

## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина Финал. Первый день. 8 класс. Решения.

1. (М. Рожкова, Украина) В неравностороннем треугольнике  $ABC$  проведены высота из вершины  $A$  и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины  $A$ .

**Решение.** Обозначим через  $I$  точку пересечения биссектрис, а через  $X$  и  $Y$  — точки пересечения высоты с биссектрисами углов  $B$  и  $C$  соответственно. Пусть для определённости  $AB > AC$ ; тогда точки  $I$  и  $Y$  лежат на отрезках  $BY$  и  $AX$ , соответственно. Значит,  $\angle AIY = \angle A/2 + \angle B/2 = 90^\circ - \angle C/2 = \angle IXY$ , откуда (по теореме об угле между касательной и хордой) сразу следует утверждение задачи.

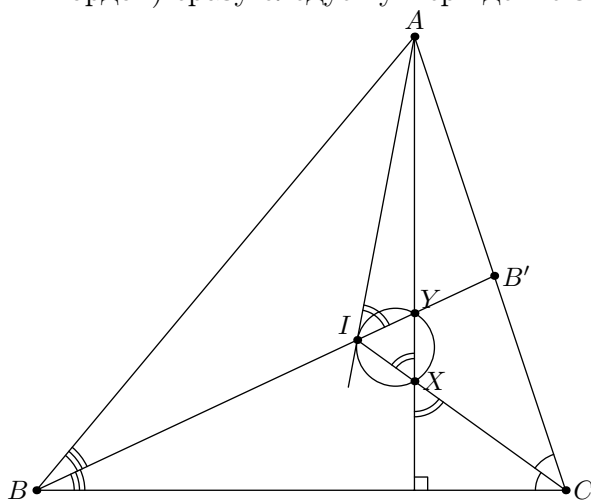


Рис. 8.1

2. (А. Акопян) Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найдите геометрическое место точек  $C$  таких, что точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  можно накрыть кругом единичного радиуса.

**Решение.** Обозначим искомое ГМТ через  $\Phi$ . Очевидно, что  $\Phi$  пусто при  $AB > 2$ , а при  $AB = 2$  является кругом с диаметром  $AB$ . Пусть  $AB < 2$ , а окружности  $\omega_A, \omega_B$  с центрами  $A, B$  и радиусами, равными 1, пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Рассмотрим круги единичного радиуса, покрывающие точки  $A$  и  $B$ ; ГМТ их центров есть «линза», образованная дугами  $PQ$  окружностей  $\omega_A$  и  $\omega_B$ . Значит,  $\Phi$  есть объединение кругов единичного радиуса с центрами в этой линзе.

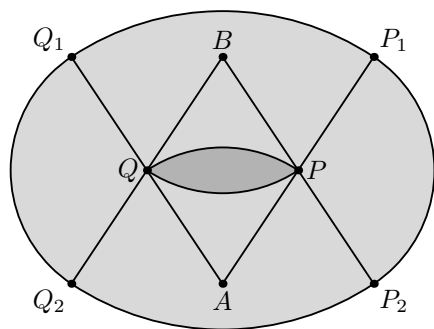


Рис. 8.2.1

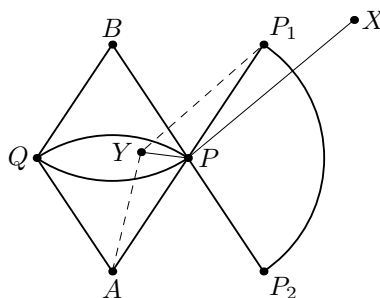


Рис. 8.2.2

Построим точки  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  такие, что  $P$  — середина отрезков  $AP_1, BP_2$ , а  $Q$  — середина отрезков  $AQ_1, BQ_2$ , и проведем четыре дуги окружностей:  $P_1Q_1$  с центром  $A$  и радиусом 2,  $P_2Q_2$  с центром  $B$  и радиусом 2,  $P_1P_2$  с центром  $P$  и радиусом 1,  $Q_1Q_2$  с центром  $Q$  и радиусом 1 (рис. 8.2.1). Докажем, что  $\Phi$  есть фигура, ограниченная этими дугами. Ясно, что любая точка  $X$  этой фигуры принадлежит  $\Phi$ . В самом деле, если  $X$  лежит в секторе  $P_1PP_2$ , то она лежит в круге с центром  $P$ ; если же она лежит в секторе  $P_1AQ_1$ , то она лежит в круге с центром  $Y$ , где  $Y$  — точка пересечения луча  $AX$  и дуги  $PQ$  окружности  $\omega_1$ . Остальные случаи аналогичны.

Осталось показать, что любая точка  $X$  вне нашей фигуры не принадлежит  $\Phi$ . Если  $X$  лежит в угле  $P_1AQ_1$ , то  $AX > 2$ , и точки  $A$  и  $X$  не накрываются единичным кругом. Пусть теперь  $X$  лежит в угле  $P_1PP_2$ ; нам надо доказать, что расстояние от  $X$  до любой точки  $Y$ , лежащей в линзе, больше 1. Для этого покажем, что  $\angle XPY \geq 90^\circ$  (и, следовательно,  $XY \geq XP > 1$ ). Пусть для определённости в угле  $XPY$  лежит точка  $P_1$  (рис. 8.2.2); тогда  $\angle XPY \geq \angle P_1PY$ . С другой стороны,  $AU \leq 1$ , а  $AP_1 = 2$ , откуда  $P_1Y \geq 1 \geq AU$ . Это и означает, что точки  $A$  и  $Y$  лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к  $AP_1$ , т.е.  $90^\circ \leq \angle P_1PY \leq \angle XPY$ .

3. (С. Берлов, Д. Прокопенко) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $K$ . На биссектрисе угла  $AKD$  нашлась точка  $P$  такая, что прямые  $BP$  и  $CP$  делят пополам отрезки  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что  $AB = CD$ .

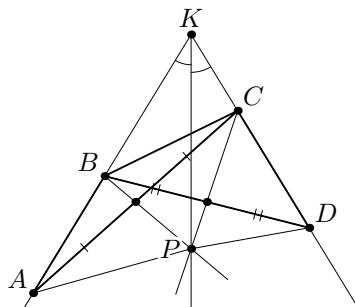


Рис. 8.3

**Решение.** Поскольку прямые  $BP$  и  $CP$  являются медианами треугольников  $ABC$  и  $BDC$ , то точки  $A$  и  $C$  равноудалены от  $BP$ , а  $B$  и  $D$  — от  $CP$ . Это значит, что  $S_{PAB} = S_{PBC} = S_{PCD}$ . С другой стороны, высоты треугольников  $PAB$  и  $PCD$  из точки  $P$  равны, так как  $P$  лежит на биссектрисе; значит, равны и их основания, что и требовалось доказать.

4. (И. Богданов) В равные углы  $X_1OY$  и  $YOX_2$  вписаны окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , касающиеся сторон  $OX_1$  и  $OX_2$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно, а стороны  $OY$  — в точках  $B_1$  и  $B_2$ . Точка  $C_1$  — вторая точка пересечения  $A_1B_2$  и  $\omega_1$ , а точка  $C_2$  — вторая точка пересечения  $A_2B_1$  и  $\omega_2$ . Докажите, что  $C_1C_2$  — общая касательная к окружностям.

**Решение.** Можно считать, что  $OA_2 > OA_1$ . Треугольники  $OA_1B_2$  и  $OB_1A_2$  равны по двум сторонам и углу между ними, значит,  $\angle OB_2A_1 = \angle OA_2B_1$  и  $\angle OA_1B_2 = \angle OB_1A_2$ . Далее, из равенства  $\angle A_1OB_1 = \angle B_2OA_2 = \varphi$  следует, что  $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ - \varphi/2 = 180^\circ - (90^\circ + \varphi/2) = 180^\circ - \angle A_2C_2B_2$ . Следовательно, четырехугольник  $B_2C_2B_1C_1$  вписан, поэтому  $\angle B_1C_2C_1 = \angle B_1B_2C_1 = \angle OA_2B_1$ . Наконец, поскольку прямые  $C_1C_2$  и  $OA_2$  образуют равные углы с хордой  $A_2C_2$  окружности  $\omega_2$ , а  $OA_2$  —

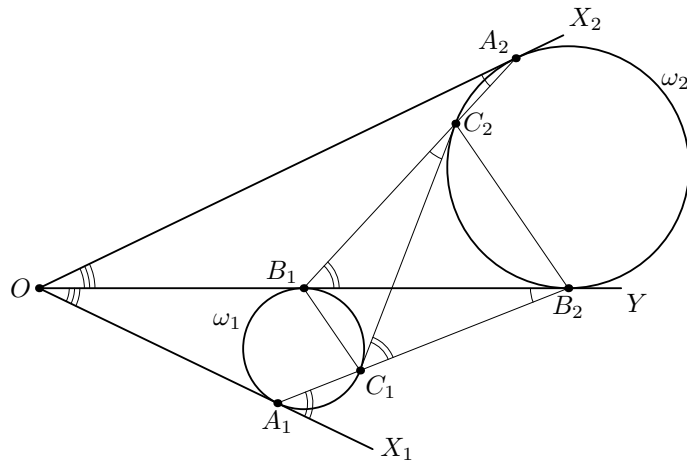


Рис. 8.4

касательная, то и  $C_1C_2$  — также касательная. Касание  $C_1C_2$  и  $\omega_1$  доказывается аналогично.

