Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$ и $AD = CD$, вписан в окружность. Точка M лежит на меньшей дуге CD этой окружности. Прямые BM и CD пересекаются в точке P, а прямые AM и BD — в точке Q. Докажите, что $PQ \parallel AC$.

8.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что OB — биссектриса угла A_1OC_1.

8.3. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Точки X и Y симметричны точке F относительно AD и BE соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BEX и ADY совпадают.

8.4. Саша разрезал бумажный треугольник на два треугольника. Затем он каждую минуту резал на два треугольника один из полученных ранее треугольников. Через некоторое время, не меньшее часа, все полученные Сашей треугольники оказались равными. Укажите все исходные треугольники, для которых возможна такая ситуация.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Четырехугольник $ABCD$, в котором $AB = BC$ и $AD = CD$, вписан в окружность. Точка M лежит на меньшей дуге CD этой окружности. Прямые BM и CD пересекаются в точке P, а прямые AM и BD — в точке Q. Докажите, что $PQ \parallel AC$.

8.2. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки H и O — его ортоцентр и центр описанной окружности соответственно. Серединный перпендикуляр к BH пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1. Докажите, что OB — биссектриса угла A_1OC_1.

8.3. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Точки X и Y симметричны точке F относительно AD и BE соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников BEX и ADY совпадают.

8.4. Саша разрезал бумажный треугольник на два треугольника. Затем он каждую минуту резал на два треугольника один из полученных ранее треугольников. Через некоторое время, не меньшее часа, все полученные Сашей треугольники оказались равными. Укажите все исходные треугольники, для которых возможна такая ситуация.

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. Дан квадрат $ABCD$. Первая окружность касается сторон угла A, а вторая окружность касается сторон угла B, причем сумма диаметров окружностей равна стороне квадрата. Докажите, что одна из общих касательных этих окружностей пересекает сторону AB в ее середине.

8.6. Остроугольный треугольник разбили медианой на два меньших треугольника. Докажите, что каждый из них можно накрыть полукругом, равным половинке описанного круга исходного треугольника.

8.7. На плоскости даны два правильных тринадцатиугольника $A_1A_2\dots A_{13}$ и $B_1B_2\dots B_{13}$ такие, что точки B_1 и A_{13} совпадают и лежат на отрезке A_1B_{13}, а многоугольники лежат по одну сторону от этого отрезка. Докажите, что прямые A_1A_9, $B_{13}B_8$ и A_8B_9 проходят через одну точку.

8.8. Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. Точка P лежит на дуге CD этой окружности, не содержащей других вершин квадрата. Прямые PA, PB пересекают диагонали BD, AC соответственно в точках K, L. Точки M, N — проекции K, L соответственно на CD, а Q — точка пересечения прямых KN и ML. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 1 августа

Условия задач

8 класс. Второй день

8.5. Дан квадрат $ABCD$. Первая окружность касается сторон угла A, а вторая окружность касается сторон угла B, причем сумма диаметров окружностей равна стороне квадрата. Докажите, что одна из общих касательных этих окружностей пересекает сторону AB в ее середине.

8.6. Остроугольный треугольник разбили медианой на два меньших треугольника. Докажите, что каждый из них можно накрыть полукругом, равным половинке описанного круга исходного треугольника.

8.7. На плоскости даны два правильных тринадцатиугольника $A_1A_2\dots A_{13}$ и $B_1B_2\dots B_{13}$ такие, что точки B_1 и A_{13} совпадают и лежат на отрезке A_1B_{13}, а многоугольники лежат по одну сторону от этого отрезка. Докажите, что прямые A_1A_9, $B_{13}B_8$ и A_8B_9 проходят через одну точку.

8.8. Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. Точка P лежит на дуге CD этой окружности, не содержащей других вершин квадрата. Прямые PA, PB пересекают диагонали BD, AC соответственно в точках K, L. Точки M, N — проекции K, L соответственно на CD, а Q — точка пересечения прямых KN и ML. Докажите, что прямая PQ делит отрезок AB пополам.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная AC, пересекает дугу AB, не содержащую C, в точке K. Докажите, что отношение AK/BK равно отношению стороны правильного пятиугольника к его диагонали.

9.2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

9.3. В остроугольном треугольнике ABC углы B и C больше $60°$. Точки P, Q на сторонах AB, AC таковы, что A, P, Q и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности; K — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle BKC > 90°$.

9.4. Точка D лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC, а точки M и K — на его боковых сторонах AB и AC соответственно так, что $AMDK$ — параллелограмм. Прямые MK и BC пересекаются в точке L. Перпендикуляр к BC, проходящий через D, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что окружность с центром L, проходящая через D, касается описанной окружности треугольника AXY.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Правильный треугольник ABC вписан в окружность. Прямая, проходящая через середину AB и параллельная AC, пересекает дугу AB, не содержащую C, в точке K. Докажите, что отношение AK/BK равно отношению стороны правильного пятиугольника к его диагонали.

9.2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка M — середина стороны AC, а точка W — середина дуги AB описанной окружности, не содержащей C. Оказалось, что $\angle AIM = 90°$. В каком отношении I делит отрезок CW?

