Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Пусть $ABCD$ — трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E — середина AD.

8.2. Окружность, проходящая через вершины A, B и точку пересечения высот треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC во внутренних точках. Докажите, что $60^\circ < \angle C < 90^\circ$.

8.3. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Точка M на основании AC такова, что $AM : MC = 1 : 2$, точка H — проекция C на BM. Найдите угол AHB.

8.4. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на пять многоугольников, каждый из которых имеет ось симметрии.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

8 класс. Первый день

8.1. Пусть $ABCD$ — трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E — середина AD.

8.2. Окружность, проходящая через вершины A, B и точку пересечения высот треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC во внутренних точках. Докажите, что $60^\circ < \angle C < 90^\circ$.

8.3. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Точка M на основании AC такова, что $AM : MC = 1 : 2$, точка H — проекция C на BM. Найдите угол AHB.

8.4. Докажите, что любой выпуклый четырехугольник можно разрезать на пять многоугольников, каждый из которых имеет ось симметрии.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач
8 класс. Второй день

8.5. Есть два равных фанерных треугольника, один из углов которых равен α (эти углы отмечены). Расположите их на плоскости так, чтобы какие-то три вершины образовали угол, равный $\alpha/2$. (*Никакими инструментами, даже карандашом, пользоваться нельзя*).

8.6. Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

8.7. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что четырехугольники $AMCD$ и $BMDC$ описаны около окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно. Прямая O_1O_2 отсекает от угла CMD равнобедренный треугольник с вершиной M. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

8.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны такие точки C_1, B_1 соответственно, что $BB_1 \perp CC_1$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B_1BA$, $\angle XCB = \angle C_1CA$. Докажите, что $\angle B_1XC_1 = 90^\circ - \angle A$.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач
8 класс. Второй день

8.5. Есть два равных фанерных треугольника, один из углов которых равен α (эти углы отмечены). Расположите их на плоскости так, чтобы какие-то три вершины образовали угол, равный $\alpha/2$. (*Никакими инструментами, даже карандашом, пользоваться нельзя*).

8.6. Через вершины B и C треугольника ABC провели перпендикулярно прямой BC прямые b и c соответственно. Серединные перпендикуляры к сторонам AC и AB пересекают прямые b и c в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямая PQ перпендикулярна медиане AM треугольника ABC.

8.7. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что четырехугольники $AMCD$ и $BMDC$ описаны около окружностей с центрами O_1 и O_2 соответственно. Прямая O_1O_2 отсекает от угла CMD равнобедренный треугольник с вершиной M. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

8.8. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны такие точки C_1, B_1 соответственно, что $BB_1 \perp CC_1$. Точка X внутри треугольника такова, что $\angle XBC = \angle B_1BA$, $\angle XCB = \angle C_1CA$. Докажите, что $\angle B_1XC_1 = 90^\circ - \angle A$.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Пусть C — одна из точек пересечения окружностей α и β. Касательная в этой точке к α пересекает β в точке B, а касательная в C к β пересекает α в точке A, причем A и B отличны от C, и угол ACB тупой. Прямая AB вторично пересекает α и β в точках N и M соответственно. Докажите, что $2MN < AB$.

9.2. Дан выпуклый четырехугольник. Постройте циркулем и линейкой точку, проекции которой на прямые, содержащие его стороны, являются вершинами параллелограмма. (*Исследование проводить не нужно*.)

9.3. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем 15 кругам.

9.4. Дан фиксированный треугольник ABC. По описанной около него окружности движется точка P так, что хорды BC и AP пересекаются. Прямая AP разрезает треугольник BPC на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_1 и I_2 соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает прямую BC в точке Z. Докажите, что все прямые ZP проходят через фиксированную точку.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина

Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

9 класс. Первый день

9.1. Пусть C — одна из точек пересечения окружностей α и β. Касательная в этой точке к α пересекает β в точке B, а касательная в C к β пересекает α в точке A, причем A и B отличны от C, и угол ACB тупой. Прямая AB вторично пересекает α и β в точках N и M соответственно. Докажите, что $2MN < AB$.

