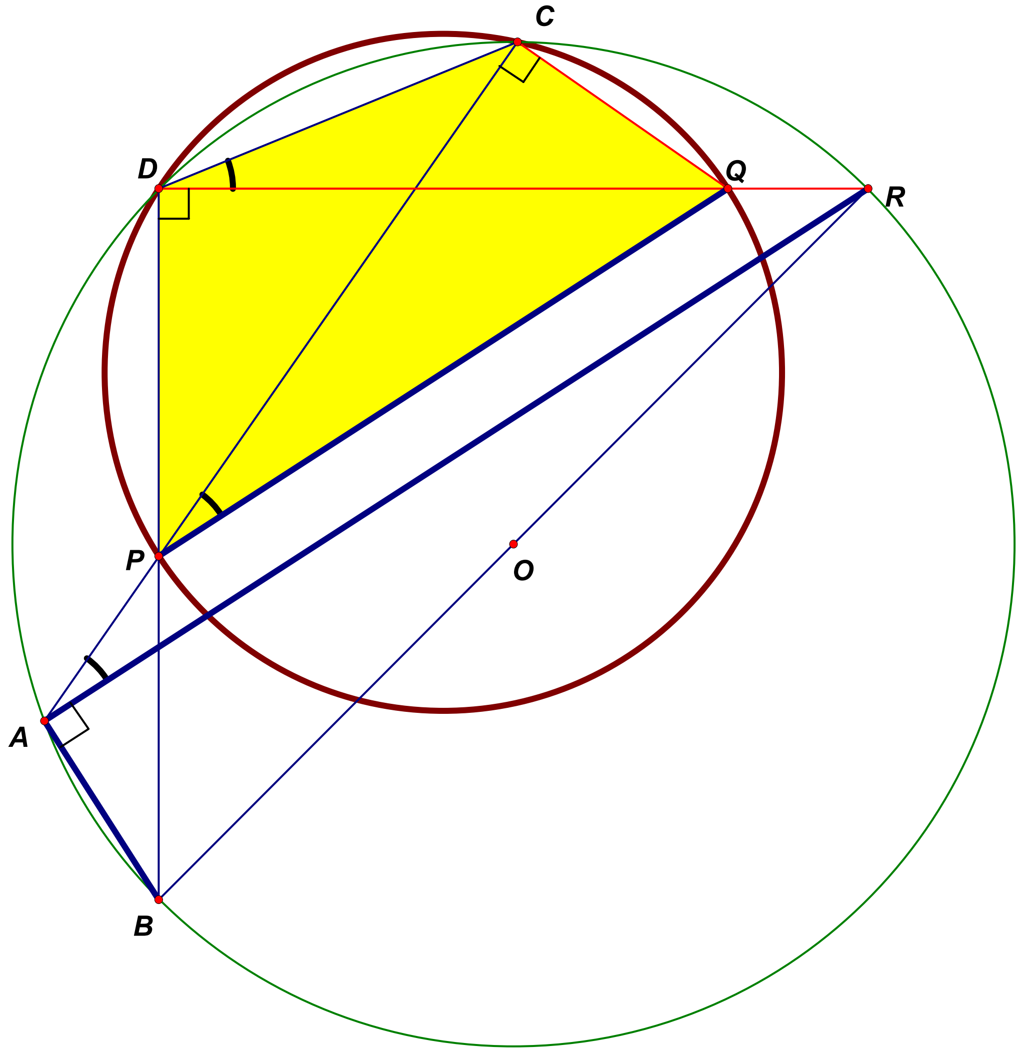
Задача 1. (А.Заславский)

Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке P. Перпендикуляры к AC и BD ,в точках C и D соответственно, пересекаются в точке Q. Докажите, что прямые AB и PQ перпендикулярны.

Решение.



Пусть перпендикуляры пересекаются внутри окружности (случай внешней точки рассматривается аналогично). Отметим точку R – вторую точку пересечения прямой DQ с окружностью.

Четырехугольник $PDCQ$ вписан в окружность (он образован двумя прямоугольными треугольниками с общей гипотенузой PQ), поэтому $\angle CDQ = \angle CPQ$, как опирающиеся на одну дугу. По этой же причине $\angle CDQ = \angle CDR = \angle CAR$, и, значит, прямые PQ и AR параллельны (соответственные углы равны).