**Замечание.** Другое решение можно получить, заметив, что из равенства треугольников  $OA_1B_2$  и  $OA_2B_1$  следует  $A_1B_2 = A_2B_1$ , а затем применив теорему о секущей и касательной:  $B_1C_2 \cdot B_1A_2 = B_1B_2^2 = B_2C_1 \cdot B_2A_1$ , откуда  $B_2C_1 = B_1C_2$ . Теперь, поскольку четырёхугольник  $B_1C_2B_2C_1$  вписан, он является равнобокой трапецией и, следовательно, симметричен относительно линии центров наших окружностей.

## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

### Финал. Второй день. 8 класс. Решения.

5. (Б. Френкин) В треугольнике  $ABC$  проведены высота  $AH$ , биссектриса  $BL$  и медиана  $CM$ . Известно, что в треугольнике  $HLM$  прямая  $AH$  является высотой, а  $BL$  — биссектрисой. Докажите, что  $CM$  является в этом треугольнике медианой.

**Решение.** Так как  $AH \perp LM$ , то  $LM \parallel BC$ , т.е.  $LM$  — средняя линия треугольника. Значит,  $BL$  — биссектриса и медиана треугольника  $ABC$ , т.е.  $AB = BC$ . Поскольку  $BL$  является биссектрисой углов  $ABC$  и  $HLM$ , точки  $H$  и  $M$  симметричны относительно нее; значит,  $\frac{1}{2}AB = BM = BH = \frac{1}{2}BC$ , и высота  $AH$  является медианой треугольника  $ABC$ . Таким образом,  $AC = AB = BC$ , треугольник  $ABC$  — равнобедренный, и из симметрии  $CM$  делит  $HL$  пополам, что и требовалось доказать.

6. (Д. Прокопенко) Точки  $E, F$  — середины сторон  $BC, CD$  квадрата  $ABCD$ . Прямые  $AE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $\angle PDA = \angle AED$ .

**Первое решение.** Заметим, что прямые  $AE$  и  $BF$  перпендикулярны, поскольку получаются друг из друга поворотом на  $90^\circ$  вокруг центра квадрата. Пусть прямая, проходящая через  $A$  и параллельная  $BF$ , пересекает прямую  $CD$  в точке  $G$ . Так как  $ABFG$  — параллелограмм, то  $FG = AB$  и, значит,  $FD = DG$ . По теореме Фалеса прямая, проходящая через  $D$  и параллельная  $BF$ , является медианой треугольника  $ADP$ . Поскольку  $AE \perp BF$ , эта прямая является и высотой (рис. 8.6). Следовательно, треугольник  $ADP$  — равнобедренный, как и треугольник  $AED$ . Угол  $EAD$  в обоих треугольниках является углом при основании, поэтому углы при вершинах также равны.

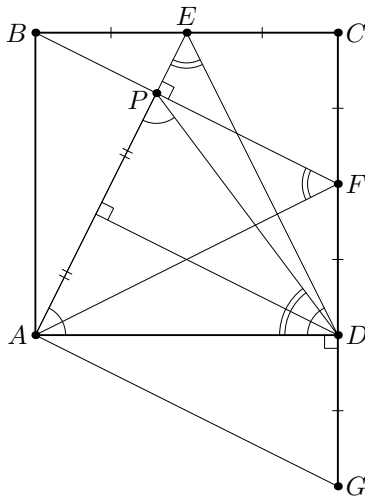


Рис. 8.6

**Второе решение.** Опять же заметим, что  $\angle APF = 90^\circ = \angle ADF$ . Значит, четырехугольник  $APFD$  вписан, откуда  $\angle ADP = \angle AFP = \angle AFB$ . С другой стороны,  $\angle AFB = \angle AED$ , поскольку треугольники  $ABF$  и  $ADE$  равны.

**Третье решение.** Пусть  $AB = 1$ . Поскольку  $BP$  — высота прямоугольного треугольника с катетами 1 и  $\frac{1}{2}$ , получаем  $AP : PE = 4 : 1$ . Тогда по теореме Фалеса проекция отрезка  $DP$  на  $CD$  равна  $\frac{4}{5}$ . Аналогично получаем, что его проекция на  $AD$  равна  $\frac{3}{5}$ . Значит, по теореме Пифагора  $DP = 1 = AD$ . Дальнейшие рассуждения такие же, как в первом решении.

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многоугольников  $P$  и  $Q$  разрежали прямой на две части. Одну из частей  $P$  и одну из частей  $Q$  сложили друг с другом по линии разреза. Может ли получиться правильный многоугольник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть сторон?

**Ответ.** Да, может; 3 или 4 стороны.



Рис. 8.7

**Решение.** Примеры, как может получиться правильный треугольник или квадрат, приведены на рисунке 8.7. Предположим, что у полученного многоугольника  $M$  хотя бы 5 сторон. Разрез пересекает его по двум точкам, каждая из которых принадлежит максимум двум сторонам. Значит, у  $M$  есть сторона  $AB$ , не имеющая общих точек (даже вершин) с разрезом. Пусть она лежит в куске, полученном из  $P$ ; тогда сторона  $P$  равна  $AB$ , и углы при ней равны углам многоугольника  $M$ . Поскольку правильный многоугольник однозначно задается стороной и углом при ней, то  $P = M$ , что невозможно.

8. (А. Заславский) Биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$ . На отрезках  $A_1I$  и  $B_1I$  построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами  $A_2$  и  $B_2$ , лежащими на прямой  $AB$ . Известно, что прямая  $CI$  делит отрезок  $A_2B_2$  пополам. Верно ли, что треугольник  $ABC$  — равнобедренный?

**Ответ.** Нет, не обязательно.

**Решение.** Покажем, что условию задачи удовлетворяет любой треугольник с  $\angle C = 120^\circ$ . Пусть  $CC_1$  — биссектриса угла  $C$ . Тогда  $CA_1$  — внешняя биссектриса угла  $ACC_1$ , т.е. точка  $A_1$  равноудалена от прямых  $AC$  и  $CC_1$ . Но она также равноудалена от прямых  $AC$  и  $AB$ , поэтому  $C_1A_1$  — биссектриса угла  $CC_1B$ .

Значит, точка  $J$ , симметричная  $I$  относительно  $C_1A_1$ , лежит на прямой  $AB$  (рис. 8.8). Заметим, что  $\angle AA_1C_1 = \angle A_1C_1B - \angle A_1AB = \frac{1}{2}(\angle CC_1B - \angle CAB) = \frac{1}{2}\angle ACC_1 = 30^\circ$ , откуда  $\angle IA_1J = 2\angle AA_1C_1 = 60^\circ$ . Итого, в равнобедренном треугольнике  $IA_1J$  ( $IA_1 = A_1J$ ) угол равен  $60^\circ$ ; значит, он равносторонний,  $IJ = JA_1$ , и потому  $A_2 = J$ . Таким образом, мы получили, что  $A_2C_1 = JC_1 = IC_1$ . Аналогично получаем  $B_2C_1 = IC_1 = A_2C_1$ , что и требовалось доказать.