9.2. Дан выпуклый четырехугольник. Постройте циркулем и линейкой точку, проекции которой на прямые, содержащие его стороны, являются вершинами параллелограмма. (*Исследование проводить не нужно*.)

9.3. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем 15 кругам.

9.4. Дан фиксированный треугольник ABC. По описанной около него окружности движется точка P так, что хорды BC и AP пересекаются. Прямая AP разрезает треугольник BPC на два меньших, центры вписанных окружностей которых обозначим через I_1 и I_2 соответственно. Прямая I_1I_2 пересекает прямую BC в точке Z. Докажите, что все прямые ZP проходят через фиксированную точку.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. В неравнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a и H_c — ортоцентры треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что прямые AH_c и CH_a пересекаются на средней линии треугольника ABC.

9.6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки A', B', C', D' — центры описанных окружностей треугольников ABD, BCA, CDB, DAC соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.

9.7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

9.8. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Обозначим через O_a центр окружности, описанной около треугольника AA_BA_C. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $O_aO_bO_c$, касается описанной окружности исходного треугольника.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач

9 класс. Второй день

9.5. В неравнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a и H_c — ортоцентры треугольников ABM и CBM соответственно. Докажите, что прямые AH_c и CH_a пересекаются на средней линии треугольника ABC.

9.6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Точки A', B', C', D' — центры описанных окружностей треугольников ABD, BCA, CDB, DAC соответственно. Докажите, что прямые AA', BB', CC', DD' пересекаются в одной точке.

9.7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

9.8. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к BC пересекает прямые AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Обозначим через O_a центр окружности, описанной около треугольника AA_BA_C. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $O_aO_bO_c$, касается описанной окружности исходного треугольника.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Пусть K — точка на стороне BC треугольника ABC, KN — биссектриса треугольника AKC. Прямые BN и AK пересекаются в точке F, а прямые CF и AB — в точке D. Докажите, что KD — биссектриса треугольника AKB.

10.2. Докажите, что всякий треугольник площади 1 можно накрыть равнобедренным треугольником площади менее, чем $\sqrt{2}$.

10.3. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Точки B_2 и C_2 — середины отрезков BA_1 и CA_1 соответственно. Точка B_3 симметрична C_1 относительно B, а точка C_3 симметрична B_1 относительно C. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников BB_2B_3 и CC_2C_3, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

10.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и отмечены точки A_2, B_2, C_2, в которых вневписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника. Докажите, что точка A_1 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии
им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 30 июля

Условия задач

10 класс. Первый день

10.1. Пусть K — точка на стороне BC треугольника ABC, KN — биссектриса треугольника AKC. Прямые BN и AK пересекаются в точке F, а прямые CF и AB — в точке D. Докажите, что KD — биссектриса треугольника AKB.

10.2. Докажите, что всякий треугольник площади 1 можно накрыть равнобедренным треугольником площади менее, чем $\sqrt{2}$.

10.3. В треугольнике ABC точки A_1, B_1 и C_1 — середины сторон BC, CA и AB соответственно. Точки B_2 и C_2 — середины отрезков BA_1 и CA_1 соответственно. Точка B_3 симметрична C_1 относительно B, а точка C_3 симметрична B_1 относительно C. Докажите, что одна из точек пересечения окружностей, описанных около треугольников BB_2B_3 и CC_2C_3, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

10.4. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 и отмечены точки A_2, B_2, C_2, в которых вневписанные окружности касаются сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая B_1C_1 касается вписанной окружности треугольника. Докажите, что точка A_1 лежит на окружности, описанной около треугольника $A_2B_2C_2$.

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a и H_c — ортоцентры треугольников ABM и CBM соответственно, прямые AH_c и CH_a пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle MBK = 90^\circ$.

10.6. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOH, пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке A_1, отличной от O. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

10.7. Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

10.8. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на правильный шестиугольник со стороной 1 и несколько равных прямоугольных треугольников с катетами 1 и $\sqrt{3}$?