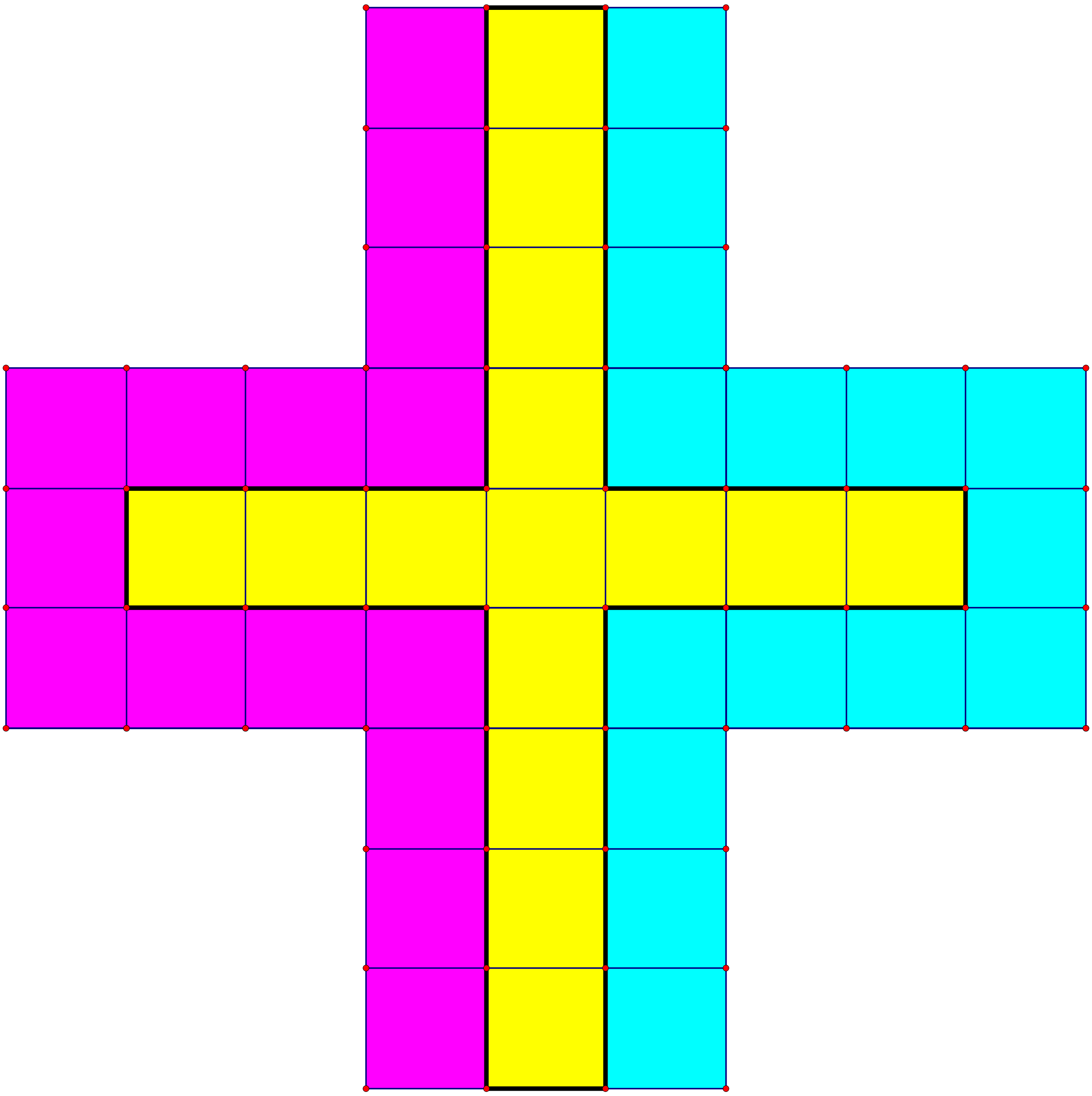
Но BR является диаметром, как следует из условия, поэтому $\angle BAR = 90^0$.

Задача 2. (Л.Емельянов)