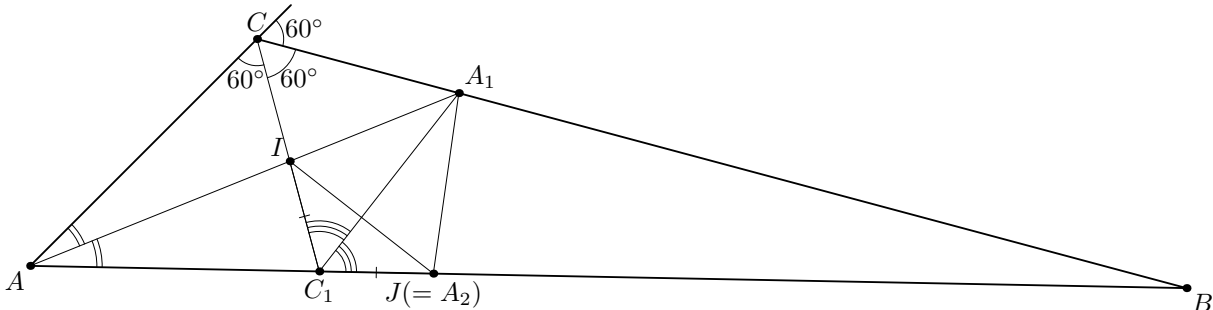


Рис. 8.8

**Замечание.** Можно показать, что в треугольнике, удовлетворяющем условию задачи, обязательно либо  $AC = BC$ , либо  $\angle C = 120^\circ$ .

## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

### Финал. Первый день. 9 класс. Решения.

1. (Б. Френкин) Для каждой вершины треугольника  $ABC$  нашли угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах  $A$  и  $B$  равны друг другу и меньше, чем угол в вершине  $C$ . Чему равен угол  $C$  треугольника?

**Ответ.**  $60^\circ$ .

**Решение.** Нетрудно посчитать, что угол между биссектрисой и высотой в вершине  $X$  треугольника  $XYZ$  равен  $\frac{1}{2}|\angle Y - \angle Z|$ . Следовательно, если эти углы в вершинах  $A$  и  $B$  треугольника  $ABC$  равны, то  $\angle A - \angle C = \angle B - \angle C$  или  $\angle A - \angle C = \angle C - \angle B$ . В первом случае треугольник равнобедренный, т.е. высота и биссектриса из вершины  $C$  совпадают, что противоречит условию. Во втором случае  $\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 60^\circ$ .

**Замечание.** Условие задачи выполняется в любом неравностороннем треугольнике с  $\angle C = 60^\circ$ .

2. (А. Акопян) Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окружности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого. (Здесь треугольником считается часть плоскости, ограниченная замкнутой трёхзвенной ломаной; точка, лежащая на окружности, считается лежащей внутри нее.)

**Решение.** Очевидно, что, если одна из описанных окружностей лежит внутри другой, то утверждение задачи выполнено, а если каждая из окружностей лежит вне другой, то треугольники не могут пересекаться. Поэтому будем считать, что описанные окружности треугольников пересекаются в точках  $P$  и  $Q$  (возможно, совпадающих), и предположим, что утверждение задачи не выполняется. Тогда вершины каждого из треугольников лежат на дуге  $PQ$  соответствующей окружности, расположенной вне другой окружности. Но эти дуги лежат по разные стороны от прямой  $PQ$ . Значит, сами треугольники тоже лежат по разные стороны от этой прямой и не могут пересекаться. (В случае, если  $P = Q$ , в качестве прямой  $PQ$  рассматривается общая касательная к окружностям.)

3. (В. Ясинский, Украина) На прямой лежат точки  $X, Y, Z$  (именно в таком порядке). Треугольники  $XAB, YBC, ZCD$  — правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго по часовой стрелке. Докажите, что прямые  $AC, BD$  и  $XU$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Через  $\angle(k, \ell)$  будем обозначать направленный угол между прямыми  $k$  и  $\ell$  (считающийся против часовой стрелки).

При повороте на  $60^\circ$  по часовой стрелке вокруг  $B$  точки  $A$  и  $C$  переходят соответственно в  $X$  и  $Y$ . Следовательно,  $\angle(XY, AC) = 60^\circ$ . Пусть  $P$  — точка пересечения прямых  $XU$  и  $AC$ . Тогда  $\angle(XP, AP) = 60^\circ = \angle(XB, AB)$ , т.е. точки  $A, X, P, B$  лежат на одной окружности. Отсюда  $\angle(CP, PB) = \angle(AX, XB) = 60^\circ = \angle(CY, YB)$ , т.е. точки  $B, C, P, Y$  также лежат на одной окружности. Таким образом, точка  $P$  является второй точкой пересечения прямой  $XZ$  и описанной окружности треугольника  $BCY$ . Аналогично показывается, что прямая  $BD$  также проходит через эту

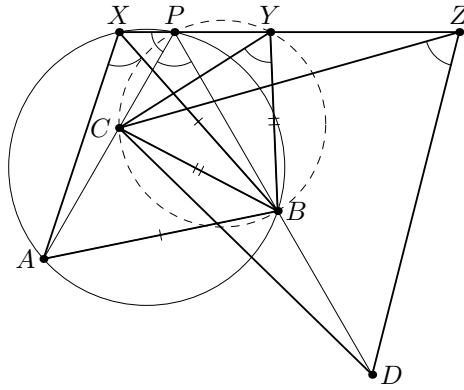


Рис. 9.3

точку. (В случае, если эти окружность и прямая касаются, получаем  $P = Y$ , и все три прямые проходят через  $Y$ .)

4. (А. Заславский) В треугольнике  $ABC$  отметили точки  $A'$ ,  $B'$  касания сторон  $BC$ ,  $AC$  с вписанной окружностью и точку  $G$  пересечения отрезков  $AA'$  и  $BB'$ . После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

**Первое решение.** Обозначим через  $C'$  точку касания вписанной окружности со стороной  $AB$ . Сделаем инверсию с центром в точке  $B'$ . Будем обозначать образы точек индексами «1», т.е. образом точки  $A'$  будет  $A'_1$  и т.п. Тогда образами прямых  $AB$  и  $BC$  будут окружности  $A_1B_1B'$  и  $C_1B_1B'$ , а образом вписанной окружности — прямая  $A'_1C'_1$ , касающаяся обеих окружностей (рис. 9.4.1). Далее, радикальная ось  $B'B_1$  этих окружностей, содержащая точку  $G_1$ , делит отрезок  $A'_1C'_1$  пополам.

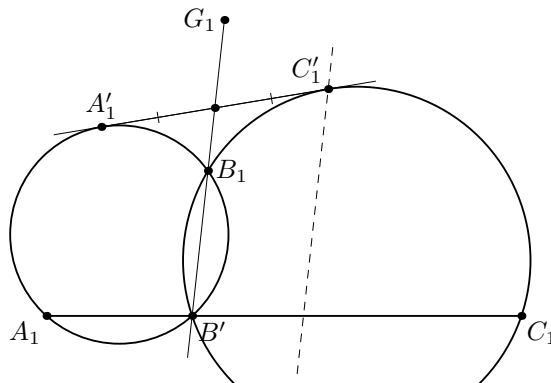


Рис. 9.4.1

Отсюда вытекает построение. Построим  $\ell_1$  — образ прямой  $B'G$  (на которой лежит  $B_1$ ) при гомотетии с центром  $A'_1$  и коэффициентом 2; эта прямая содержит  $C'_1$ . Значит, её инверсный образ содержит точку  $C'$ . Проведя аналогичное построение, начиная с инверсии в точке  $A'$ , получим вторую окружность, содержащую  $C'$  и, значит, сможем восстановить точку  $C'$  (вообще говоря, двумя способами). После этого восстанавливается описанная окружность треугольника  $A'B'C'$  и стороны исходного треугольника, являющиеся касательными к ней.

**Второе решение.** Пусть  $C'$  — точка касания вписанной окружности со стороной  $AB$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — проекции  $G$  на стороны треугольника  $A'B'C'$  (рис. 9.4.2).

Заметим, что

$$\frac{GB_1}{GA_1} = \frac{\rho(C, A'C')}{\rho(C, B'C')} = \frac{CA' \sin \angle CA'C'}{CB' \sin \angle CB'C'} = \frac{\sin \angle A'B'C'}{\sin \angle B'A'C'}$$

то есть  $GB_1 \sin \angle B'A'C' = GA_1 \sin \angle A'B'C'$ . Это означает, что проекции отрезков  $GA_1$  и  $GB_1$  на прямую  $A'B'$  равны, и  $C_1G$  является медианой в треугольнике  $A_1B_1C_1$ . Аналогично,  $A_1G$  также является медианой в этом треугольнике, т.е.  $G$  — его центр тяжести.

