Вторая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Задачи заочного тура
март–май 2006

1. (8) Две прямые, пересекающиеся под углом 46°, являются осями симметрии фигуры F на плоскости. Какое наименьшее число осей симметрии может иметь эта фигура?

2. (8-9) Точки A, B движутся с равными скоростями по двум равным окружностям. Доказать, что серединные перпендикуляры к AB проходят через фиксированную точку.

3. (8-9) На карте указаны отрезки трех прямолинейных дорог, соединяющих три деревни, но сами деревни расположены за пределами карты. Кроме того, на карте не указана пожарная часть, находящаяся на равном расстоянии от трех деревень, хотя место ее расположения находится в пределах карты. Можно ли найти это место с помощью циркуля и линейки, если проводить построения только в пределах карты?

4. а) (8) Даны два квадрата $ABCD$ и $DEFG$, причем точка E лежит на отрезке CD, а точки F, G вне квадрата $ABCD$. Найти угол между прямыми AE и BF.

   б) (9-11) Даны два правильных пятиугольника $OKLMN$ и $OPRST$, причем точка P лежит на отрезке ON, а точки R, S, T вне пятиугольника $OKLMN$. Найти угол между прямыми KP и MS.

5. а) (8) Сложить квадрат 10×10 из прямоугольной полоски 1×118.

   б) (9-11) Сложить квадрат 10×10 из прямоугольной полоски $1 \times (100 + 9\sqrt{3})$ (примерно 1x115.58).

   Полоскуможно сгибать, но не разрывать.

6. а) (8-9) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющийся хордой окружности радиуса R. Вписать в образовавшийся сегмент окружность, касающуюся точки C и окружности радиуса R.

   б) (9-10) Дан отрезок AB с точкой C внутри него, являющейся точкой касания окружности радиуса r. Провести через A и B окружность, касающуюся окружности радиуса r.

7. (8-10) Внутри квадрата $ABCD$ взята точка E, а вне — точка F, так что треугольники ABE и BCF равны. Найдите углы треугольника ABE, если известно, что EF равно стороне квадрата, а угол BFD — прямой.

8. (8-9) Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2, причем $r_1 > r_2$. Найти длину AB.

9. (8-10) $L(\alpha)$ — прямая, соединяющая точки единичной окружности, отвечающие углам α и $\pi - 2\alpha$. Доказать, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то прямые $L(\alpha)$, $L(\beta)$ и $L(\gamma)$ пересекаются в одной точке.

10. (8-11) При каких n правильный n-угольник можно разрезать непересекающимися диагоналями на $n - 2$ равнобедренных (в т.ч. равносторонних) треугольников?

11. (9-10) В треугольнике ABC O — центр описанной окружности, A', B', C' — точки, симметричные A, B, C относительно противоположных сторон, A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых OA' и BC, OB' и AC, OC' и AB. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

12. (9-10) В треугольнике ABC биссектриса угла A равна полусумме высоты и медианы, проведённых из вершины A. Докажите, что если $\angle A$ тупой, то $AB = AC$.

13. (9-10) Даны две прямые a и b, а также точки A и B. Точка X скользит по прямой a, а точка Y по прямой b, так что $AX \parallel BY$. Найти ГМТ пересечения AY с XB.

14. (9-11) Дана окружность и не лежащая на ней фиксированная точка P. Найдите геометрическое место ортоцентров треугольников ABP, где AB — диаметр окружности.

15. (9-11) Около треугольника ABC описана окружность и в него же вписана окружность, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает прямую BC в точке P, а M — середина отрезка PA_1. Докажите, что отрезки касательных, проведенных из точки M к вписанной и описанной окружности, равны.

16. (9-11) На сторонах треугольника ABC построены во внешнюю сторону правильные треугольники. Оказалось, что их вершины образуют правильный треугольник. Верно ли, что исходный треугольник — правильный?

17. (9-11) В двух окружностях, пересекающихся в точках A и B, проведены параллельные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Прямые AA_1 и BB_2 пересекаются в точке X, AA_2 и BB_1 — в точке Y. Доказать, что $XY \parallel A_1B_1$.

18. (9-11) Через ортоцентр H треугольника ABC проведены две перпендикулярные прямые, одна из которых пересекает BC в точке X, а другая AC в точке Y. Прямые AZ, BZ параллельны, соответственно, HX и HY. Доказать, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.

19. (10-11) Через середины сторон треугольника T проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам противолежащих углов треугольника. Эти прямые образовали треугольник T_1. Докажите, что центр описанной около T_1 окружности находится в середине отрезка, образованного центром вписанной окружности и точкой пересечения высот треугольника T.

20. (10-11) Даны четыре точки A, B, C, D. A_1, B_1, C_1, D_1 — ортоцентры треугольников BCD, CDA, DAB, ABC. A_2, B_2, C_2, D_2 — ортоцентры треугольников $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$ и т.д. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон всех треугольников, пересекаются в одной точке.

21. (10-11) На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C', A', B'. Докажите, что для площадей соответствующих треугольников выполняется неравенство:

$$S_{ABC}S^2_{A'B'C'} \geqslant 4S_{AB'C'}S_{BC'A'}S_{CA'B'},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

22. (10-11) Дана окружность, точки A, B на ней и точка P. X — произвольная точка окружности, Y — точка пересечения прямых AX и BP. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников PXY.

23. $\boldsymbol{ABCD}$ — выпуклый четырехугольник, $\boldsymbol{G}$ — его центр тяжести как однородной пластины (т.е. точка пересечения двух прямых, каждая из которых соединяет центроиды треугольников, имеющих общую диагональ).

а) (9-10) Пусть около $\boldsymbol{ABCD}$ можно описать окружность с центром в $\boldsymbol{O}$. $\boldsymbol{H}$ определим аналогично $\boldsymbol{G}$, взяв вместо центроидов ортоцентры. Тогда точки $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{O}$ лежат на одной прямой и $\boldsymbol{HG : GO = 2 : 1}$.

б) (10-11) Пусть в $\boldsymbol{ABCD}$ можно вписать окружность с центром в $\boldsymbol{I}$. Точкой Нагеля $\boldsymbol{N}$ описанного четырехугольника назовем точку пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности относительно середин сторон. (Эти прямые делят периметр четырехугольника пополам). Тогда $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{I}$ лежат на одной прямой, причем $\boldsymbol{NG : GI = 2 : 1}$.

24. а) (9-10) Через фиксированную точку $\boldsymbol{P}$ внутри данной окружности проводятся два перпендикулярных луча, пересекающих окружность в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Найти геометрическое место проекций $\boldsymbol{P}$ на прямые $\boldsymbol{AB}$.

б) (10-11) Через фиксированную точку $\boldsymbol{P}$ внутри данной сферы проводятся три попарно перпендикулярных луча, пересекающих сферу в точках $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Найти геометрическое место проекций $\boldsymbol{P}$ на плоскости $\boldsymbol{ABC}$.

25. (11) В тетраэдре $\boldsymbol{ABCD}$ двугранные углы при ребрах $\boldsymbol{BC}$, $\boldsymbol{CD}$ и $\boldsymbol{DA}$ равны $\boldsymbol{\alpha}$, а при остальных ребрах — $\boldsymbol{\beta}$. Найдите отношение $\boldsymbol{AB/CD}$.

26. (11) Даны четыре конуса с общей вершиной и одинаковой образующей, но с, вообще говоря, разными радиусами оснований. Каждый из них касается двух других. Докажите, что четыре точки касания окружностей оснований конусов лежат на одной окружности.