XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 30 июля 2023 г.

1. Точка D лежит на основании AB равнобедренного тупоугольного треугольника ABC так, что отрезок AD равен радиусу описанной окружности треугольника BCD. Найдите угол ACD.

2. Биссектрисы углов A, B и C треугольника ABC вторично пересекают описанную окружность в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2; C_2 — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 соответственно. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

3. Высоты параллелограмма больше 1. Обязательно ли в него можно поместить единичный квадрат?

4. В остроугольном треугольнике ABC O — центр описанной окружности, BM — медиана, BH — высота. Окружности AOB и BHC повторно пересекаются в точке E, а окружности AHB и BOC — в точке F. Докажите, что $ME = MF$.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

5. В остроугольном треугольнике ABC медиана CM и высота AH пересекаются в точке O. Вне треугольника отмечена точка D так, что $AOCD$ — параллелограмм. Чему равно BD, если известно, что $MO = a$, $OC = b$?

6. При каких n можно замостить плоскость равными фигурами, ограниченными n дугами окружностей?

7. Биссектриса угла A треугольника ABC при продолжении пересекает описанную около него окружность ω в точке W. Окружность s, построенная на отрезке AH как на диаметре (H — ортоцентр в треугольнике ABC), пересекает ω в точке P. Восстановите треугольник ABC, если остались точки A, P, W.

8. Даны две окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точке A, и прямая a. Пусть BC — произвольная хорда окружности ω_2, параллельная a, а E и F — вторые точки пересечения прямых AB и AC с ω_1. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых BC и EF.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 30 июля 2023 г.

1. В треугольнике ABC отношение медианы AM к стороне BC равно $\sqrt{3}:2$. На сторонах ABC отмечены точки, делящие каждую сторону на 3 равные части. Докажите, что какие-то 4 из этих 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

2. Можно ли поместить правильный треугольник внутрь правильного шестиугольника так, чтобы из любой вершины шестиугольника были видны все три вершины треугольника? (*Точка A видна из точки B, если отрезок AB не содержит внутренних точек треугольника.*)

3. Дан треугольник ABC. Точки A_1, A_2, B_1, B_2 берутся на его описанной окружности так, что $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1A_2 \parallel BC$, $B_1B_2 \parallel AC$. Прямые AA_2 и CA_1 пересекаются в точке A', а прямые BB_2 и CB_1 — в точке B'. Докажите, что все прямые $A'B'$ проходят через одну точку.

4. В треугольнике ABC вписанная окружность ω с центром I касается BC в точке D. Точка P — проекция ортоцентра треугольника ABC на медиану из вершины A. Докажите, что окружности AIP и ω высекают на AD равные отрезки

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

5. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC выбрана точка D. Луч AD пересекает прямую, проходящую через вершину B и параллельную основанию AC, в точке E. Докажите, что касательная к описанной окружности треугольника ABD в точке B делит отрезок EC пополам.

6. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность Ω. Пусть H и M — точка пересечения высот и середина стороны BC соответственно. Прямая HM пересекает окружность ω, описанную около треугольника BHC, в точке $N \neq H$. На дуге BC окружности ω, не содержащей точку H, нашлась точка P такая, что $\angle HMP = 90°$. Отрезок PM пересекает Ω в точке Q. Точки B' и C' симметричны точке A относительно точек B и C соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников $AB'C'$ и PQN касаются.

7. Точка H — ортоцентр треугольника T. Стороны треугольника T_1 проходят через середины сторон треугольника T и перпендикулярны соответствующим биссектрисам T. Вершины треугольника T_2 являются серединами биссектрис треугольника T. Докажите, что прямые, соединяющие H с вершинами треугольника T_1 перпендикулярны сторонам треугольника T_2.

8. В треугольнике ABC угол A равен $120°$. Точка I — центр вписанной окружности, M — середина BC. Прямая, проходящая через M и параллельная AI, пересекает окружность с диаметром BC в точках E и F (точки A и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC). Прямая, проходящая через E и перпендикулярная FI, пересекает прямые AB и AC в точках P и Q. Найдите угол PIQ.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 30 июля 2023 г.

1. Пусть точка M – середина катета AB прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A. На медиане AN треугольника AMC отмечена точка D, так что углы ACD и BCM равны. Докажите, что угол DBC также равен этим углам.

2. Прямая Эйлера неравнобедренного треугольника касается вписанной в него окружности. Докажите, что треугольник тупоугольный.

3. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность ω с центром O. Точка A' диаметрально противоположна A на ω. На меньшей дуге BC окружности ω выбрана точка D. Точка D' симметрична D относительно стороны BC. Прямая $A'D'$ вторично пересекает ω в точке E. Серединный перпендикуляр к $D'E$ пересекает стороны AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что $\angle FOG = 180^\circ - 2\angle BAC$.

4. Пусть ABC — треугольник Понселе, точка A_1 симметрична A относительно центра вписанной окружности I, точка A_2 изогонально сопряжена A_1 относительно ABC. Найдите ГМТ A_2.

XIX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2023 г.

5. В треугольнике ABC вписанная окружность касается стороны BC в точке D. Точка M -— середина дуги BAC описанной окружности треугольника. Точки P и Q -— проекции точки M на внешние биссектрисы углов B и C. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AD пополам.

6. Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC.

7. В пространстве имеется 43 точки: 3 желтых и 40 красных. Никакие четыре из них не лежат в одной плоскости. Может ли количество треугольников с красными вершинами, зацепленных с треугольником с желтыми вершинами, быть равно 2023? *Жёлтый треугольник зацеплен с красным, если контур красного пересекает часть плоскости, ограниченную жёлтым, ровно в одной точке. Треугольники, отличающиеся перестановкой вершин, считаются одинаковыми.*

8. Дан треугольник ABC и окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 с центрами X, Y, Z, T соответственно такие, что каждая из прямых BC, CA, AB высекает на них четыре равных отрезка. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC делит отрезок с концами в X и радикальном центре ω_2, ω_3, ω_4 в отношении $2 : 1$, считая от X.