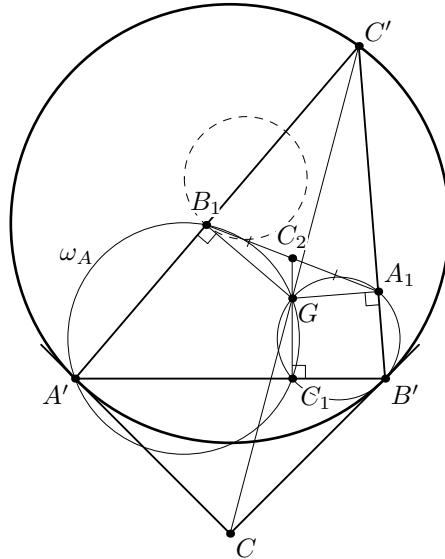


Рис. 9.4.2

Отсюда получаем искомое построение. Построим точку  $C_1$  и ее образ  $C_2$  при гомотетии с центром  $G$  и коэффициентом  $-\frac{1}{2}$  (таким образом,  $C_2$  — середина  $A_1B_1$ ). Далее построим окружности  $\omega_A, \omega_B$  с диаметрами  $GA', GB'$ , и найдем точку пересечения окружности  $\omega_A$  с окружностью, симметричной  $\omega_B$  относительно  $C_2$ ; мы получили точку  $B_1$  (опять же, вообще говоря, двумя способами). Точка  $A_1$  симметрична ей относительно  $C_2$ . Теперь можно восстановить прямые  $A'C'$  и  $B'C'$  как перпендикуляры к  $GA_1$  и  $GB_1$  в точках  $A_1$  и  $B_1$ ; дальнейшее ясно.

**Замечание.** В первом абзаце по сути доказывается, что точка Лемуана  $G$  (треугольника  $A'B'C'$ ) является центром тяжести своего педального треугольника  $A_1B_1C_1$ .



## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

### Финал. Второй день. 9 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle ABC = 90^\circ$ ), касается сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $AC$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Внеписанная окружность касается стороны  $BC$  в точке  $A_2$ .  $A_0$  — центр окружности, описанной около треугольника  $A_1A_2B_1$ ; аналогично определяется точка  $C_0$ . Найдите угол  $A_0BC_0$ .

**Решение.** Поскольку точки  $A_1$  и  $A_2$  симметричны относительно середины отрезка  $BC$ , то  $A_0B = A_0C$ . С другой стороны,  $A_0$  лежит на серединном перпендикуляре к отрезку  $A_1B_1$ , который совпадает с биссектрисой угла  $C$ . Следовательно,  $\angle CBA_0 = \angle A_0CB = \frac{1}{2}\angle C$ . Аналогично  $\angle ABC_0 = \frac{1}{2}\angle A$ , и, значит,  $\angle A_0BC_0 = \angle C - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = 45^\circ$ .

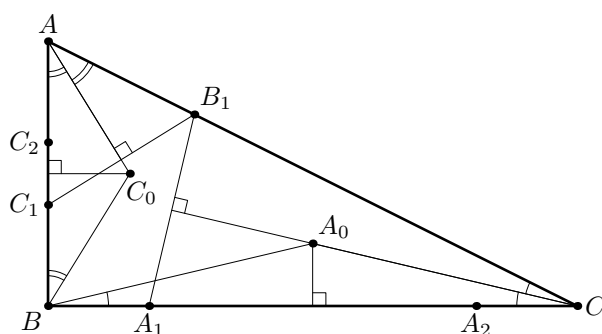


Рис. 9.5.

6. (Ю. Блинков) Произвольная прямая, проходящая через вершину  $B$  треугольника  $ABC$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $K$ , а описанную окружность в точке  $M$ . Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников  $AMK$ .

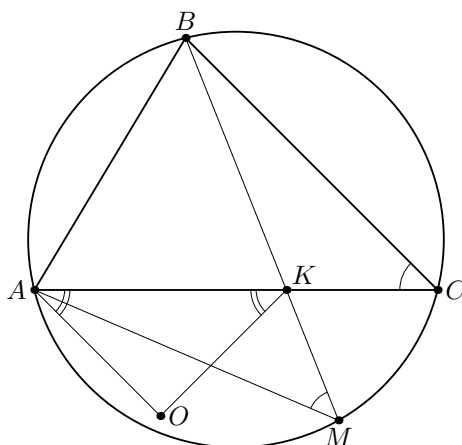


Рис. 9.6

**Решение.** Пусть угол  $C$  — острый. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $AMK$ . Так как  $\angle AMK = \angle AMB = \angle C$ , то  $\angle AOK = 2\angle C$  и  $\angle OKA = \angle OAC = 90^\circ - \angle C$ , т.е. этот угол не зависит от положения точек  $K$ ,  $M$  (рис. 9.6). Следовательно, все центры лежат на одной прямой. Более того, поскольку все прямые  $KO$  при различных положениях точки  $K$  параллельны друг другу, то, когда

точка  $K$  пробегает отрезок  $AC$ , точка  $O$  пробегает боковую сторону равнобедренного треугольника с основанием  $AC$  и углом при основании  $90^\circ - \angle C$  (этот треугольник и точка  $B$  лежат в разных полуплоскостях относительно  $AC$ ).

Если угол  $C$  тупой, то рассуждения аналогичны; получается боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при основании  $\angle C - 90^\circ$ , лежащего по ту же сторону от  $AC$ , что и  $B$ .

7. (Н. Белухов, Болгария) В треугольнике  $ABC$   $AL_a$  и  $AM_a$  — внутренняя и внешняя биссектрисы угла  $A$ . Пусть  $\omega_a$  — окружность, симметричная описанной окружности треугольника  $AL_aM_a$  относительно середины  $BC$ . Окружность  $\omega_b$  определена аналогично. Докажите, что  $\omega_a$  и  $\omega_b$  касаются тогда и только тогда, когда треугольник  $ABC$  прямоугольный.

**Первое решение.** Известно, что описанная окружность треугольника  $AL_aM_a$  перпендикулярна описанной окружности  $\Omega$  треугольника  $ABC$  и является геометрическим местом точек  $X$ , для которых  $BX : CX = BA : CA$ . Окружность  $\omega_a$  симметрична её относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ ; поэтому  $\omega_a$  также перпендикулярна  $\Omega$  и является геометрическим местом точек  $X$ , для которых  $BX : CX = CA : BA$ . Аналогичный факт верен и для  $\omega_b$ . Значит, множество общих точек  $\omega_a$  и  $\omega_b$  переходит в себя при инверсии относительно  $\Omega$ ; поэтому они касаются тогда и только тогда, когда некоторая их общая точка  $X$  лежит на  $\Omega$ ; при этом  $AH : BX : CX = BC : CA : AB$ .

Итак, если окружности касаются, то по теореме Птолемея одно из произведений  $AH \cdot BC$ ,  $BX \cdot CA$ ,  $CX \cdot AB$  равно сумме двух других. Так как эти произведения пропорциональны квадратам сторон треугольника  $ABC$ , он должен быть прямоугольным.

Наоборот, пусть треугольник  $ABC$  прямоугольный, и точки  $A, B, C, X$  (в некотором порядке) образуют прямоугольник. Тогда эти точки лежат на одной окружности, и нетрудно убедиться, что  $AH : BX : CX = BC : CA : AB$ ; это значит, что  $X$  — общая точка  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , а это равносильно тому, что они касаются.

**Второе решение.** Опять же напомним, что описанная окружность треугольника  $AL_aM_a$  является геометрическим местом точек  $X$ , для которых  $BX : CX = BA : CA$ , а её центр  $O_a$  лежит на касательной к  $\Omega$  в точке  $A$ . Кроме того, известно, что точки  $O_a, O_b, O_c$  лежат на одной прямой. Получаем, что центр  $O'_a$  окружности  $\omega_a$  симметричен  $O_a$  относительно середины  $BC$ , а её радиус равен длине касательной  $O'_aA'$ , проведённой из  $O'_a$  к  $\Omega$  (точка  $A'$  симметрична к  $A$  относительно серединного перпендикуляра к  $BC$ ).

Далее, точка  $X$  пересечения двух из окружностей  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  удовлетворяет соотношениям  $AH : BX : CX = BC : CA : AB$ , то есть лежит и на третьей окружности. Значит, если две из окружностей  $\omega_a, \omega_b, \omega_c$  касаются в точке  $X$ , то третья также проходит через эту точку и касается их обеих (ибо больше не имеет с ними общих точек).

Это замечание позволяет ограничиться случаем, когда  $C$  — наибольший угол треугольника  $ABC$ . Если  $\angle C = 90^\circ$ , то касательные из точек  $O'_a$  и  $O'_b$  к  $\Omega$  касаются её в одной и той же точке  $A' = B'$ , диаметрально противоположной  $C$  (рис. 9.7.1).

