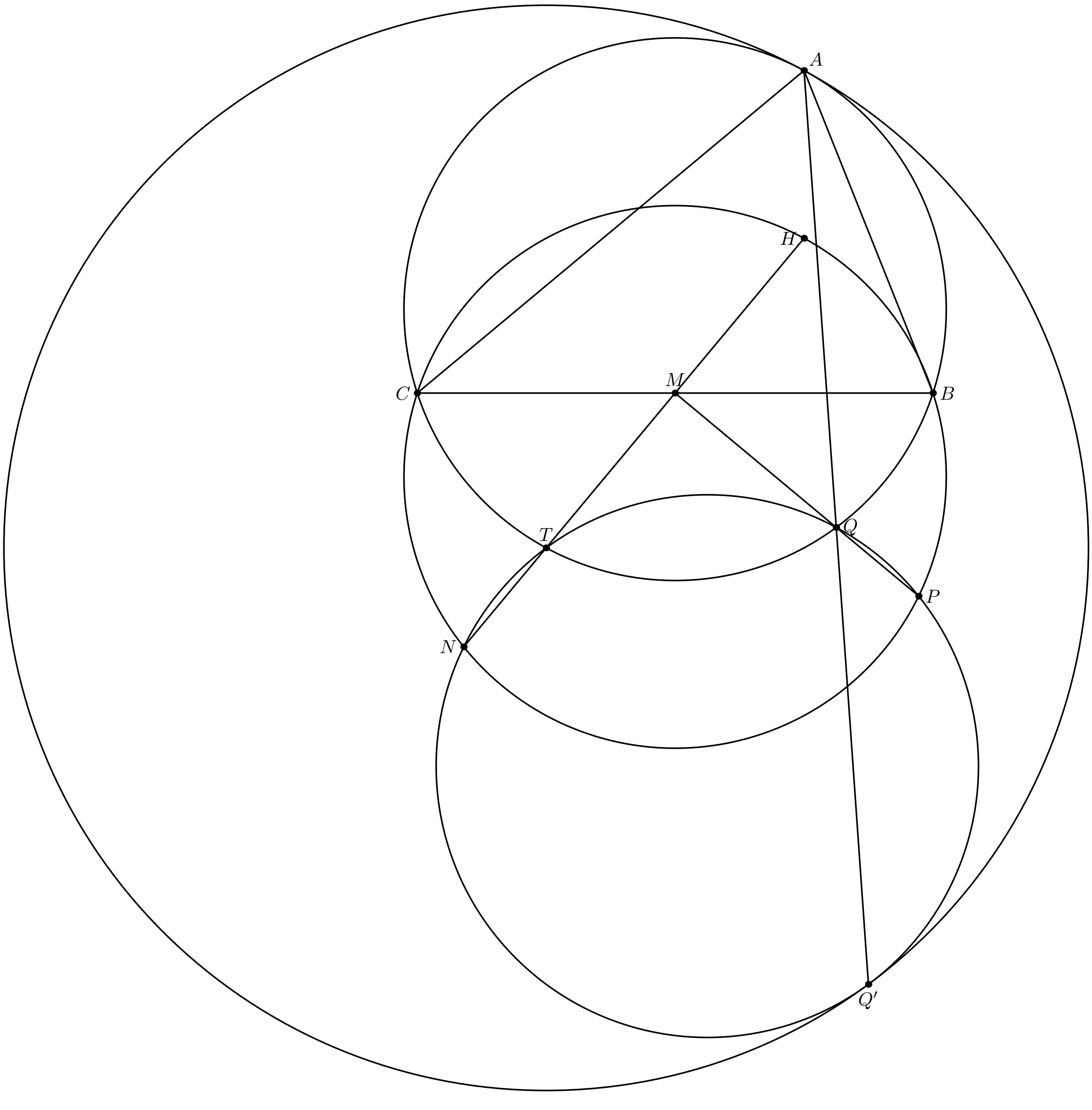

Рис. 9.6

7. (Ф.Бахарев) Точка H — ортоцентр треугольника T. Стороны треугольника T_1 проходят через середины сторон треугольника T и перпендикулярны соответствующим биссектрисам T. Вершины треугольника T_2 являются серединами биссектрис треугольника T. Докажите, что прямые, соединяющие H с вершинами треугольника T_1 перпендикулярны сторонам треугольника T_2.