9.3. В остроугольном треугольнике ABC углы B и C больше $60°$. Точки P, Q на сторонах AB, AC таковы, что A, P, Q и ортоцентр треугольника H лежат на одной окружности; K — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle BKC > 90°$.

9.4. Точка D лежит на основании BC равнобедренного треугольника ABC, а точки M и K — на его боковых сторонах AB и AC соответственно так, что $AMDK$ — параллелограмм. Прямые MK и BC пересекаются в точке L. Перпендикуляр к BC, проходящий через D, пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что окружность с центром L, проходящая через D, касается описанной окружности треугольника AXY.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 1 августа

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. Пусть BH_b, CH_c — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

9.6. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина высоты, опущенной на гипотенузу AB. Прямые, симметричные AB относительно AD и BD, пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников AFB и ABC.

9.7. На каждой из двух параллельных прямых a и b отметили по 50 точек. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в этих точках может оказаться остроугольными?

9.8. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC, а ω — вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся отрезка AB. Общие внутренние касательные к окружностям CKL и ω пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $AP = BQ$.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 1 августа

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. Пусть BH_b, CH_c — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая H_bH_c пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y. Точки P и Q симметричны X и Y относительно AB и AC соответственно. Докажите, что $PQ \parallel BC$.

9.6. В прямоугольном треугольнике ABC точка D — середина высоты, опущенной на гипотенузу AB. Прямые, симметричные AB относительно AD и BD, пересекаются в точке F. Найдите отношение площадей треугольников AFB и ABC.

9.7. На каждой из двух параллельных прямых a и b отметили по 50 точек. Какое наибольшее количество треугольников с вершинами в этих точках может оказаться остроугольными?

9.8. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC, а ω — вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся отрезка AB. Общие внутренние касательные к окружностям CKL и ω пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $AP = BQ$.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Пусть CD — их общая касательная (C и D — точки касания), а O_a, O_b — центры описанных окружностей треугольников CAD, CBD соответственно. Докажите, что середина отрезка O_aO_b лежит на прямой AB.

10.2. Докажите что в остроугольном треугольнике расстояние от любой вершины до соответствующего центра вневписанной окружности меньше, чем сумма двух наибольших сторон треугольника.

10.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ - окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.

10.4. На плоскости нарисованы неравнобедренный треугольник ABC и вписанная в него окружность ω. Пользуясь только линейкой и проведя не более восьми линий, постройте на ω такие точки A', B', C', что лучи $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ проходят через A, B, C соответственно.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Две окружности пересекаются в точках A и B. Пусть CD — их общая касательная (C и D — точки касания), а O_a, O_b — центры описанных окружностей треугольников CAD, CBD соответственно. Докажите, что середина отрезка O_aO_b лежит на прямой AB.

10.2. Докажите что в остроугольном треугольнике расстояние от любой вершины до соответствующего центра вневписанной окружности меньше, чем сумма двух наибольших сторон треугольника.

10.3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ - окружности, описанные вокруг треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Обозначим через X_A произведение степени точки A относительно ω_A на площадь треугольника BCD. Аналогично определим X_B, X_C, X_D. Докажите, что $X_A + X_B + X_C + X_D = 0$.

10.4. На плоскости нарисованы неравнобедренный треугольник ABC и вписанная в него окружность ω. Пользуясь только линейкой и проведя не более восьми линий, постройте на ω такие точки A', B', C', что лучи $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ проходят через A, B, C соответственно.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB', CC'. Через A и C' проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B', P, Q лежат на одной окружности.

10.6. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB, SBC, SCA в точках D, E, F соответственно. Найдите все возможные значения суммы углов SDA, SEB и SFC.

10.7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Γ. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые BC и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что окружности PIQ и Γ перпендикулярны.

10.8. Дано конечное множество точек плоскости S такое, что $|S|$ четно и никакие три точки из S не лежат на одной прямой. Докажите, что S можно разбить на два множества X и Y так, что выпуклые оболочки $\mathrm{conv}(X)$ и $\mathrm{conv}(Y)$ имеют поровну вершин.

Тринадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2017 г., 1 августа

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB', CC'. Через A и C' проведены две окружности, касающиеся BC в точках P и Q. Докажите, что точки A, B', P, Q лежат на одной окружности.

10.6. Сфера, вписанная в пирамиду $SABC$, касается граней SAB, SBC, SCA в точках D, E, F соответственно. Найдите все возможные значения суммы углов SDA, SEB и SFC.

10.7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω с центром I и вписан в окружность Γ. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые BC и AD пересекаются в точке Q. Докажите, что окружности PIQ и Γ перпендикулярны.

10.8. Дано конечное множество точек плоскости S такое, что $|S|$ четно и никакие три точки из S не лежат на одной прямой. Докажите, что S можно разбить на два множества X и Y так, что выпуклые оболочки $\mathrm{conv}(X)$ и $\mathrm{conv}(Y)$ имеют поровну вершин.