Значит, точки  $O'_a, O'_b, A'$  лежат на одной прямой и, следовательно, окружности с центрами  $O'_a, O'_b$ , проходящие через  $A'$ , касаются в ней.

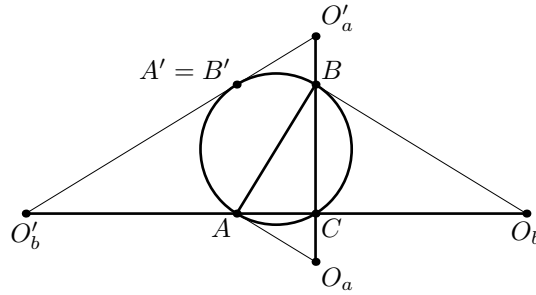


Рис. 9.7.1

Пусть угол  $C$  острый; проведём вторые касательные из точек  $O'_a$  и  $O'_b$  к  $\Omega$ ; тогда точки касания будут расположены так, как на рис. 9.7.2, и, следовательно, дуги  $B'B''$  и  $C'C''$  окружностей  $\omega_a$  и  $\omega_b$  пересекутся. Наконец, если угол  $C$  тупой (рис. 9.7.3), то отрезок  $O'_a O'_b$  пересекает  $\Omega$  в двух точках  $K$  и  $L$ ; тогда  $O_a A' + O_b B' = \sqrt{O_a K \cdot O_a L} + \sqrt{O_b K \cdot O_b L} < \frac{O_a K + O_a L}{2} + \frac{O_b K + O_b L}{2} = O_a O_b$ ; значит, сумма радиусов меньше расстояния между центрами, и окружности не имеют общих точек.

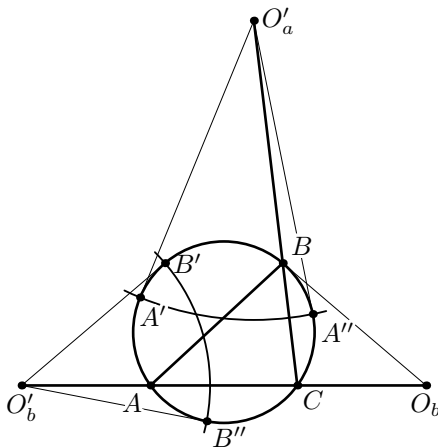


Рис. 9.7.2

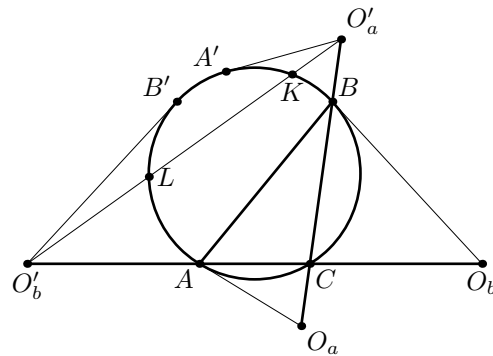


Рис. 9.7.3

8. (В. Гуровиц) На доске нарисован правильный многоугольник. Володя хочет отметить  $k$  точек на его периметре так, чтобы не существовало другого правильного многоугольника (не обязательно с тем же числом сторон), также содержащего отмеченные точки на своем периметре. Найдите наименьшее  $k$ , достаточное для любого исходного многоугольника.

**Ответ.**  $k = 5$ .

**Решение.** 1. Докажем сначала, что пяти точек достаточно. Пусть  $A, B, C, D$  — четыре последовательные вершины многоугольника (возможно,  $A = D$ ). Отметим точки  $A, B$ , произвольную точку  $X$  на стороне  $AB$ , точку  $Y$  на стороне  $BC$ , достаточно близкую к  $B$ , и точку  $Z$  на стороне  $CD$ , достаточно близкую к  $C$ .

Пусть  $P$  — исходный многоугольник,  $Q$  — некоторый правильный многоугольник, содержащий на периметре наши пять точек,  $\alpha$  и  $\beta$  — углы этих многоугольников. Прямая  $AB$  должна содержать сторону многоугольника  $Q$ , так как на ней лежат три отмеченных точки. Пусть эта сторона —  $A'B'$  (рис. 9.8.1). Далее, пусть сторона  $Q$ , содержащая  $Y$ , лежит на прямой  $\ell$ ; тогда точки  $B$  и  $Z$  должны лежать по одну сторону от неё. Поскольку  $Z$  близка к  $C$ , это означает, что угол между прямыми  $\ell$  и  $BC$  мал. С другой стороны,  $\alpha = \angle ABY \geq \angle A'B'Y \geq \beta$ , т.е. количество сторон у  $Q$  не больше, чем у  $P$ . Значит, угол между  $\ell$  и  $BC$  может быть достаточно мал лишь тогда, когда эти прямые совпадают. Итак, прямая  $BC$  также содержит сторону  $Q$ , а точка  $B$  тогда является его вершиной. Отсюда следует, что  $P$  и  $Q$  гомотетичны с центром в точке  $B$ , и контур  $Q$  может содержать  $Z$  только тогда, когда  $P = Q$ . Итак, многоугольник восстановился однозначно.

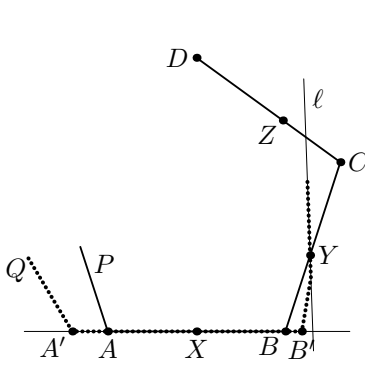


Рис. 9.8.1

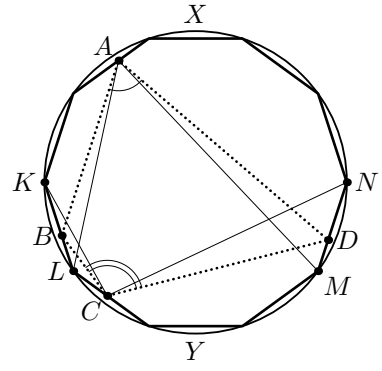


Рис. 9.8.2

2. Докажем теперь, что при достаточно большом числе сторон  $n$  правильного многоугольника  $P$  четырех точек не хватит для его задания. Предположим, что три из этих точек лежат на одной стороне  $AB$  многоугольника  $P$ . Правильный треугольник, построенный на  $AB$ , лежит целиком внутри  $P$ , т.е. четвертая из отмеченных точек лежит вне его. Поэтому, применив к нашему треугольнику гомотетию с центром в середине  $AB$  и подходящим коэффициентом, большим 1, можно добиться того, что и четвёртая отмеченная точка окажется на его контуре. Значит, в этом случае многоугольник однозначно не восстанавливается.

Если же наше предположение неверно, то отмеченные точки образуют выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , «достаточно близкий» ко вписанному. Именно, покажем, что  $\angle A + \angle C \geq 180^\circ - 360^\circ/n$ . Пусть точки  $B$  и  $C$  лежат на сторонах  $KL$  и  $MN$  многоугольника  $P$ , причём точки  $A, K$  и  $N$  лежат по одну сторону от  $BD$  (рис. 9.8.2). Опишем вокруг  $P$  окружность  $\omega$  с центром  $O$ . Тогда  $\angle A + \angle C \geq \angle LAM + \angle KCN = \frac{1}{2}(\widehat{LYM} + \widehat{KXN}) = 180^\circ - 360^\circ/n$ . Аналогично,  $\angle B + \angle D \geq 180^\circ - 360^\circ/n$ , то есть  $\angle A + \angle C \leq 180^\circ + 360^\circ/n$ .

Мы покажем, что  $ABCD$  можно вписать либо в квадрат, либо в правильный треугольник. Пусть  $\angle A$  — наибольший угол 4-угольника  $ABCD$ , а  $\angle B \geq \angle D$ . Возможны несколько случаев.

*Случай 1.* Пусть  $\angle B \geq 90^\circ$ . Тогда ясно, что  $ABCD$  можно вписать в квадрат так, чтобы точки  $A, B$  попали на одну из сторон (одним из способов на рис. 9.8.3, в

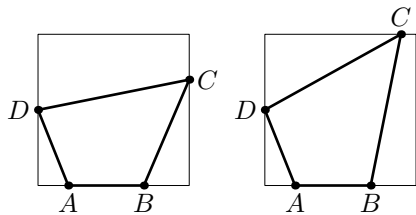


Рис. 9.8.3

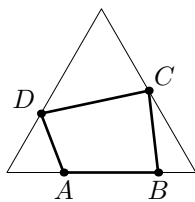


Рис. 9.8.4

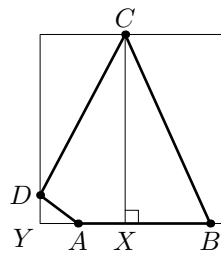


Рис. 9.8.5

зависимости от того, что больше: проекция  $CD$  на  $AB$  или проекция  $ABCD$  на прямую, перпендикулярную  $AB$ ).