   Решение. Докажем следующее утверждение: прямые, соединяющие H с вершинами треугольника, T_1 являются радикальными осями окружностей, построенных на биссектрисах треугольника T как на диаметрах. Из этого следует утверждение задачи. Поскольку указанные радикальные оси по условию перпендикулярны линиям центров, то достаточно проверить, что вершины треугольника T_1 имеют одинаковые степени для соответствующих пар окружностей. Мы проверим больше, что вершина треугольника T_1 является радикальным центром двух окружностей, построенных на биссектрисах как на диаметрах и окружности, вписанной в треугольник T. Поскольку сторона треугольника T_1 перпендикулярна биссектрисе треугольника T (то есть линии центров вписанной окружности и окружности, построенной на биссектрисе, как на диаметре), то достаточно проверить, что середина стороны имеет одинаковые степени относительно вписанной окружности и окружности, построенной на биссектрисе как на диаметре.

   Обозначим вершины треугольника T через A, B и C, середину стороны BC через M, основание биссектрисы через L, основание высоты через D и точку касания с вписанной окружностью через T. Нам достаточно проверить, что $MT^2 = ML \cdot MD$. Обозначим стороны треугольника через a, b и c. Тогда $MT = |b-c|/2$, $ML = a|b-c|/2(b+c)$, $MD = |b^2-c^2|/2a$, откуда и следует требуемое.

8. (М.Дидин, И.Фролов) В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Точка I — центр вписанной окружности, M — середина BC. Прямая, проходящая через M и параллельная AI, пересекает окружность с диаметром BC в точках E и F (точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC). Прямая, проходящая через E и перпендикулярная FI, пересекает прямые AB и AC в точках P и Q. Найдите угол PIQ.

   Ответ. $90°$.

   Решение. Заметим, что описанная окружность треугольника ABC образует равные углы с окружностями BCI и BCE. Следовательно, эти окружности меняются при инверсии относительно описанной окружности, а центр O этой окружности является центром их внутренней гомотетии. Так как прямая AI проходит через центр окружности BIC и параллельна прямой EF, точка O лежит на прямой FI.

Пусть P', Q' — точки, симметричные C и B относительно BI и CI соответственно, E', M — середины $P'Q'$ и BC соответственно. Тогда треугольники BIQ', CIP' — правильные, а вектор $E'M$ равен полусумме векторов $Q'B$ и $P'C$. Поскольку угол между этими векторами равен $30^\circ = \pi - \angle BIC$, $E'M = BC/2$. Кроме того, вектор $E'M$ и высота треугольника BIC образуют равные углы с биссектрисой угла BIC, поэтому $E'M \parallel AI$ и E' совпадает с E. Воспользуемся теперь следующим утверждением.

Лемма. Пусть на сторонах треугольника XYZ как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники XYZ', YZX', ZXY' такие, что $\angle X'ZY = \angle Y'ZX = \pi/2 - \angle Z'XY$. Тогда $ZZ' \perp X'Y'$.

Доказательство. Пусть точки X'', Y'' симметричны Z относительно X, Y, P — проекция Z на $X''Y''$. Тогда четырехугольники $ZPX''Y$, $ZPY''X$ — вписанные, следовательно, $\angle YPX'' = \angle XPY'' = \angle X'ZY$ и биссектриса ZP угла XPY пересекает серединный перпендикуляр к отрезку XY в точке Z'.

□

Применяя лемму к треугольникам BIQ', CIP' и BOC, получаем, что $OI \perp P'Q'$ (рис. 9.8). Поэтому точки P', Q' совпадают с P, Q и $\angle PIQ = 90^\circ$.