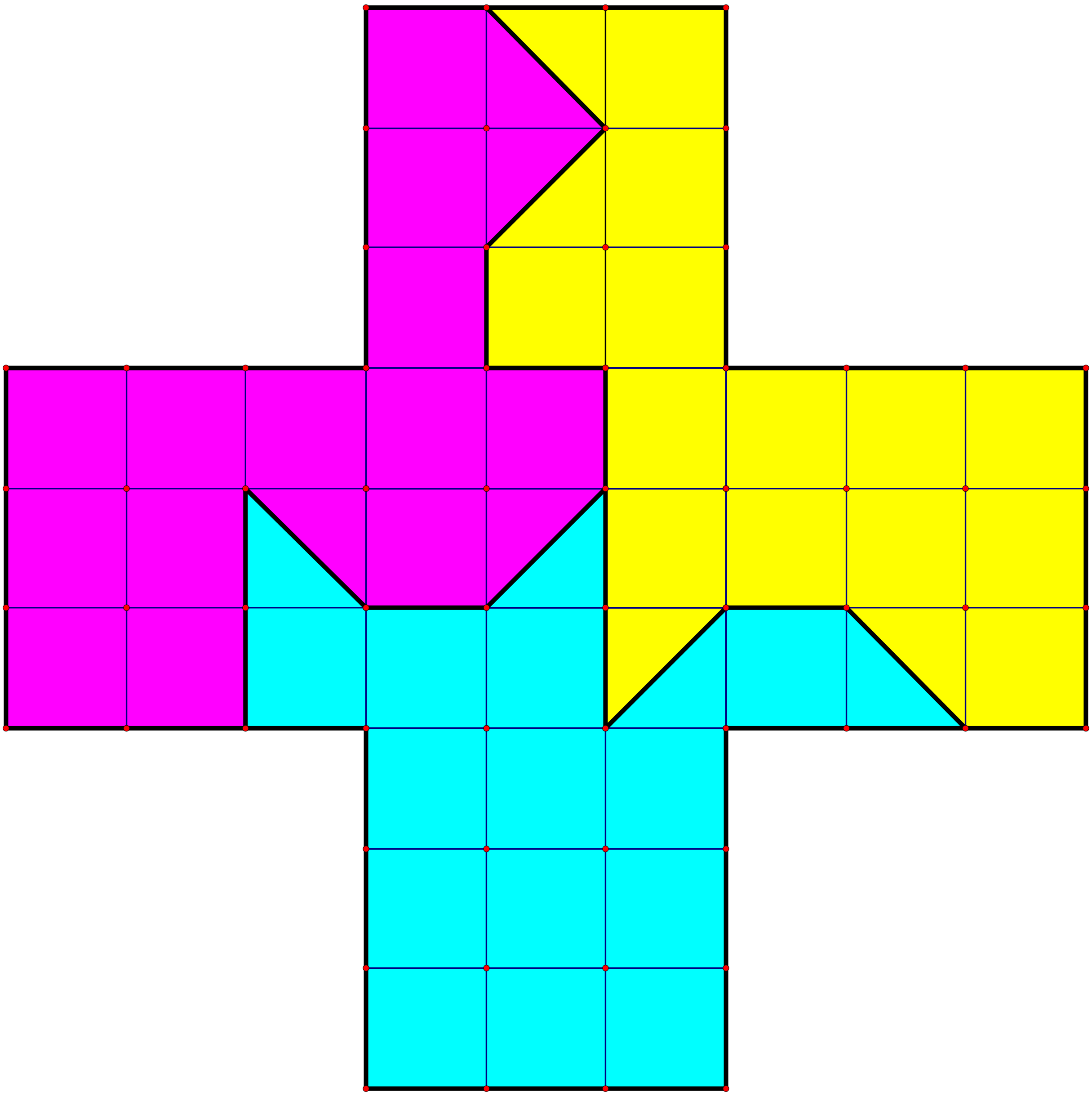
Разрежьте крест, составленный из пяти одинаковых квадратов, на три многоугольника, равных по площади и периметру.

Решение:

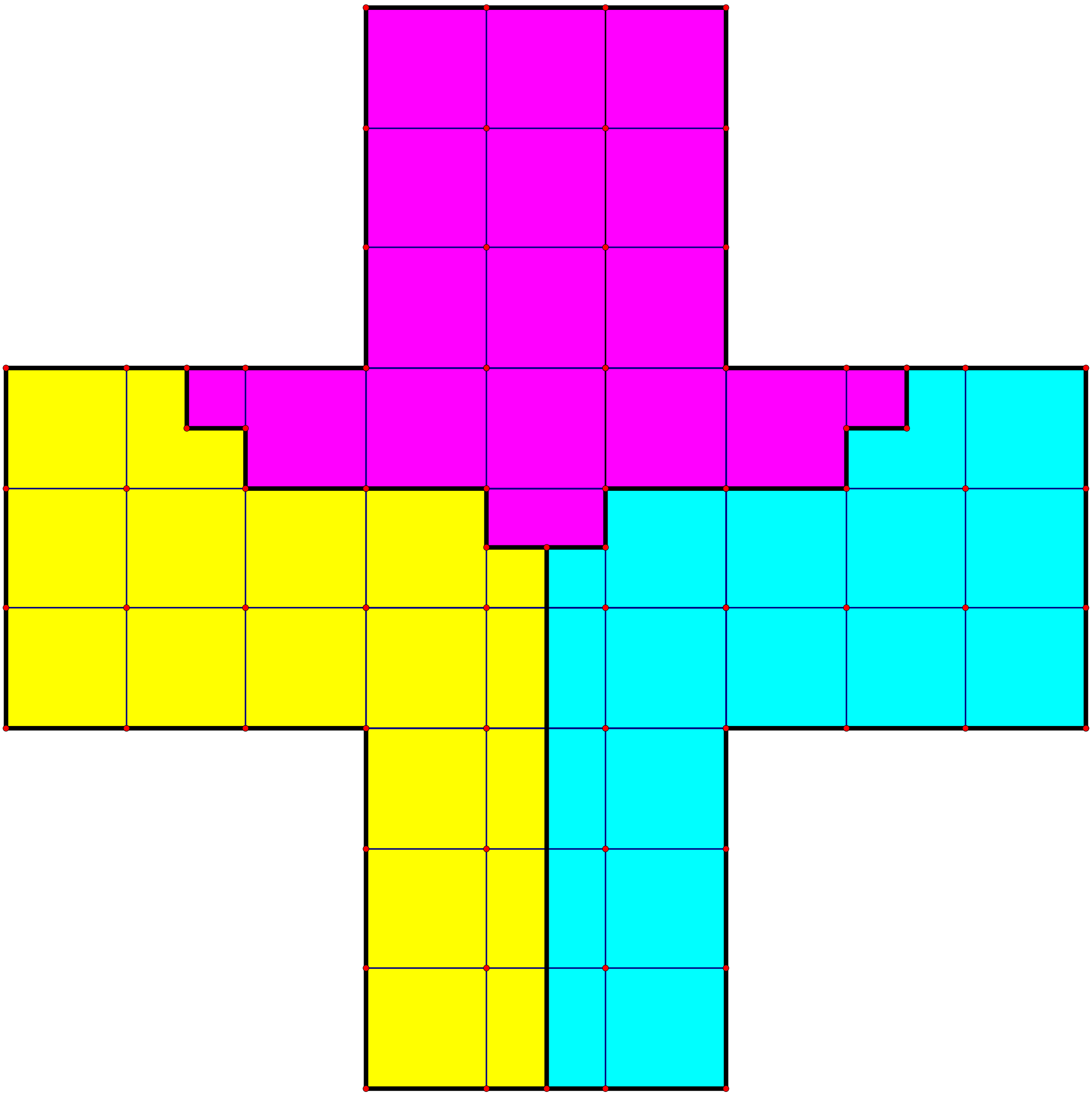
Приведем некоторые из возможных разрезаний.