*Случай 2.* Пусть теперь  $\angle D \leq \angle B < 90^\circ$ , но при этом обе суммы  $\angle A + \angle D$  и  $\angle B + \angle C$  не превосходят  $240^\circ$ . Проведём через  $C$  и  $D$  прямые, составляющие с  $AB$  углы  $60^\circ$  (рис. 9.8.4). Тогда из наших неравенств следует, что все точки  $A, B, C, D$  лежат на сторонах этого треугольника.

*Случай 3.* Нам остался случай, когда  $\angle D \leq \angle B < 90^\circ$  (а значит, оба этих угла близки к  $90^\circ$ ), но одна из сумм  $\angle A + \angle D$  и  $\angle B + \angle C$  больше  $240^\circ$  (поскольку  $\angle A$  — наибольший, это может быть лишь сумма  $\angle A + \angle D$ ). Покажем, что в этом случае можно вписать  $ABCD$  в квадрат так, как показано на рис. 9.8.5. Пусть  $X$  и  $Y$  — проекции точек  $C$  и  $D$  на  $AB$ ; тогда нам достаточно проверить, что  $YB \leq CX$ . Но  $\angle DCX = 270^\circ - (\angle A + \angle D) \leq 30^\circ$ , поэтому  $XY \leq CX \operatorname{tg} 30^\circ \leq CX/\sqrt{3}$ ; с другой стороны,  $\angle B \geq \frac{1}{2}(\angle B + \angle D) \geq 90^\circ - 180^\circ/n$ , т.е. при большом  $n$  имеем  $\operatorname{tg} \angle B \geq 10$ ; значит,  $XB = CX \operatorname{ctg} \angle B \leq CX/10$ , и  $YB \leq CX/\sqrt{3} + CX/10 < CX$ , что и требовалось.

**Замечание.** Пять точек требуются не для любого правильного многоугольника. Так, например, правильный треугольник можно восстановить и по четырём точкам: трём вершинам и внутренней точке одной из сторон.

## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина Финал. Первый день. 10 класс. Решения.

1. (А. Заславский) Пусть  $O, I$  — центры описанной и вписанной окружностей прямо-угольного треугольника;  $R, r$  — радиусы этих окружностей;  $J$  — точка, симметрич-ная вершине прямого угла относительно  $I$ . Найдите  $OJ$ .

**Ответ.**  $R - 2r$ .

**Решение.** Пусть  $ABC$  — данный прямоугольный треугольник,  $\angle C = 90^\circ$ . Очевидно, что окружность с центром  $J$  и радиусом  $2r$  касается  $AC$  и  $BC$ . Докажем, что она касается также описанной около треугольника  $ABC$  окружности  $\Omega$ ; отсюда как раз будет следовать, что  $OJ = R - 2r$ .

Рассмотрим окружность  $\omega$ , касающуюся  $AC, BC$  в точках  $P, Q$  соответственно, и касающуюся  $\Omega$  изнутри в точке  $T$ ; нам надо доказать, что  $J$  — центр  $\omega$ . Так как  $T$  — центр гомотетии  $\omega$  и  $\Omega$ , прямые  $TP, TQ$  вторично пересекают описанную окружность в точках, касательные в которых параллельны  $AC$  и  $BC$ , т.е. в серединах  $B', A'$  дуг  $AC, BC$ . Поэтому прямые  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются в точке  $I$ . Применяя теорему Паскаля к ломаной  $CAA'TB'B$ , получаем, что точки  $P, I, Q$  лежат на одной прямой. Наконец, поскольку прямая  $PQ$  перпендикулярна биссектрисе угла  $C$ , получаем, что  $P, Q$  — проекции  $J$  на  $AC$  и  $BC$  (рис. 10.1), что и означает, что  $J$  — центр  $\omega$ .

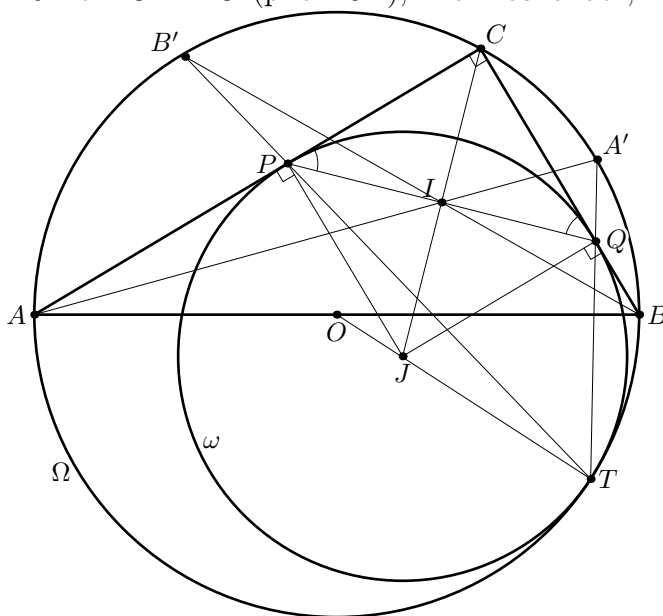


Рис. 10.1

**Второе решение.** По формуле Эйлера,  $OI = \sqrt{R(R - 2r)}$ . Поскольку  $OI$  — медиана в треугольнике  $OCJ$ , получаем  $4OI^2 = 2(OC^2 + OJ^2) - CJ^2$ , или  $4R(R - 2r) = 2R^2 + 2OJ^2 - 8r^2$ , откуда и следует  $OJ^2 = (R - 2r)^2$ .

2. (П. Кожевников) Каждая из двух равных окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$  проходит через центр другой. Треугольник  $ABC$  вписан в  $\omega_1$ , а прямые  $AC, BC$  касаются  $\omega_2$ . Докажите, что  $\cos \angle A + \cos \angle B = 1$ .

**Решение.** Пусть  $R$  — радиус окружностей,  $O$  — центр  $\omega_2$ ,  $P$  — точка на  $\omega_1$ , диаметрально противоположная к  $O$ , а  $A'$  — точка касания  $AC$  и  $\omega_2$ . Так как  $CO$  — биссектриса угла  $ACB$ , точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно прямой  $OP$ .

Заменим сумму косинусов произведением:  $\cos \angle A + \cos \angle B = 2 \sin \frac{\angle C}{2} \cos \frac{\angle A - \angle B}{2}$ . Из отмеченной выше симметрии следует, что  $\frac{|\angle A - \angle B|}{2} = \angle COP$ , т.е.  $OP \cos \frac{\angle A - \angle B}{2} = CO$ . Наконец, поскольку  $\frac{\angle C}{2} = \angle OCA = \angle OCA'$ , то  $CO \sin \frac{\angle C}{2} = OA' = R = \frac{OP}{2}$  (рис. 10.2). Итого,  $\cos \angle A + \cos \angle B = 2 \cdot \frac{CO}{OP} \cdot \frac{OP}{2CO} = 1$ , что и требовалось.

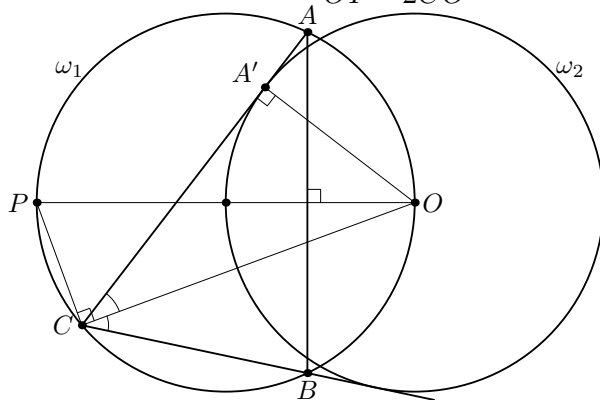


Рис. 10.2

3. (А. Акопян) Два выпуклых многоугольника  $A_1A_2 \dots A_n$  и  $B_1B_2 \dots B_n$  ( $n \geq 4$ ) таковы, что любая сторона первого больше соответствующей стороны второго. Может ли оказаться, что любая диагональ второго больше соответствующей диагонали первого?