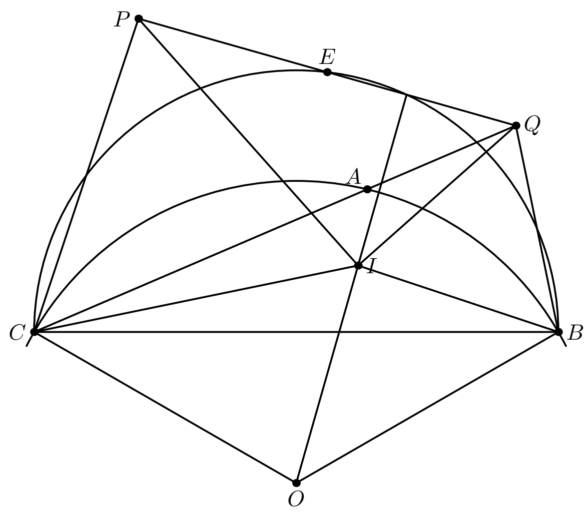

Рис. 9.8

Примечание. Лемма предлагалась как задача на XXX Турнире Городов, см. также книгу А.Акопян, А.Заславский "Геометрические свойства кривых второго порядка". МЦНМО. 2011.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

1. (А.Марданов) Пусть точка M — середина катета AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A. На медиане AN треугольника AMC отмечена точка D, так что углы ACD и BCM равны. Докажите, что угол DBC также равен этим углам.

   Первое решение. Так как CM — медиана, $AC : BC = \sin\angle MCB : \sin\angle MCA = \sin\angle ACD : \sin\angle DAC = AD : CD$, т.е. $AC : AD = BC : CD$. Кроме того, $\angle CAD = \angle ACM = \angle BCD$. Следовательно, треугольники ACD и BDC подобны и $\angle DBC = \angle ACD$ (рис. 10.1).

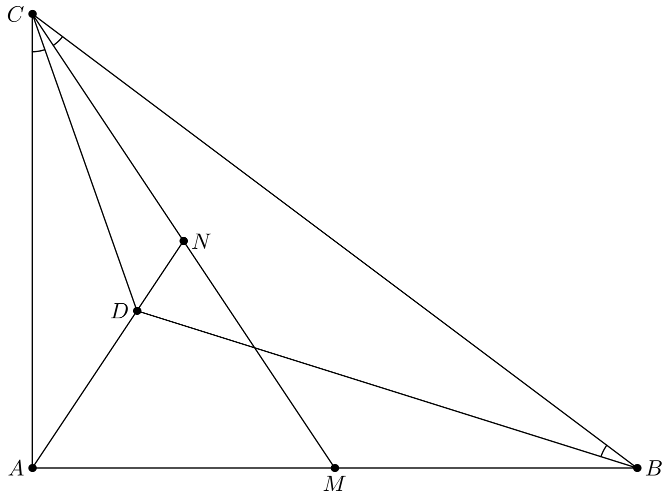

Рис. 10.1

   Второе решение. Точка D', изогонально сопряженная D относительно треугольника ABC, является проекцией A на CM. Поэтому $MB^2 = MA^2 = MD' \cdot MC$, треугольники BMC и $D'MB$ подобны и $\angle DBC = \angle D'BM = \angle BCM$.

   Примечание. Точка D' является проекцией ортоцентра треугольника ABC на медиану, т.е. точкой Шалтая. Соответственно точка D — точка Болтая.

2. (М.Плотников, Б.Френкин) Прямая Эйлера неравнобедренного треугольника касается вписанной в него окружности. Докажите, что треугольник тупоугольный.

Первое решение. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC, O — центр его описанной окружности, I — центр вписанной, A', B', C' — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Предположим, что треугольник ABC не тупоугольный и точка касания прямой OH с вписанной окружностью лежит на дуге $B'C'$. Тогда точки O, H лежат внутри (или на границе) треугольника ABC, а значит и внутри четырехугольника $IB'AC'$. Следовательно, проекции O и H на AB лежат на отрезке AC'. Но точка касания вписанной окружности со стороной лежит между серединой этой стороны и основанием опущенной на нее высоты — противоречие.

