IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Девятой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются). Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2013 года. Решения следует присылать по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg (сканы, а не фотографии) на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива.

3. Если объем работы превышает 10 Мб, разбейте ее на несколько писем.

4. В теме письма нужно написать "олимпиада Шарыгина" и указать фамилию участника, а в тексте привести следующие сведения об участнике:

- фамилию, имя, отчество;

- E-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;

- класс, в котором сейчас учится школьник;

- номер и адрес школы;

- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) по адресу: *119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. Шарыгина.* На обложке работы **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.4.

Рекомендуется выполнять работу на специальных бланках, которые можно получить на сайте www.blank.geomolymp.mccme.ru. Это сделает проверку Вашей работы более быстрой и качественной. Если Вы набираете свою работу на компьютере, то следует получить с указанной страницы файл бланка и имеющийся там штрихкод (квадрат с узором в правом верхнем углу бланка) скопировать в свой файл как рисунок. Если работа содержится в нескольких файлах, то нужно скопировать тот же штрихкод во все файлы, это позволяет идентифицировать автора работы.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Жюри будет интересно узнать Ваше мнение.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2013 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте www.geometry.ru не позднее конца мая 2013 г. Свои результаты Вы сможете узнать по электронной почте в это же время.

1. (8) В треугольнике ABC $AB = BC$. Из точки E на стороне AB опущен перпендикуляр ED на BC. Оказалось, что $AE = DE$. Найдите угол DAC.

2. (8) В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) угол при вершине C равен $20°$. Биссектрисы углов A и B пересекают боковые стороны треугольника соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что треугольник A_1OB_1 (где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC) является равносторонним.

3. (8) Вневписанная окружность, соответствующая вершине A прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$), касается продолжений сторон AB, AC в точках A_1, A_2 соответственно; аналогично определим точки C_1, C_2. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек A, B, C на прямые C_1C_2, A_1C_1, A_1A_2, пересекаются в одной точке.

4. (8) Дан неравнобедренный треугольник ABC. Точка O — центр описанной около него окружности, а точка K — центр окружности w, описанной около треугольника BCO. Высота треугольника, проведенная из точки A, пересекает окружность w в точке P. Прямая PK пересекает описанную окружность треугольника в точках E и F. Докажите, что один из отрезков EP и FP равен отрезку PA.

5. (8) Точка внутри выпуклого четырехугольника соединена с вершинами. Получились четыре равных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

6. (8–9) Диагонали AC, BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Описанные окружности треугольников ABP, CDP пересекают прямую AD в точках X, Y. Точка M — середина XY. Докажите, что $BM = CM$.

7. (8–9) Пусть BD — биссектриса треугольника ABC. Точки I_a, I_c — центры вписанных окружностей треугольников ABD, CBD. Прямая I_aI_c пересекает прямую AC в точке Q. Докажите, что $\angle DBQ = 90°$.

8. (8–9) Вокруг треугольника ABC описана окружность. Пусть X — точка внутри окружности, K и L — точки пересечения окружности и прямых BX и CX соответственно. Прямая LK пересекает BA в точке E, а прямую AC в точке F. Найдите геометрическое место таких точек X, что окружности, описанные около треугольников AFK и AEL, касаются.

9. (8–9) Пусть T_1, T_2 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AC соответственно. Оказалось, что точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника относительно середины AB, лежит на окружности, описанной около треугольника CT_1T_2. Найдите угол BCA.

10. (8–9) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке C'. Окружность, вписанная в треугольник ACC', касается сторон AB и AC в точках C_1, B_1; окружность, вписанная в треугольник BCC', касается сторон AB и BC в точках C_2, A_2. Докажите, что прямые B_1C_1, A_2C_2 и CC' пересекаются в одной точке.

11. (8–9) а) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, BCD, CDA, DAB. Может ли оказаться, что $r_4 > 2r_3$?

    б)В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Пусть $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABE, BCE, CDE, DAE. Может ли оказаться, что $r_2 > 2r_1$?

12. (8–11) На каждой стороне треугольника ABC отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

    (a) Пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы.

    (б) Решите пункт (a), проведя только три прямых.

13. (9–10) Пусть A_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами BC и AB соответственно, а A' и C' — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол B, с продолжениями сторон BC и AB соответственно. Докажите, что ортоцентр H треугольника ABC лежит на A_1C_1 тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и BA перпендикулярны.

14. (9–11) Точки M, N — середины диагоналей AC, BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$). Описанные окружности треугольников ABN, CDM пересекают прямую BC в точках Q, R. Докажите, что точки Q, R равноудалены от середины отрезка MN.

15. (9–11) а) В треугольник ABC вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что $C_1A_1 \perp BC$, $A_1B_1 \perp CA$, $B_1C_1 \perp AB$, $B_2A_2 \perp BC$, $C_2B_2 \perp CA$, $A_2C_2 \perp AB$. Докажите, что эти треугольники равны.

    б) Внутри треугольника ABC взяли точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ так, что A_1 - на отрезке AB_1, B_1 - на отрезке BC_1, C_1 - на отрезке CA_1, A_2 - на отрезке AC_2, B_2 - на отрезке BA_2, C_2 - на отрезке CB_2 и углы $BAA_1, CBB_1, ACC_1, CAA_2, ABB_2, BCC_2$ равны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

16. (9–11) Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Перпендикуляр из центра I этой окружности на медиану из вершины C пересекает прямую $A'B'$ в точке K. Докажите, что $CK \parallel AB$.

17. (9–11) Дан вписанный четырехугольник, острый угол между диагоналями которого равен ϕ. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырехугольника с теми же длинами сторон меньше ϕ.

18. (9–11) В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки M и N являются проекциями B и C на AD. Окружность с диаметром MN пересекает BC в точках X и Y. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

19. (10–11) а) Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе AL в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на прямой BC.

    б) В треугольнике ABC провели биссектрису AL. Точки O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников ABL и ACL соответственно. Точки B_1 и C_1 — проекции вершин C и B на биссектрисы углов B и C соответственно. Докажите, что прямые O_1C_1 и O_2B_1 пересекаются на прямой BC.

    в) Докажите, что точки, полученные в пп.а) и б), совпадают.

20. (10–11) На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1. Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2. Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну точку.

21. (10–11) Дана окружность ω и точка A вне ее. Через A проведены две прямые, одна из которых пересекает ω в точках B и C, а другая — в точках D и E (D лежит между A и E). Прямая, проходящая через D и параллельная BC, вторично пересекает ω в точке F, а прямая AF — в точке T. Пусть M — точка пересечения прямых ET и BC, а N — точка, симметричная A относительно M. Докажите, что описанная около треугольника DEN окружность проходит через середину отрезка BC.

22. (10–11) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

23. (10–11) Выпуклые многогранники A и B не имеют общих точек. Многогранник A имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из A и B, если B имеет а) 2012, б) 2013 плоскостей симметрии?

    в) Каков будет ответ в пункте (б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?