Одиннадцатая Всероссийская олимпиада по геометрии им. И. Ф. Шарыгина
Финальный тур, Ратмино, 2015 г., 31 июля

Условия задач

10 класс. Второй день

10.5. В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы AC, точки H_a и H_c — ортоцентры треугольников ABM и CBM соответственно, прямые AH_c и CH_a пересекаются в точке K. Докажите, что $\angle MBK = 90^\circ$.

10.6. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. Окружность, описанная около треугольника AOH, пересекает серединный перпендикуляр к BC в точке A_1, отличной от O. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

10.7. Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу. Из вершин A, B, C, D опущены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на прямые SC, SD, SA, SB соответственно. Оказалось, что точки S, A_1, B_1, C_1, D_1 различны и лежат на одной сфере. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости.

10.8. Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на правильный шестиугольник со стороной 1 и несколько равных прямоугольных треугольников с катетами 1 и $\sqrt{3}$?

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 8 grade

8.1. In trapezoid $ABCD$ angles A and B are right, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Prove that $\angle ADC = 2\angle ABE$, where E is the midpoint of segment D.

8.2. A circle passing through A, B and the orthocenter of triangle ABC meets sides AC, BC at their inner points. Prove that $60^\circ < \angle C < 90^\circ$.

8.3. In triangle ABC we have $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Point M on AC is such that $AM : MC = 1 : 2$, point H is the projection of C to BM. Find angle AHB.

8.4. Prove that an arbitrary convex quadrilateral can be divided into five polygons having symmetry axes.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 8 grade

8.1. In trapezoid $ABCD$ angles A and B are right, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Prove that $\angle ADC = 2\angle ABE$, where E is the midpoint of segment D.

8.2. A circle passing through A, B and the orthocenter of triangle ABC meets sides AC, BC at their inner points. Prove that $60^\circ < \angle C < 90^\circ$.

8.3. In triangle ABC we have $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. Point M on AC is such that $AM : MC = 1 : 2$, point H is the projection of C to BM. Find angle AHB.

8.4. Prove that an arbitrary convex quadrilateral can be divided into five polygons having symmetry axes.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 8 grade

8.5. Two congruent hard triangles are given. One of their angles is equal to α (these angles are marked). Dispose these triangles on the plane in such a way that the angle formed by some three vertices would be equal to $\alpha/2$. (*No instruments are allowed, even a pencil.*)

8.6. Lines b and c passing through vertices B and C of triangle ABC are perpendicular to sideline BC. The perpendicular bisectors of AC and AB meet b and c at points P and Q respectively. Prove that line PQ is perpendicular to median AM of triangle ABC.

8.7. Point M on side AB of quadrilateral $ABCD$ is such that quadrilaterals $AMCD$ and $BMDC$ are circumscribed around circles centered at O_1 and O_2 respectively. Lines O_1O_2, CM, and DM form an isosceles triangle with apex M. Prove that $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.

8.8. Points C_1, B_1 are chosen on sides AB, AC of a triangle ABC, respectively, so that $BB_1 \perp CC_1$. Point X lying inside the triangle is such that $\angle XBC = \angle B_1BA$, $\angle XCB = \angle C_1CA$. Prove that $\angle B_1XC_1 = 90^\circ - \angle A$.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 8 grade

8.5. Two congruent hard triangles are given. One of their angles is equal to α (these angles are marked). Dispose these triangles on the plane in such a way that the angle formed by some three vertices would be equal to $\alpha/2$. (*No instruments are allowed, even a pencil.*)

8.6. Lines b and c passing through vertices B and C of triangle ABC are perpendicular to sideline BC. The perpendicular bisectors of AC and AB meet b and c at points P and Q respectively. Prove that line PQ is perpendicular to median AM of triangle ABC.

8.7. Point M on side AB of quadrilateral $ABCD$ is such that quadrilaterals $AMCD$ and $BMDC$ are circumscribed around circles centered at O_1 and O_2 respectively. Lines O_1O_2, CM, and DM form an isosceles triangle with apex M. Prove that $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.