Второе решение (схема). Воспользуемся следующим фактом: в остроугольном неравнобедренном треугольнике прямая Эйлера пересекает наибольшую и наименьшую стороны, а в тупоугольном — две наибольшие. Пусть прямая Эйлера разрезает треугольник на треугольник и четырехугольник. Докажем, что I лежит внутри четырехугольника тогда и только тогда, когда исходный треугольник тупоугольный.

Зафиксируем описанную и вписанную окружности треугольника и будем "вращать" его между ними. Форма части, в которой лежит точка I может поменяться либо, когда I попадает на прямую Эйлера, либо, когда эта прямая проходит через одну из вершин треугольника. Но в первом случае треугольник равнобедренный, т.е. одна из его вершин попадает на прямую OI и при переходе через это положение конфигурация меняется на симметричную. Следовательно форма части не меняется. Во втором случае прямая Эйлера является медианой прямоугольного треугольника, а I лежит в части, прилегающей к его меньшему катету. Когда треугольник становится остроугольным, эта часть остается треугольной, а когда тупоугольным — становится четырехугольником.

3. (М.Дидин, И.Фролов) Около остроугольного треугольника ABC описана окружность ω с центром O. Точка A' диаметрально противоположна A на ω. На меньшей дуге BC окружности ω выбрана точка D. Точка D' симметрична D относительно стороны BC. Прямая $A'D'$ вторично пересекает ω в точке E. Серединный перпендикуляр к $D'E$ пересекает стороны AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что $\angle FOG = 180^\circ - 2\angle BAC$.

   Первое решение. Пусть прямая, проходящая через D' и перпендикулярная $A'D'$, пересекает AB и AC в точках F', G' соответственно. Так как $\angle AEA' = 90^\circ$, $AF = FF'$, $AG = GG'$ и $\angle FOG = \angle F'A'G'$. Так как $\angle ABA' = \angle ACA' = 90^\circ$, четырехугольники $A'BF'D'$ и $A'G'CD'$ — вписанные, следовательно, $\angle F'A'G' = \angle F'A'D' + \angle D'A'G' = \angle ABD' + \angle D'CA = \angle CD'B - \angle CAB = 180^\circ - 2\angle CAB$. (рис. 10.3).