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма.** Пусть  $ABC, ABC'$  — два таких треугольника, что  $AC > AC', BC > BC'$ . Тогда для любой точки  $K$  отрезка  $AB$  имеем  $CK > C'K$ .

*Доказательство.* Из условия следует, что точки  $A, B, C'$  лежат по одну сторону от серединного перпендикуляра к отрезку  $CC'$ . Значит, и точка  $K$  лежит по ту же сторону, что равносильно искомому неравенству.  $\square$

Докажем сначала утверждение задачи при  $n = 4$ . Предположим противное. Можно считать, что  $\frac{A_1A_3}{B_1B_3} \geq \frac{A_2A_4}{B_2B_4}$ . Применяв гомотегию (с коэффициентом  $\frac{A_1A_3}{B_1B_3}$ ) ко второму четырёхугольнику, можно считать, что  $B_1B_3 = A_1A_3, B_2B_4 \geq A_2A_4$ . Теперь, передвинув второй четырёхугольник, можно также считать, что  $B_1 = A_1, B_3 = A_3$ ; при этом  $A_1A_2 > A_1B_2, A_2A_3 > B_2A_3, A_3A_4 > A_3B_4, A_4A_1 > B_4A_1$ . Пусть  $E$  — точка пересечения диагоналей  $A_1A_3$  и  $A_2A_4$ ; тогда по Лемме имеем  $A_2E > B_2E, A_4E > B_4E$  и, следовательно,  $A_2A_4 = A_2E + A_4E > B_2E + B_4E \geq B_2B_4$ . Противоречие.

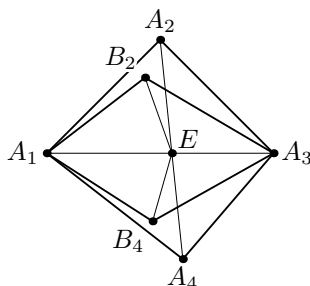


Рис. 10.3

Теперь докажем утверждение задачи индукцией по  $n$ . База при  $n = 4$  уже доказана. Пусть  $n \geq 5$ . Немного подвигав вершины второго многоугольника, можно добиться того, что все неравенства из задачи сохранятся, но при этом все отношения длин соответствующих диагоналей станут различными. Пусть  $\frac{A_1A_i}{B_1B_i}$  — максимальное такое отношение. Тогда, применив соответствующую гомотегию (с коэффициентом, меньшим 1) ко второму многоугольнику, мы получим, что  $A_1A_i > B_1B_i$ , но любая другая диагональ первого многоугольника меньше соответствующей диагонали второго. Теперь осталось применить предположение индукции к многоугольникам  $A_1A_2 \dots A_i$  и  $B_1B_2 \dots B_i$  (если  $i > 3$ ) или  $A_iA_{i+1} \dots A_n$  и  $B_iB_{i+1} \dots B_n$  (если  $i < n - 1$ ).

4. (Ф. Нилов) Проекции двух точек на стороны четырёхугольника лежат на двух различных концентрических окружностях (проекции каждой точки образуют вписанный четырёхугольник, а радиусы соответствующих окружностей различны). Докажите, что четырёхугольник — параллелограмм.

**Решение.** Пусть проекции точки  $P$  на стороны лежат на окружности с центром  $O$ , а  $P'$  — точка, симметричная  $P$  относительно  $O$ . Тогда проекции  $P'$  на стороны лежат на той же окружности. При этом  $P$  и  $P'$  являются фокусами некоторой коники, касающейся прямых, содержащих стороны четырёхугольника. Поэтому, если выполнены условия задачи, то стороны четырёхугольника являются общими касательными к двум коникам с общим центром. Таких касательных может быть не больше четырёх, и они разбиваются на две пары симметричных (а, значит, параллельных). Значит, стороны четырёхугольника и являются этими четырьмя касательными, а следовательно, образуют параллелограмм.



## VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

### Финал. Второй день. 10 класс. Решения.

5. (Д. Швецов) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle B = 90^\circ$ ) проведена высота  $BH$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABH$ , касается сторон  $AB, AH$  в точках  $H_1, B_1$  соответственно; окружность, вписанная в треугольник  $CBH$ , касается сторон  $CB, CH$  в точках  $H_2, B_2$  соответственно. Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $H_1BH_2$ . Докажите, что  $OB_1 = OB_2$ .

**Решение.** Обозначим  $\alpha = \angle ACB$ . Пусть  $I_1, I_2$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ABH, CBH$ . Из подобия этих треугольников следует, что  $I_1H_1 : I_2H_2 = AB : BC = \operatorname{tg} \alpha$ . Так как отрезки  $I_1H_1, I_2H_2$  перпендикулярны соответственно  $AB$  и  $BC$ , то проекции этих отрезков на  $AC$  равны  $I_1H_1 \cos \alpha$  и  $I_2H_2 \sin \alpha$ , то есть равны друг другу. Тогда, поскольку  $O$  — середина  $H_1H_2$ , то проекция  $O$  на  $AC$  совпадает с серединой  $B_1B_2$ , что равносильно утверждению задачи (рис. 10.5).

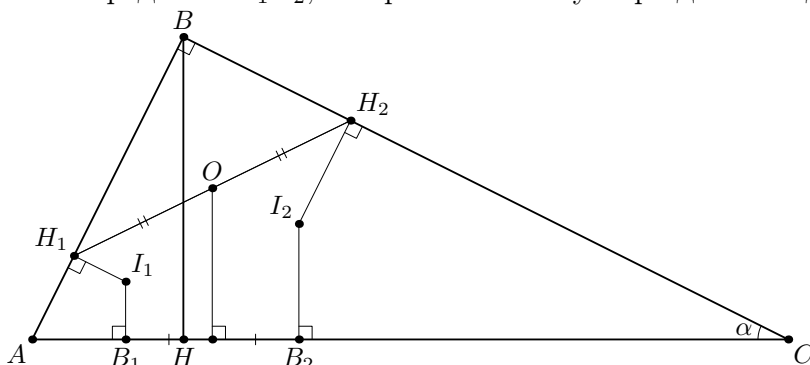


Рис. 10.5

6. (Ф. Нилов) Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается его сторон в точках  $A', B'$  и  $C'$ . Известно, что ортоцентры треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  совпадают. Верно ли, что  $ABC$  — правильный?

**Ответ.** Да.

**Первое решение.** Предположим противное. Пусть  $O, I$  — центры описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$ ,  $H$  — совпадающий ортоцентр треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$ ,  $A'', B'', C''$  — вторые точки пересечения прямых  $A'H', B'H', C'H'$  со вписанной окружностью  $\omega$ . Тогда  $\angle A''C''C' = \angle A''A'C' = 90^\circ - \angle A'C'B' = \angle B''B'C' = \angle B''C''C'$ ; это значит, что  $A''B''$  параллельна касательной к  $\omega$  в точке  $C'$ , то есть  $A''B'' \parallel AB$ . Значит, стороны треугольников  $ABC$  и  $A''B''C''$  параллельны друг другу, а  $H$  — центр вписанной окружности треугольника  $A''B''C''$ . Следовательно, существует гомотетия, переводящая треугольник  $ABC$  в  $A''B''C''$ . При этой гомотетии центр описанной окружности  $O$  переходит в  $I$ , а точка пересечения биссектрис  $I$  — в  $H$ . Таким образом, точка  $H$  лежит на прямой  $OI$ , причем  $OI : IH = R : r$  (рис. 10.6).

Какие-то две вершины треугольника  $ABC$  (например,  $A$  и  $B$ ) не лежат на прямой  $OI$ . Так как  $AI, BI$  — биссектрисы углов  $OAH, OBH$  соответственно, то  $OI : IH = AO : AH = BO : BH$ . Следовательно,  $AH = BH = r$ , что невозможно, ибо  $AH + BH \geq AB > 2r$ . Полученное противоречие показывает, что треугольник  $ABC$  — правильный.