(*Дарбинян Артур*, г. Ереван, Физмат.школа г. Еревана)



(*Бородулин Игорь,* г. Екатеринбург, гимназия № 9)



(*Макарец Александр,* г. Харьков, ФМШ № 27)

Задача 3. (В.Протасов)

Дана окружность и точка К внутри нее. Произвольная окружность, равная данной и проходящая через точку К, имеет с данной окружностью общую хорду. Найдите геометрическое место середин этих хорд.

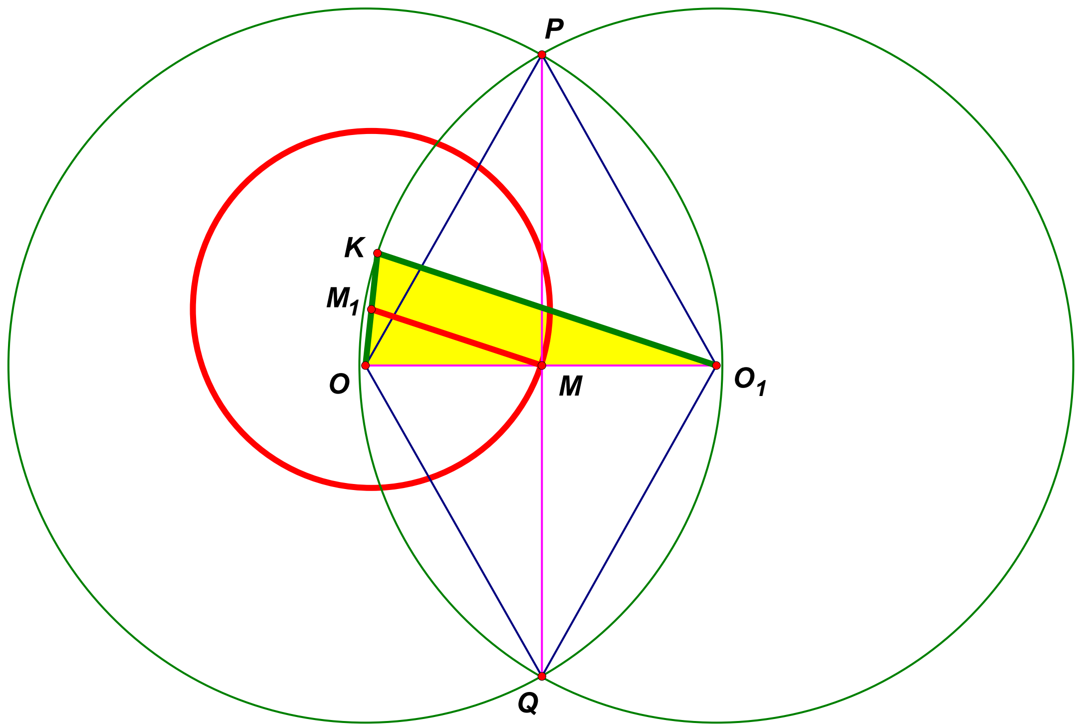
.

Решение:

Искомым геометрическим местом будет окружность с центром в середине OK (где O – центр исходной окружности) и радиусом $\frac{R}{2}$ (где R – радиус данной окружности).

Первый способ.