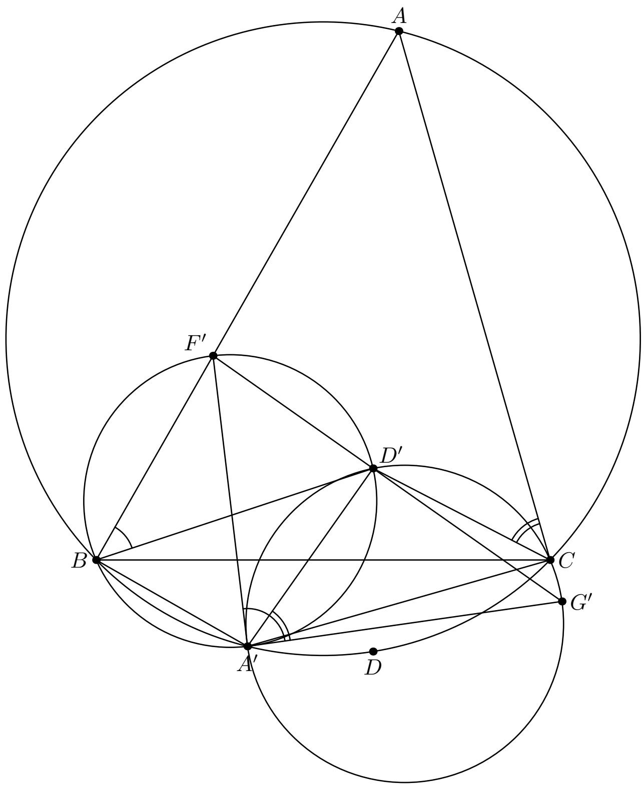

Рис. 10.3

Второе решение. Условие $\angle FOG + \angle BOC = \pi$ равносильно существованию точки, изогонально сопряженной O относительно четырехугольника $BFGC$, или тому, что проекции O на стороны четырехугольника лежат на одной окружности. Поскольку $FG \parallel AE$, проекция O на FG лежит на серединном перпендикуляре к AE, т.е. совпадает с серединой AD'. Но точка D' лежит на окружности BCH (H — ортоцентр треугольника ABC), которая при гомотетии с центром A и коэффициентом $1/2$ переходит в окружность девяти точек треугольника ABC.

Примечание. Так как точки O и H изогонально сопряжены относительно треугольника ABC, они являются фокусами вписанного в треугольник эллипса. Прямая FG также касается этого эллипса, поэтому проекция H на FG лежит на окружности девяти точек, а $\angle FHG = \angle BAC$.

4. (D.Reznik, А.Заславский, Д.Бродский) Пусть ABC — треугольник Понселе, точка A_1 симметрична A относительно центра вписанной окружно-

сти I, точка A_2 изогонально сопряжена A_1 относительно ABC. Найдите ГМТ A_2.

Ответ. Радикальная ось точки I и описанной окружности ABC.

Первое решение. Пусть P — точка пересечения BA_2 с описанной окружностью ABC, N — середина меньшей дуги AC, N_1 симметрична N относительно I, S — середина меньшей дуги BC. Тогда четырехугольник N_1BA_1S — вписанный. Пусть R точка пересечения N_1S с окружностью ABC. Легко видеть, что дуги RP и AN равны.

Обозначим через Q вторую точку пересечения окружности SBA_1 с прямой BC. Имеем $\angle QSR = \angle NBC = \smile NC/2 = \smile RP/2 = \angle RSP$, следовательно P, Q, S лежат на одной прямой. Значит $\angle IN_1S = \angle BQP = (\smile CS + \smile BP)/2 = \smile SP/2 = \angle N_1RP$. Кроме того $N_1I = NI = NA = PR$, поэтому N_1PIR — равнобокая трапеция и $PI \parallel N_1S$. Наконец, $\angle PIA = \angle N_1SA = \angle IBA_1 = \angle IBP$, т.е окружность IBP касается IA_2 и A_2 лежит на радикальной оси I и окружности ABC (рис. 10.4).