8.8. Points C_1, B_1 are chosen on sides AB, AC of a triangle ABC, respectively, so that $BB_1 \perp CC_1$. Point X lying inside the triangle is such that $\angle XBC = \angle B_1BA$, $\angle XCB = \angle C_1CA$. Prove that $\angle B_1XC_1 = 90^\circ - \angle A$.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 9 grade

9.1. Circles α and β pass through point C. The tangent to α at this point meets β at point B, and the tangent to β at C meets α at point A so that A and B are distinct from C and angle ACB is obtuse. Line AB meets α and β for the second time at points N and M respectively. Prove that $2MN < AB$.

9.2. A convex quadrilateral is given. Using a compass and a ruler construct a point such that its projections to the sidelines of this quadrilateral are the vertices of a parallelogram.

9.3. Let 100 discs lie on the plane in such a way that each two of them have a common point. Prove that there exists a point lying inside at least 15 of these discs.

9.4. A fixed triangle ABC is given. Point P moves on its circumcircle so that segments BC and AP intersect. Line AP divides triangle BPC into two triangles with incenters I_1 and I_2. Line I_1I_2 meets BC at point Z. Prove that all lines ZP pass through a fixed point.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 9 grade

9.1. Circles α and β pass through point C. The tangent to α at this point meets β at point B, and the tangent to β at C meets α at point A so that A and B are distinct from C and angle ACB is obtuse. Line AB meets α and β for the second time at points N and M respectively. Prove that $2MN < AB$.

9.2. A convex quadrilateral is given. Using a compass and a ruler construct a point such that its projections to the sidelines of this quadrilateral are the vertices of a parallelogram.

9.3. Let 100 discs lie on the plane in such a way that each two of them have a common point. Prove that there exists a point lying inside at least 15 of these discs.

9.4. A fixed triangle ABC is given. Point P moves on its circumcircle so that segments BC and AP intersect. Line AP divides triangle BPC into two triangles with incenters I_1 and I_2. Line I_1I_2 meets BC at point Z. Prove that all lines ZP pass through a fixed point.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 9 grade

9.5. Let BM be a median of nonisosceles right-angled triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$), and H_a, H_c be the orthocenters of triangles ABM, CBM respectively. Prove that lines AH_c and CH_a meet on the medial line of triangle ABC.

9.6. The diagonals of convex quadrilateral $ABCD$ are perpendicular. Points A', B', C', D' are the circumcenters of triangles ABD, BCA, CDB, DAC respectively. Prove that lines AA', BB', CC', DD' concur.

9.7. Let ABC be an acute-angled, nonisosceles triangle. Altitudes AA' and BB' meet at point H, and the medians of triangle AHB meet at point M. Line CM bisects segment $A'B'$. Find angle C.

9.8. A perpendicular bisector of side BC of triangle ABC meets lines AB and AC at points A_B and A_C respectively. Let O_a be the circumcenter of triangle AA_BA_C. Points O_b and O_c are defined similarly. Prove that the circumcircle of triangle $O_aO_bO_c$ touches the circumcircle of the original triangle.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 9 grade

9.5. Let BM be a median of nonisosceles right-angled triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$), and H_a, H_c be the orthocenters of triangles ABM, CBM respectively. Prove that lines AH_c and CH_a meet on the medial line of triangle ABC.

9.6. The diagonals of convex quadrilateral $ABCD$ are perpendicular. Points A', B', C', D' are the circumcenters of triangles ABD, BCA, CDB, DAC respectively. Prove that lines AA', BB', CC', DD' concur.

9.7. Let ABC be an acute-angled, nonisosceles triangle. Altitudes AA' and BB' meet at point H, and the medians of triangle AHB meet at point M. Line CM bisects segment $A'B'$. Find angle C.

9.8. A perpendicular bisector of side BC of triangle ABC meets lines AB and AC at points A_B and A_C respectively. Let O_a be the circumcenter of triangle AA_BA_C. Points O_b and O_c are defined similarly. Prove that the circumcircle of triangle $O_aO_bO_c$ touches the circumcircle of the original triangle.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 10 grade

10.1. Let K be an arbitrary point on side BC of triangle ABC, and KN be a bisector of triangle AKC. Lines BN and AK meet at point F, and lines CF and AB meet at point D. Prove that KD is a bisector of triangle AKB.

10.2. Prove that an arbitrary triangle with area 1 can be covered by an isosceles triangle with area less than $\sqrt{2}$.