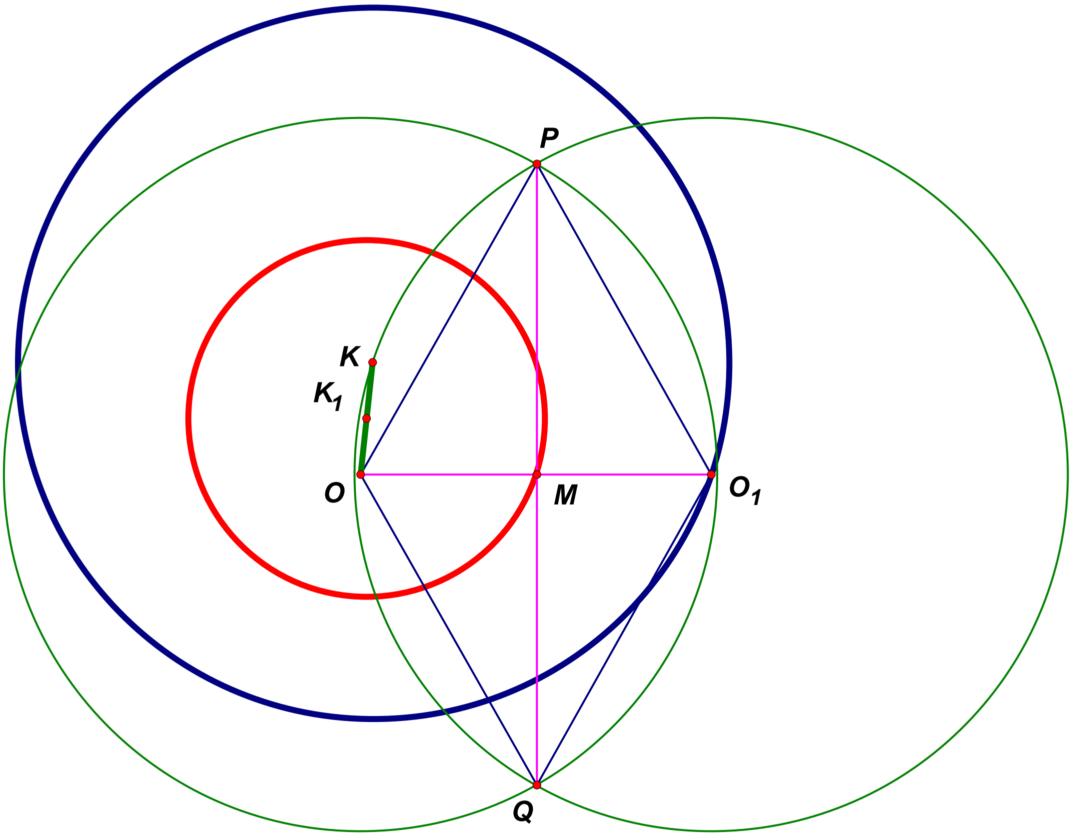
Действительно, пусть PQ – общая хорда, M – ее середина, а O_1 – центр выбранной произвольно окружности. Поскольку из условия следует, что OPO_1Q является ромбом, то M будет также серединой OO_1.Средняя линия MM_1 треугольника OKO_1 равна половине KO_1, то-есть, половине радиуса. Таким образом, все середины хорд лежат на окружности с центром в середине OK и радиусом $\frac{R}{2}$.



Несложно также проверить, что любая точка этой окружности является серединой некоторой хорды.

Второй способ.

Центры окружностей, равных данной и проходящих через точку K, лежат на окружности с центром в точке K радиуса R. Если O_1 – центр одной из таких окружностей, то, как уже было замечено, M – середина общей хорды, будет также серединой OO_1. Поэтому искомое ГМТ есть образ окружности, образованной центрами, при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом $\frac{1}{2}$.



Задача 4. (Б.Френкин)

При каком наименьшем n существует выпуклый n-угольник, у которого синусы всех углов равны, а длины всех сторон различны?

Решение:

Наименьшее значение равно пяти.

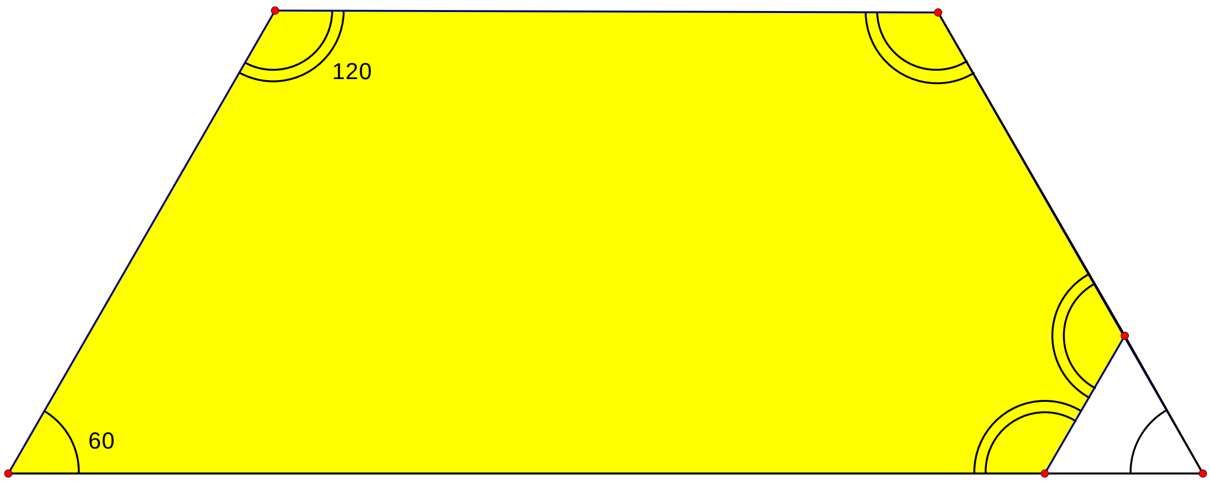
Очевидно, треугольников с таким свойством не существует.