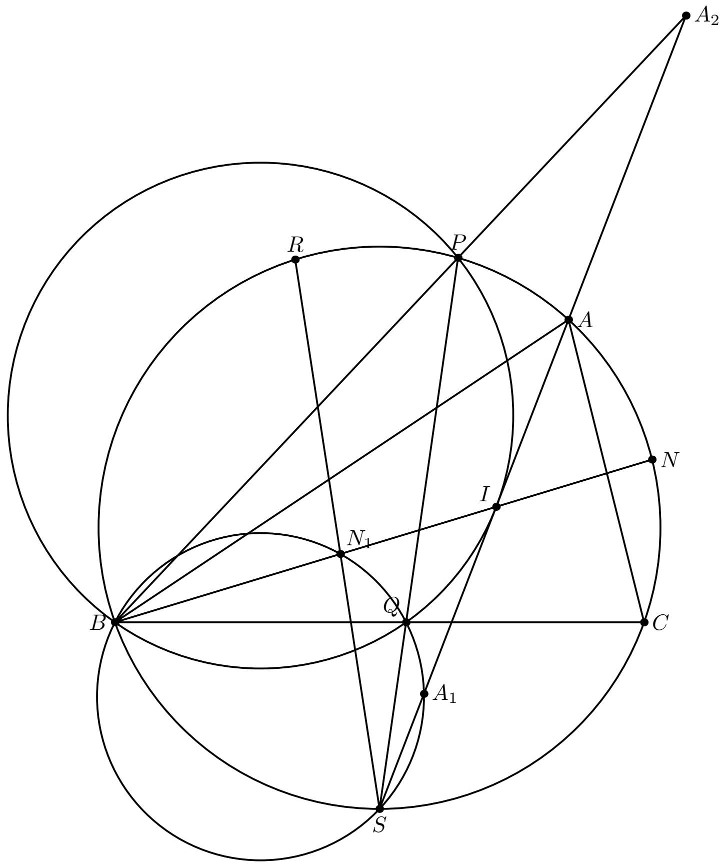

Рис. 10.4

Второе решение. Заметим, что точки A_1 и A_2 инверсны относительно окружности BIC. Действительно, на прямой AI изогональное сопряжение и инверсия задают проективные отображения, которые оставляют на месте центры вписанной и вневписанной окружностей, а середину S дуги BC переводит в бесконечную точку.

Пусть $SI = 1$, $SA_1 = x$. Тогда $SA = 2 - x$, $SA_2 = 1/x$ и степень A_2 относительно окружности ABC равна $A_2A \cdot A_2S = (1/x - 2 + x)/x = (1/x - 1)^2 = A_2I^2$.

Примечание. Утверждение задачи является частным случаем следующего факта: если ℓ — фиксированная прямая, то изогональные образы ℓ относительно треугольников ABC являются кониками, дважды касающимися двух фиксированных окружностей. В рассматриваемом случае эти окружности концентричны с центром I.

Третье решение. (С.Шестаков) Пусть точки B', C' симметричны A_1 относительно BI, CI соответственно. Тогда $IA = IB_1 = IC_1$. Кроме того, по теореме о трилистнике $SI = SB = SC$, значит, $\angle BIB' = \angle BIS = \angle IBS$ и $\angle AIB' = \angle ASB$. Следовательно, $IB' \parallel SB$. Аналогично $IC' \parallel SC$, т.е. четырехугольники $SBIC$ и $IB'AC'$ гомотетичны. Центром гомотетии является точка A_2, поскольку прямые BB' и BA_1 симметричны относительно AI. Таким образом, $A_2A : A_2I = A_2I : A_2S$ т.е. $A_2I^2 = A_2A \cdot A_2S$.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2023 г.

5. (А.Терешин) В треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны BC в точке D. Точка M -— середина дуги BAC описанной окружности треугольника. Точки P и Q -— проекции точки M на внешние биссектрисы углов B и C. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AD пополам.

Первое решение. Пусть I_c, I_b — центры вневписанных окружностей, касающихся сторон AB, AC соответственно. Так как M — середина I_aI_b и $MP \parallel BI_b$, точка P — середина BI_c. Поэтому, опустив перпендикуляры PP', PP'' на BC и AB соответственно, получим $P''B = P'B = (p-a)/2$. Поскольку $AB - BD = p - a$, $P'D = P'B + BD = AB - P''B = P''A$. Следовательно, $PD = PA$. Аналогично $QD = QA$, т.е. PQ — серединный перпендикуляр к AD (рис. 10.5).