10.3. Let A_1, B_1 and C_1 be the midpoints of sides BC, CA and AB of triangle ABC, respectively. Points B_2 and C_2 are the midpoints of segments BA_1 and CA_1 respectively. Point B_3 is symmetric to C_1 wrt B, and C_3 is symmetric to B_1 wrt C. Prove that one of common points of circles BB_2B_3 and CC_2C_3 lies on the circumcircle of triangle ABC.

10.4. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes of an acute-angled, nonisosceles triangle ABC, and A_2, B_2, C_2 be the touching points of sides BC, CA, AB with the correspondent excircles. It is known that line B_1C_1 touches the incircle of ABC. Prove that A_1 lies on the circumcircle of $A_2B_2C_2$.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 30

Problems

First day. 10 grade

10.1. Let K be an arbitrary point on side BC of triangle ABC, and KN be a bisector of triangle AKC. Lines BN and AK meet at point F, and lines CF and AB meet at point D. Prove that KD is a bisector of triangle AKB.

10.2. Prove that an arbitrary triangle with area 1 can be covered by an isosceles triangle with area less than $\sqrt{2}$.

10.3. Let A_1, B_1 and C_1 be the midpoints of sides BC, CA and AB of triangle ABC, respectively. Points B_2 and C_2 are the midpoints of segments BA_1 and CA_1 respectively. Point B_3 is symmetric to C_1 wrt B, and C_3 is symmetric to B_1 wrt C. Prove that one of common points of circles BB_2B_3 and CC_2C_3 lies on the circumcircle of triangle ABC.

10.4. Let AA_1, BB_1, CC_1 be the altitudes of an acute-angled, nonisosceles triangle ABC, and A_2, B_2, C_2 be the touching points of sides BC, CA, AB with the correspondent excircles. It is known that line B_1C_1 touches the incircle of ABC. Prove that A_1 lies on the circumcircle of $A_2B_2C_2$.

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 10 grade

10.5. Let BM be a median of right-angled nonisosceles triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$), and H_a, H_c be the orthocenters of triangles ABM, CBM respectively. Lines AH_c and CH_a meet at point K. Prove that $\angle MBK = 90^\circ$.

10.6. Let H and O be the orthocenter and the circumcenter of triangle ABC. The circumcircle of triangle AOH meets the perpendicular bisector of BC at point $A_1 \neq O$. Points B_1 and C_1 are defined similarly. Prove that lines AA_1, BB_1 and CC_1 concur.

10.7. Let $SABCD$ be an inscribed pyramid, and AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 be the perpendiculars from A, B, C, D to lines SC, SD, SA, SB respectively. Points S, A_1, B_1, C_1, D_1 are distinct and lie on a sphere. Prove that points A_1, B_1, C_1 and D_1 are coplanar.

10.8. Does there exist a rectangle which can be divided into a regular hexagon with sidelength 1 and several congruent right-angled triangles with legs 1 and $\sqrt{3}$?

XI Geometrical Olympiad
in honour of I.F.Sharygin
Final round. Ratmino, 2015, July 31

Problems

Second day. 10 grade

10.5. Let BM be a median of right-angled nonisosceles triangle ABC ($\angle B = 90^\circ$), and H_a, H_c be the orthocenters of triangles ABM, CBM respectively. Lines AH_c and CH_a meet at point K. Prove that $\angle MBK = 90^\circ$.

10.6. Let H and O be the orthocenter and the circumcenter of triangle ABC. The circumcircle of triangle AOH meets the perpendicular bisector of BC at point $A_1 \neq O$. Points B_1 and C_1 are defined similarly. Prove that lines AA_1, BB_1 and CC_1 concur.

10.7. Let $SABCD$ be an inscribed pyramid, and AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 be the perpendiculars from A, B, C, D to lines SC, SD, SA, SB respectively. Points S, A_1, B_1, C_1, D_1 are distinct and lie on a sphere. Prove that points A_1, B_1, C_1 and D_1 are coplanar.

10.8. Does there exist a rectangle which can be divided into a regular hexagon with sidelength 1 and several congruent right-angled triangles with legs 1 and $\sqrt{3}$?