Покажем, что не существует и четырехугольников.

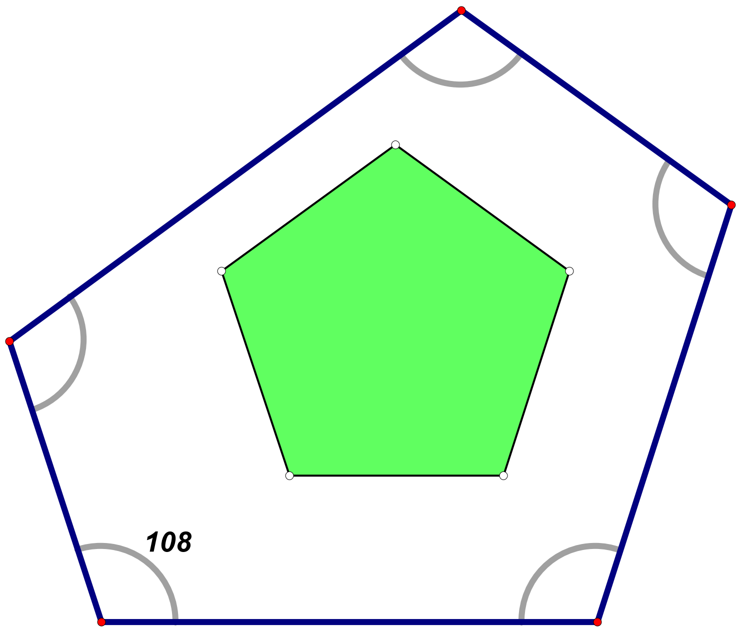
Сделать это можно по-разному.

Например, так как синусы углов равны, то сами углы четырехугольника равны либо φ, либо $180^0 - \varphi$. Простым перебором легко убедиться в том, что в этом случае мы имеем дело либо с прямоугольником, либо с параллелограммом, либо с равнобокой трапецией. Или же можно для доказательства использовать «метод площадей». Рассмотрим выпуклый четырехугольник, синусы всех углов которого равны и обозначим длины его сторон буквами *a,b,c,d*. Вычислим его площадь двумя способами, как сумму площадей двух треугольников с общей диагональю по формуле «половина произведения сторон на синус угла между ними», затем в полученном равенстве сократим на половину синуса и придем к соотношению $ab + cd = bc + da \Leftrightarrow a(b-d) = c(b-d) \Leftrightarrow (a-c)(b-d) = 0$. Отсюда вытекает равенство по-крайней мере одной пары сторон.

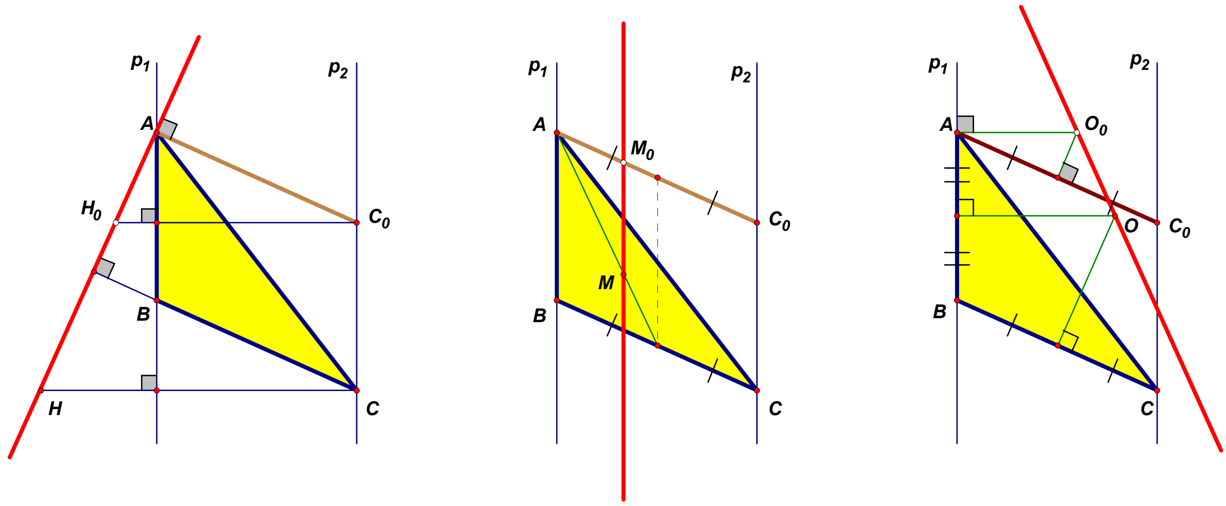
Чтобы построить пятиугольник, обладающий искомыми свойствами, достаточно отрезать у равнобокой трапеции с углом 60^0 при большем основании «уголок» - см. рисунок.