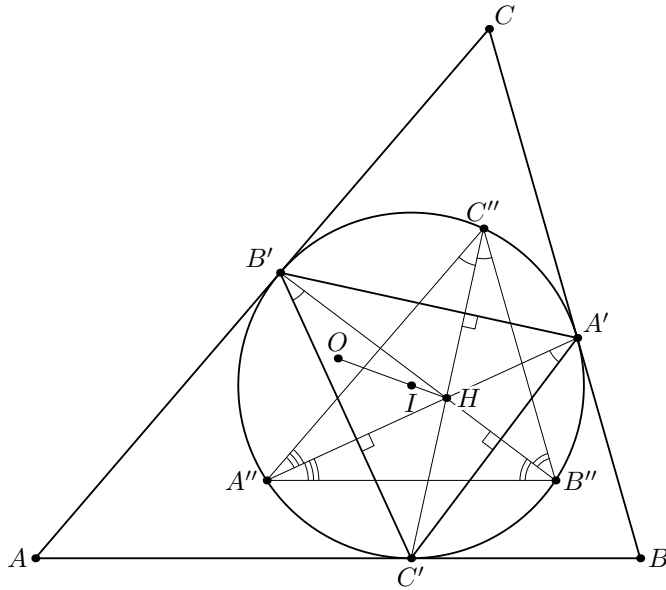


Рис. 10.6

**Второе решение.** Опять же предположим противное и обозначим через  $H$  совпадающий ортоцентр. Имеем  $IC' \parallel HC \perp AB$  и  $CI \parallel C'H \perp A'B'$ . Значит, либо точки  $C, I, C', H$  лежат на одной прямой (и тогда  $AC = BC$ ), либо четырёхугольник  $CIC'H$  — параллелограмм; аналогичное утверждение верно про остальные вершины. У треугольника  $ABC$  найдётся сторона (скажем,  $AB$ ), не равная ни одной другой его стороне. Тогда четырёхугольники  $AIA'H$  и  $BIB'H$  — параллелограммы, и  $AH = AI = r = BI = BH = r$ , что опять же невозможно, ибо  $AH + BH \geq AB > 2r$ .

7. (Б. Френкин) Каждый из двух правильных многогранников  $P$  и  $Q$  разрежали плоскостью на две части. Одну из частей  $P$  и одну из частей  $Q$  приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

**Ответ.** Да, может; 4 или 8 граней.

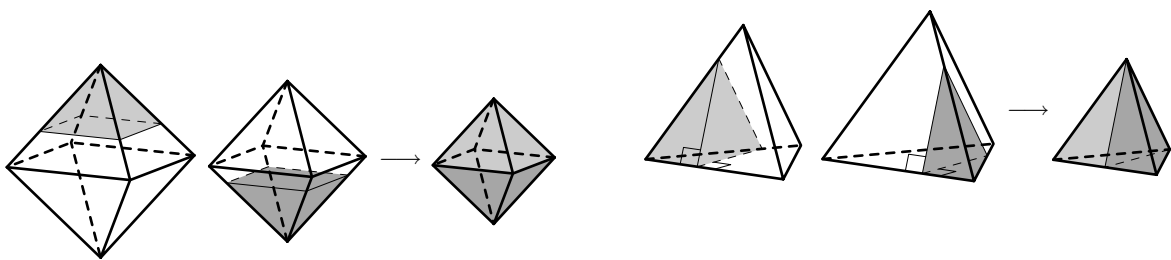


Рис. 10.7

**Решение.** Пусть  $R$  — полученный многогранник. Ясно, что часть многогранника  $P$  содержит хотя бы одну его вершину  $A$ , не лежащую в плоскости разреза. Многогранный угол многогранника  $P$  при ней будет также многогранным углом при вершине многогранника  $R$ ; это означает, что все многогранники  $P$  и  $Q$  подобны. Аналогично,  $Q$  также подобен им. Более того, если хотя бы одно ребро многогранника  $P$ , выходящее из  $A$ , не имеет общих точек (даже другой вершины!) с плоскостью разреза, то оно также будет являться ребром в  $R$ . Тогда в подобных многогранниках  $P$  и  $R$  рёбра равны, а следовательно, равны и многогранники, что невозможно.

Итак, часть  $P$ , вошедшая в  $R$  — это пирамида с вершиной  $A$ . Аналогично, часть  $Q$ , вошедшая в  $R$  — это пирамида с вершиной  $B$ . Следовательно, не менее половины граней в  $R$  примыкает к одной и той же вершине. Это исключает додекаэдр и икосаэдр. Если наши многогранники — кубы, то от  $P$  и  $Q$  отрезаются треугольные пирамиды, и в итоговом многограннике не больше 5 вершин, что неверно.

Оставшиеся случаи октаэдра и тетраэдра возможны, как показано на рис. 10.7.

8. (Н. Белухов, Болгария) Вокруг треугольника  $ABC$  описали окружность  $k$ . На сторонах треугольника отметили три точки  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , после чего сам треугольник стерли. Докажите, что его можно однозначно восстановить тогда и только тогда, когда прямые  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке.

**Решение.** Докажем сначала следующую лемму.

**Лемма.** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , вписанные в окружность  $k$ ; пусть их соответствующие стороны пересекаются в точках  $A_1, B_1, C_1$  (рис. 10.8.1). Тогда

$$\left( \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \right) \cdot \left( \frac{A'C_1}{C_1B'} \cdot \frac{B'A_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'B_1}{B_1A'} \right) = 1.$$

*Доказательство.* Из подобных треугольников  $AC_1A'$  и  $B'C_1B$  имеем  $\frac{AC_1}{B'C_1} = \frac{AA'}{BB'}$  и  $\frac{A'C_1}{BC_1} = \frac{AA'}{BB'}$ . Перемножая эти равенства с четырьмя аналогичными, получаем требуемое.  $\square$

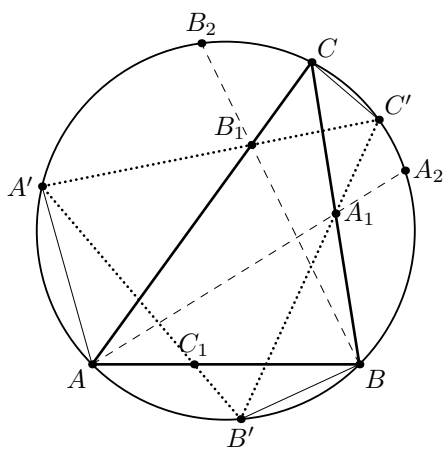


Рис. 10.8.1

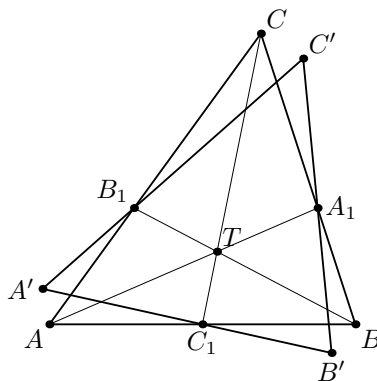


Рис. 10.8.2

Перейдём к решению задачи. Докажем сначала, что для любых точек  $A_1, B_1$  на сторонах  $BC$  и  $AC$  найдётся не более одной точки  $C_1$  на стороне  $AB$  такой, что треугольник  $ABC$  восстанавливается однозначно. Зафиксируем треугольник  $ABC$  и точки  $A_1, B_1$ . Пусть  $A_2, B_2$  — вторые точки пересечения прямых  $AA_1, BB_1$  с окружностью  $k$ ;  $C'$  — произвольная точка дуги  $A_2CB_2$ ;  $A', B'$  — вторые точки пересечения прямых  $C'A_1, C'B_1$  с  $k$ ;  $C_1$  — точка пересечения  $AB$  и  $A'B'$ . Когда точка  $C'$  близка к  $A_2$  или к  $B_2$ , точка  $C_1$  близка к  $A$  или  $B$ , соответственно. Далее, при движении точки  $C'$  от  $A_2$  до  $B_2$  точка  $C_1$  непрерывно движется от  $A$  до  $B$  (в случае, когда

$C = C'$ , рассматривается предельное положение точки  $C_2$ ; то, что оно существует, гарантируется Леммой). Значит, для любой точки  $C_1$ , кроме, возможно, вышеупомянутого предельного положения, треугольник  $ABC$  однозначно не восстанавливается, ибо существует второй треугольник  $A'B'C'$ .

Осталось доказать, что, если  $AA_1, BB_1, CC_1$  пересекаются в одной точке  $T$ , то треугольник восстанавливается однозначно (тогда из вышедоказанного следует, что других случаев нет). Пусть это не так; тогда из Леммы мы получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{A'C_1}{C_1B'} \cdot \frac{B'A_1}{A_1C'} \cdot \frac{C'B_1}{B_1A'} = 1,$$

то есть отрезки  $A'A_1, B'B_1, C'C_1$  также пересекаются в одной точке  $T'$ . Но это невозможно. Действительно, пусть, например, точка  $A'$  лежит на дуге  $AC$  (рис. 10.8.2); тогда  $T'$  не может лежать в угле  $ATB$ , так как его не пересекает отрезок  $A'A_1$ . Остальные случаи разбираются аналогично.