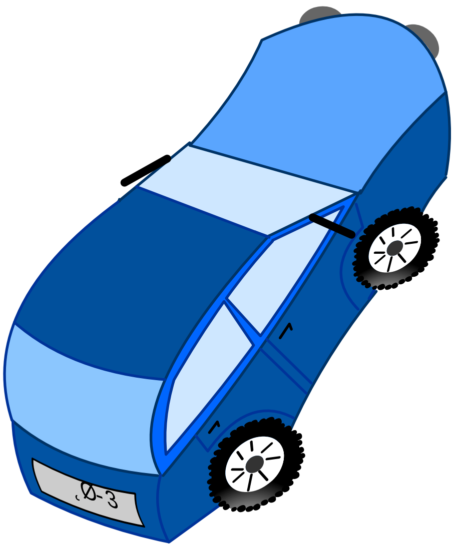
III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс

1. Определите, с какой стороны расположен руль у изображенного на рисунке автомобиля.



2. Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) по вершинам A, C и точке на биссектрисе угла B.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.

4. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, у которых даны середина одной стороны и основания высот, опущенных на две другие.

5. Медианы AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке M, $\angle AMB = 120°$. Докажите, что углы $AB'M$ и $BA'M$ не могут быть оба острыми или оба тупыми.

6. Назовем два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их ABC и $A'B'C'$, так чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс

1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что радиус этой окружности меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD.

2. На основании AD и боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ взяты точки E, F соответственно так, что $CDEF$ — также равнобедренная трапеция. Докажите, что $AE \cdot ED = AF \cdot FB$.

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.

4. Дан треугольник ABC. Точка P лежит на окружности ABH, где H — ортоцентр треугольника. Прямые AP, BP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A', B'. Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.

5. Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.

6. Куб с ребром $2n+1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?

III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс

1. В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.

2. Точки A', B', C' — основания высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (точки K и A лежат по одну сторону от BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO, где O — центр окружности, описанной около ABC.

3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q. C — произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q; A, B — вторые точки пересечения прямых CP, CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки C', D' симметричны ортоцентрам треугольников ABD и ABC относительно O. Докажите, что если прямые BD и BD' симметричны относительно биссектрисы угла B, то прямые AC и AC' симметричны относительно биссектрисы угла A.

5. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?

6. Даны две концентрические окружности. Каждая из окружностей b_1 и b_2 касается внешним образом одной окружности и внутренним — другой, а каждая из окружностей c_1 и c_2 касается внутренним образом обеих окружностей. Докажите, что 8 точек, в которых окружности b_1, b_2 пересекают c_1, c_2, лежат на двух окружностях, отличных от b_1, b_2, c_1, c_2. (Некоторые из этих окружностей могут выродиться в прямые.)