Или же можно взять правильный пятиугольник с углами 108^0, и, с его помощью, построить пятиугольник, все стороны которого соответственно параллельны сторонам правильного пятиугольника, но не равны между собой.



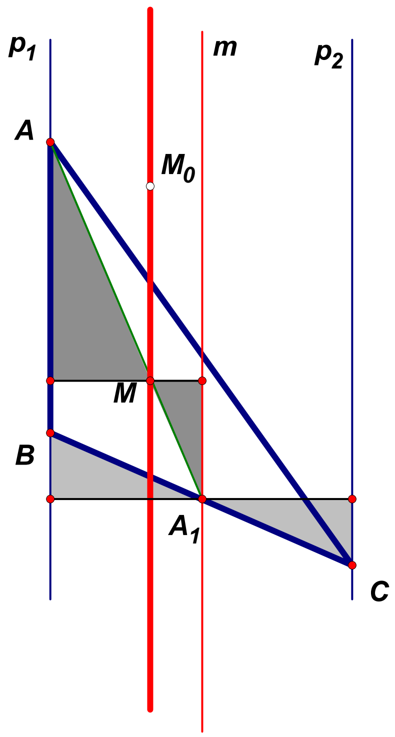
Задача 5. (А.Мякишев)
Имеются две параллельные прямые p_1 и p_2. Точки A и B лежат на p_1, а C – на p_2. Будем перемещать отрезок BC параллельно самому себе и рассмотрим все треугольники $AB'C'$, полученные таким образом. Найдите геометрическое место точек, являющихся в этих треугольниках:
а) точками пересечения высот;
б) точками пересечения медиан;
в) центрами описанных окружностей.
Решение:
Во всех случаях получится прямая с выколотой точкой, которая соответствует случаю, когда треугольник вырождается в отрезок.



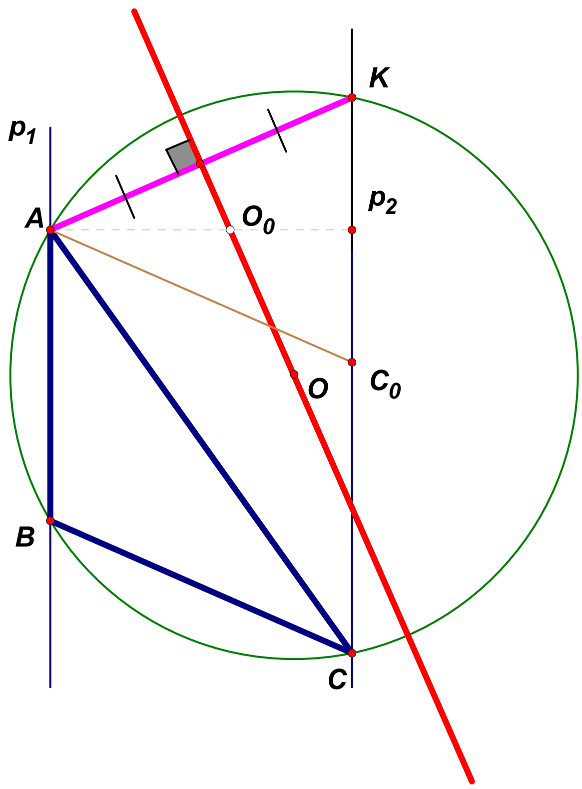
В первом случае, очевидно, имеем прямую, перпендикулярную BC и проходящую через вершину A.

Во втором случае ответом будет прямая, параллельная данным прямым и делящая отрезок с концами на этих прямых в отношении 1:2, считая от первой прямой. В самом деле, отрезок BC движется с постоянной скоростью, значит, и его середина движется с постоянной скоростью. Точка пересечения медиан делит отрезок, соединяющий вершину A с серединой BC в постоянном отношении 2:1, и, следовательно, эта точка также будет двигаться с постоянной скоростью по некоторой прямой. В предельном случае получаем точку M_0 , которая делит отрезок AC_0 (равный и параллельный BC, но проходящий через вершину A) в отношении 1:2, поскольку она должна делить в отношении 2:1 отрезок, соединяющий точку A и середину AC_0.