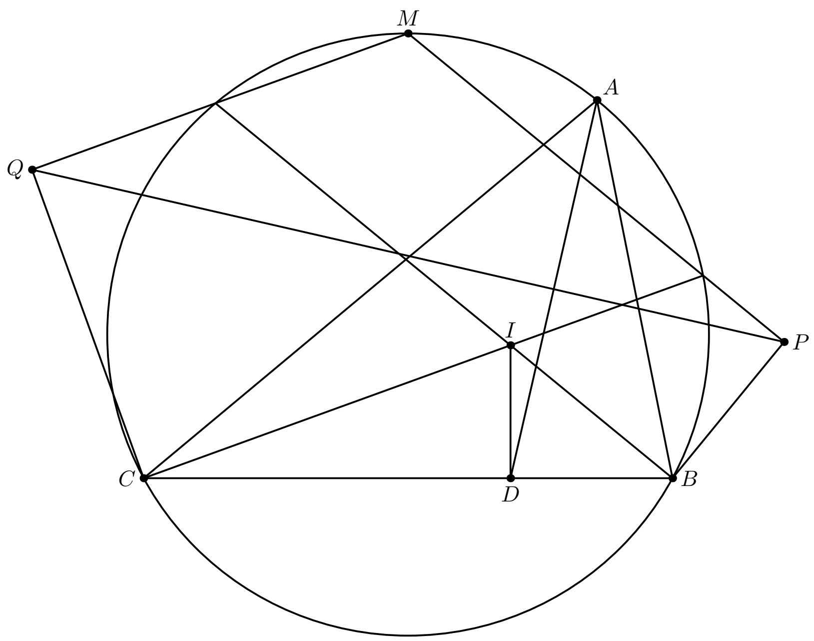

Рис. 10.5

Второе решение. Пусть точка X равномерно движется от B до C, а точка Y — от I_c до I_b. Тогда середина отрезка XY тоже равномерно движется по прямой PQ. Поскольку IA и ID — высоты подобных треугольников II_cI_b и IBC, X и Y попадают в D и A соответственно одновременно. Следовательно, середина AD лежит на PQ.

6. (Tran Quang Hung) Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC.

Первое решение. Пусть ω_1, ω_2 — окружности, описанные около треугольников AEB, AED соответственно, R_1 и R_2 — радиусы ω_1 и ω_2, а X — центр их внешней гомотетии. Тогда

$$Power(X, \omega_1) : Power(X, \omega_2) = R_1^2 : R_2^2. \tag{1}$$

Пусть прямые CB и CD повторно пересекают ω_1 и ω_2 соответственно в точках M и N. Очевидно, AN и AM — диаметры ω_1 и ω_2, кроме того, треугольник AND подобен треугольнику AMB, а треугольник AMN — треугольнику ABD. Поэтому

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{AM}{AN} = \frac{CD}{CB}, \tag{2}$$

С другой стороны

$$\frac{CM}{CN} = \frac{\sin\angle ENC}{\sin\angle EMC} = \frac{\sin\angle EAD}{\sin\angle EAB} = \frac{ED}{EB}\frac{AB}{AD} = \frac{CD^3}{CB^3}.$$

Следовательно,

$$\frac{Power(C, \omega_1)}{Power(C, \omega_2)} = \frac{CB \cdot CM}{CD \cdot CN} = \frac{R_1^2}{R_2^2}. \tag{3}$$

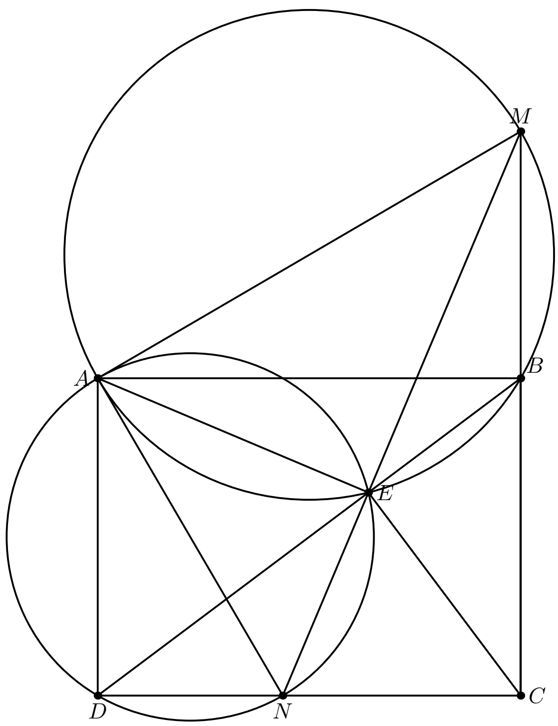

Рис. 10.6

Из (1) и (3) получаем, что X и C лежат на окружности, соосной с ω_1 и ω_2, т.е. точки X, C, A и E лежат на одной окружности.

