XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 8 класс

Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (И.Кухарчук) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle BAD = 2\angle BCD$ и $AB = AD$. Пусть P — такая точка, что $ABCP$ — параллелограмм. Докажите, что $CP = DP$.

2. (А.Марданов) Точка M — середина большей боковой стороны CD прямоугольной трапеции $ABCD$. Описанные около треугольников BCM и AMD окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точке E. Пусть ED пересекает ω_1 в точке F, а FB пересекает AD в G. Докажите, что GM — биссектриса угла BGD.

3. (D.Reznik, А.Заславский) Даны окружность ω и не лежащая на ней точка P. Пусть ABC — произвольный правильный треугольник, вписанный в ω, а A', B', C' — проекции P на прямые BC, CA, AB. Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников $A'B'C'$.

4. (А.Марданов) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Пусть P – точка пересечения его диагоналей, а точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Окружность OPM вторично пересекает отрезки AP и BP в точках A_1 и B_1 соответственно, а окружность OPN вторично пересекает отрезки CP и DP в точках C_1 и D_1 соответственно. Докажите, что площади четырёхугольников AA_1B_1B и CC_1D_1D равны.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 8 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (Д.Швецов) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A' — точка симметричная A_1 относительно прямой B_1C_1; аналогично определяется точка C'. Прямые $A'C_1$ и $C'A_1$ пересекаются в точке D. Докажите, что $BD \parallel AC$.

6. ($\boxed{\text{А.Бремзен}}$, А.Кулаков) Даны две окружности, пересекающиеся в точках A, B, и точка O, лежащая вне их. Циркулем и линейкой постройте луч с началом O, пересекающий первую окружность в точке C, а вторую — в точке D, так чтобы отношение $OC : OD$ было максимальным.

7. (А.Шаповалов) На плоскости даны десять точек таких, что любые четыре лежат на контуре некоторого квадрата. Верно ли, что все десять лежат на контуре некоторого квадрата?

8. (И.Кухарчук) Дана равнобокая трапеция $ABCD$ ($AB = CD$). На описанной около нее окружности выбирается точка P так, что отрезок CP пересекает основание AD в точке Q. Пусть L — середина QD. Докажите, что длина диагонали трапеции не превосходит суммы расстояний от середин ее боковых сторон до любой точки прямой PL.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 9 класс

Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (Д.Швецов) Пусть BH — высота прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$). Вневписанная окружность треугольника ABH, противолежащая вершине B, касается прямой AB в точке A_1; аналогично определяется точка C_1. Докажите, что $AC \parallel A_1C_1$.

2. (Д.Бродский) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ ($AD > BC$) пересекаются в точке P. На отрезке AD нашлась такая точка Q, что $BQ = CQ$. Докажите, что линия центров окружностей, описанных около треугольников AQC и BQD, перпендикулярна прямой PQ.

3. (Л.Емельянов) Окружности s_1 и s_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проводятся всевозможные прямые, вторично пересекающие окружности в точках P_1 и P_2. Постройте циркулем и линейкой ту прямую, для которой $P_1A \cdot AP_2$ принимает наибольшее значение.

4. (Б.Яковлев) Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$, P — середина меньшей дуги AB окружности ABC, Q — середина отрезка AC. Окружность с центром в O описанная около APQ, вторично пересекает AB в точке K. Докажите, что прямые PO и KQ пересекаются на биссектрисе угла ABC.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 9 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (А.Марданов) Хорды AB и CD окружности ω пересекаются в точке E, так что $AD = AE = EB$. На отрезке CE отметили точку F, так что $ED = CF$. Биссектриса угла AFC пересекает дугу DAC в точке P. Докажите, что точки A, E, F и P лежат на одной окружности.

6. (А.Марданов) Средняя линия, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его описанную окружность в точках X и Y. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, а D — середина дуги AC, не содержащей точку B. На отрезке DI отметили точку L такую, что $DL = BI/2$. Докажите, что точки X и Y смотрят на отрезок IL под равными углами.

7. (И.Кухарчук) Пусть высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Окружность, описанная около треугольника AHC, пересекает отрезки AB и BC в точках P и Q. Прямая PQ пересекает AC в R. На прямой PH взята точка K такая, что $\angle KAC = 90°$. Докажите, что прямая KR перпендикулярна одной из медиан треугольника ABC.

8. (Ф.Нилов) На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно пять отмеченных точек, а через каждую отмеченную точку проходят ровно пять окружностей?

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Первый день. 10 класс

Ратмино, 31 июля 2022 г.

1. (Tran Quang Hung) Даны два одинаково ориентированных квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Серединные перпендикуляры к отрезкам A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 пересекают серединные перпендикуляры к отрезкам A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_1B_1 в точках P, Q, R, S соответственно. Докажите, что $PR \perp QS$.

2. (А. Кузнецов) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Общие внешние касательные к окружностям (ABC) и (ACD) пересекаются в точке E, к окружностям (ABD) и (BCD) — в точке F. Докажите, что если точка F лежит на прямой AC, то точка E лежит на прямой BD.

3. (Г.Челноков) Прямая пересекает отрезок AB в точке C. Какое максимальное число точек X может найтись на этой прямой так, чтобы один из углов AXC и BXC был в два раза больше другого?

4. (А.Матвеев, И.Фролов) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = \angle D$. Докажите, что середина диагонали BD лежит на общей внутренней касательной к окружностям, вписанным в треугольники ABC и ACD.

XVIII Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. Второй день. 10 класс

Ратмино, 1 августа 2022 г.

5. (А.Марданов, К.Струихина.) Из точки A к окружности Ω проведены касательные AB и AC. На отрезке BC отмечена середина M и произвольная точка P. Прямая AP пересекает окружность Ω в точках D и E. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям MDP и MPE пересекаются на средней линии треугольника ABC.

6. (Д.Бродский) В остроугольном треугольнике ABC O, I — центры описанной и вписанной окружностей, P — произвольная точка на отрезке OI, точки P_A, P_B и P_C — вторые точки пересечения прямых PA, PB и PC с окружностью (ABC). Докажите. что биссектрисы углов BP_AC, CP_BA и AP_CB пересекаются в одной точке, лежащей на прямой OI.

7. (Ф.Нилов) На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно четыре отмеченных точки, а через каждую отмеченную точку проходят ровно четыре окружности?

8. (А.Эрднигор) Дан центрально симметричный октаэдр $ABCA'B'C'$ (пары A и A', B и B', C и C' противоположны), такой, что суммы плоских углов при каждой из вершин октаэдра равны по $240°$. В треугольниках ABC и $A'BC$ отмечены точки Торричелли T_1 и T_2. Докажите, что расстояния от T_1 и T_2 до BC равны.