III Всероссийская олимпиада по геометрии имени Игоря Фёдоровича Шарыгина

I (заочный) тур

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведённом ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов.

Работа с решениями задач должна быть прислана в обычной тетради
не позднее 1 апреля 2007 года по адресу:
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. МЦНМО.
На олимпиаду им. И.Ф.Шарыгина.

Работа должна быть выполнена на русском языке. Присылайте ее простой бандеролью, не сворачивая тетрадь в трубку.

На обложке тетради обязательно приведите следующие сведения:

фамилию, имя, отчество;
полный почтовый адрес с индексом и
(если есть) телефон и/или E-mail;
класс, в котором сейчас учитесь;
номер и адрес Вашей школы;
ФИО учителей математики и/или
руководителей кружка, в котором занимаетесь.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем — записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведённом в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вы использовали факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Условия задач заочного тура

1) (8) Треугольник разрезан на несколько (не менее двух) треугольников. Один из них равнобедренный (не равносторонний), а остальные — равносторонние. Найдите углы исходного треугольника.

2) (8) Каждая диагональ четырехугольника разбивает его на два равнобедренных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

3) (8–9) Отрезки, соединяющие внутреннюю точку выпуклого неравностороннего n-угольника с его вершинами, делят n-угольник на n равных треугольников. При каком наименьшем n это возможно?

4) (8) Существует ли такой параллелограмм, что все точки попарных пересечений биссектрис его углов лежат вне параллелограмма?

5) Невыпуклый n-угольник разрезали прямолинейным разрезом на три части, после чего из двух частей сложили многоугольник, равный третьей части. Может ли n равняться

   а) (8) пяти?

   б) (8–10) четырем?

6) а) (8–9) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многоугольник, т.е. многоугольник, стороны которого лежат на линиях листа бумаги в клетку? (укажите все возможные значения)

б) (10–11) Сколько осей симметрии может иметь клетчатый многогранник, т.е. многогранник, составленный из одинаковых кубиков, примыкающих друг к другу целыми гранями?

7) (8–9) Выпуклый многоугольник описан около окружности. Точки касания его сторон с окружностью образуют многоугольник с таким же набором углов (порядок углов может быть другим). Верно ли, что многоугольник правильный?

8) (8–9) Три окружности проходят через точку P, а вторые точки их пересечения A, B, C лежат на одной прямой. A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с соответствующими окружностями. C_2 — точка пересечения прямых AB_1 и BA_1. A_2, B_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

9) (8–9) Два выпуклых четырехугольника таковы, что стороны каждого лежат на серединных перпендикулярах к сторонам другого. Найдите их углы.

10) (8–9) Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через 3 заданные точки A, B, C (т.е. на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).

11) (8–10) Мальчик с папой стоят на берегу моря. Если мальчик встанет на цыпочки, его глаза будут на высоте 1 м от поверхности моря, а если сядет папе на плечи, то на высоте 2 м. Во сколько раз дальше он будет видеть во втором случае. (Найдите ответ с точностью до 0,1, радиус Земли считайте равным 6000 км)

12) (9–10) Дан прямоугольник $ABCD$ и точка P. Прямые, проходящие через A и B и перпендикулярные, соответственно, PC и PD, пересекаются в точке Q. Докажите, что $PQ \perp AB$.

13) (9–10) На стороне AB треугольника ABC взяты точки X, Y, такие что $AX = BY$. Прямые CX и CY вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках U и V. Докажите, что все прямые UV проходят через одну точку.

14) (9–11) В трапеции с основаниями AD и BC P и Q — середины диагоналей AC и BD, соответственно. Докажите, что, если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$.

15) (9–11) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB' и CC'. Пусть $A'B' \cap CC' = P$ и $A'C' \cap BB' = Q$. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

16) (9–11) На сторонах угла взяты точки A, B. Через середину M отрезка AB проведены две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, другая — в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают AB в точках P и Q. Докажите, что M — середина PQ.

17) (9–11) Какие треугольники можно разрезать на три треугольника с равными радиусами описанных окружностей?

18) (9–11) Найдите геометрическое место вершин треугольников с заданными ортоцентром и центром описанной окружности.

19) (10–11) В угол A, равный α, вписана окружность, касающаяся его сторон в точках B и C. Прямая, касающаяся окружности в некоторой точке M, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q, соответственно. При каком наименьшем α возможно неравенство $S_{PAQ} < S_{BMC}$?

20) (11) Основанием пирамиды является правильный треугольник со стороной 1. Из трех углов при вершине пирамиды два — прямые. Найдите наибольший объем пирамиды.

21) (11) На плоскости лежат три трубы (круговые цилиндры одного размера в обхвате 4 м). Две из них лежат параллельно и, касаясь друг друга по общей образующей, образуют над плоскостью тоннель. Третья, перпендикулярная к первым двум, вырезает в тоннеле камеру. Найдите площадь границы этой камеры.