Примечание. Аналогично можно доказать, что центр внутренней гомотетии ω_1 и ω_2 лежит на окружности AEC.

Второе решение. Будем считать, что $AB > BC$ и соответственно $DE > BE$. Пусть S — середина дуги ACE, T — образ точки D при инверсии с центром S и радиусом SA. Тогда достаточно доказать, что T лежит на окружности AEB. Имеем $\angle ATE = \angle ATS + \angle STE = \angle SAD + \angle DES = \angle EDA - \angle ESA = \angle BAC - \angle ECA = \angle ABE$, ч.т.д.

7. (А.Скопенков, И.Богданов) В пространстве имеется 43 точки: 3 желтых и 40 красных. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Может ли количество треугольников с красными вершинами, зацепленных с треугольником с желтыми вершинами, быть равно 2023? *Жёлтый треугольник зацеплен с красным, если контур красного пересекает часть плоскости, ограниченную жёлтым, ровно в одной точке. Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.*

   Ответ. Нет.

   Решение. Соединим отрезком каждую пару красных точек, лежащих по разные стороны от желтой плоскости (проходящей через три желтые точки), и покрасим отрезки, пересекающие желтый треугольник во внутренней точке в черный цвет, а остальные — в белый. Очевидно, что число красных треугольников, зацепленных с желтым,равно числу пар разноцветных отрезков, имеющих общую вершину. Назовем такую пару *галкой.* Если число красных точек по каждую сторону желтой плоскости нечетно, то количества черных и белых отрезков, выходящих из каждой красной точки имеют разную четность, поэтому каждая красная точка является вершиной для четного числа галок. Если же число красных точек по каждую сторону от желтой плоскости четно, то рассмотрим граф, вершинами которого являются красные точки, а ребрами черные отрезки. Число вершин нечетной степени в нем четно, следовательно, общее число галок опять будет четным.

8. (Л.Шатунов) Дан треугольник ABC и окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 с центрами X, Y, Z, T соответственно такие, что каждая из прямых BC, CA, AB высекает на них четыре равных отрезка. Докажите, что точка

пересечения медиан треугольника ABC делит отрезок с концами в X и радикальном центре ω_2, ω_3, ω_4 в отношении $2:1$, считая от X.

Решение. Докажем, что описанная окружность Ω треугольника ABC является окружностью девяти точек треугольника YZT. Действительно, пусть M — середина YZ, M_a, M_b, M_c — проекции M на BC, CA, AB соответственно, Y_a, Z_a — проекции Y, Z на BC. Тогда M_a — середина Y_aZ_a и, поскольку прямая BC высекает на окружностях ω_2, ω_3 равные хорды, степени M_a относительно этих окружностей равны. Аналогично равны степени относительно этих окружностей точек M_b, M_c. Следовательно, проекции точки M на стороны треугольника ABC лежат на одной прямой (радикальной оси), т.е. M лежит на Ω. Аналогично на Ω лежат середины отрезков YT, ZT, XY, XZ, XT. Значит, точки X, Y, Z, T образуют ортоцентрическую четверку, а Ω является окружностью девяти точек треугольников XYZ, YZT, XZT, XYT.

Пусть теперь O — центр Ω, H — ортоцентр треугольника ABC, H' — центр окружности YZT, X' — радикальный центр ω_2, ω_3, ω_4, H_t и R_t — проекции H и X' на YZ. Тогда прямая HH_t параллельна прямой Симсона $X'R_t$ точки M и проходит через ортоцентр ABC. Поэтому HH_t — прямая Штейнера точки M и X' — середина HH'. Кроме того, O — середина XH' (потому что X — ортоцентр YZT). Следовательно, центр тяжести G треугольника ABC является также центром тяжести точек H, X, H', т.е G лежит на XX' и $GX = 2GX'$.

Примечание. Частным случаем окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 являются вписанная и три вневписанных окружности треугольника, для которых утверждение задачи хорошо известно.