Можно рассуждать иначе: проведем через точку A_1 - середину BC перпендикуляр к данным прямым и с концами на этих прямых. Получим пару равных треугольников с общей вершиной в A_1 . Отсюда следует, что середины будут лежать на прямой m , равноотстоящей от данных прямых. Затем проведем перпендикуляр через M с концами на p_1 и m. Получим пару подобных треугольников с общей вершиной M, причем коэффициент подобия равен 2. Значит, центры тяжести лежат на прямой, параллельной p_1 и m, причем прямая делит общий перпендикуляр в отношении 2:1. И т.д.



Наконец, так как серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC движутся также с постоянными скоростями, то и точка их пересечения (центр описанной окружности) будет перемещаться по прямой.
Можно также заметить, что эта прямая является серединным перпендикуляром к отрезку AK, симметричному отрезку AC_0 (в который вырождается треугольник при совпадении точек A и B) относительно перпендикуляра из вершины A.



Как известно, если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая.
Отсюда сразу следует, что все окружности, описанные около треугольников $AB'C'$, будут вторично пересекать прямую p_2 в одной и той же точке K, так что $AK=BC$. Поэтому

центры этих окружностей должны быть равноудалены от точек A и K. Эти рассуждения дают нам также еще один способ доказательства того, что искомое ГМТ есть прямая (с выколотой точкой).

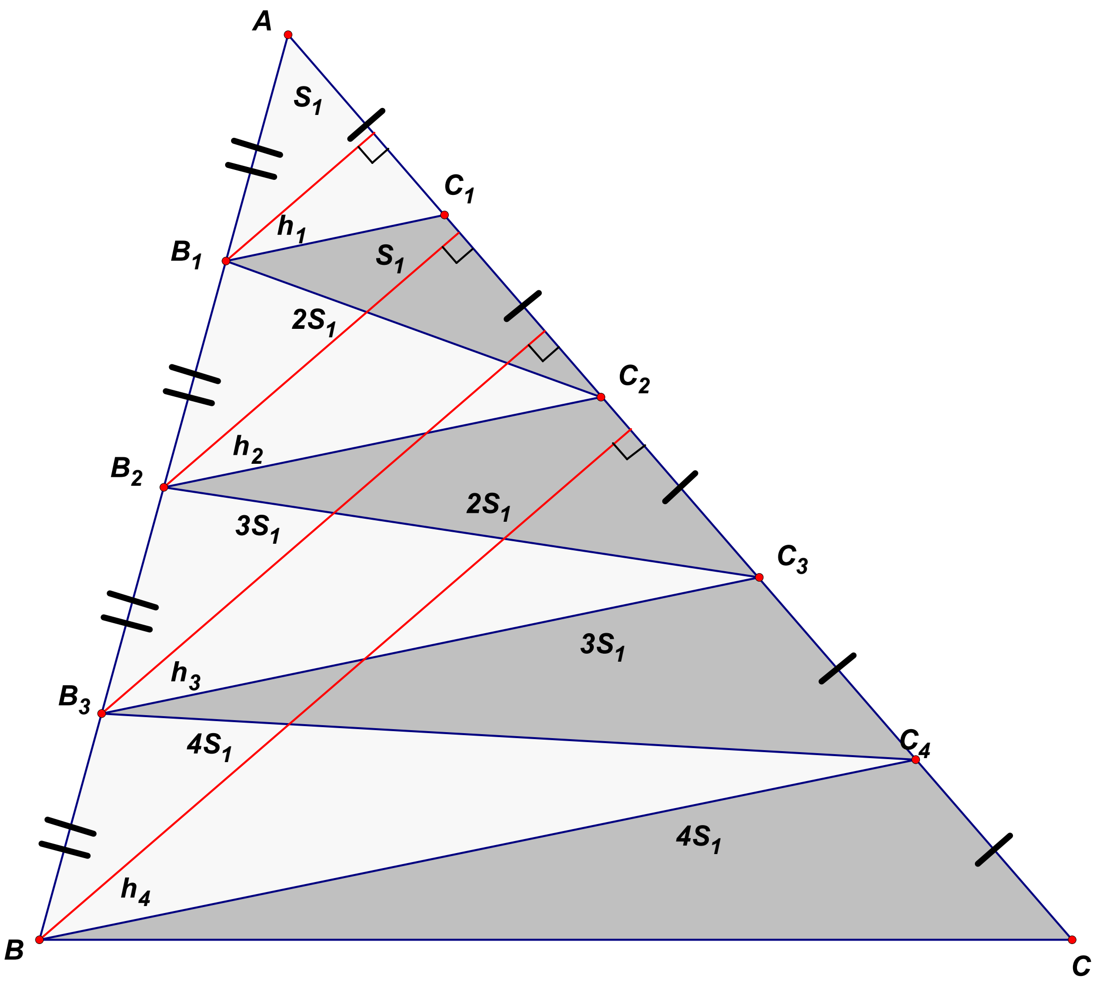
Задача 6. (А.Хачатурян)

Сторону AB треугольника ABC разделили на n равных частей (точки деления $B_0=A$, B_1, B_2, … ,$B_n=B$), а сторону AC этого треугольника разделили на (n+1) равных частей (точки деления $C_0=A$, C_1, C_2, …, $C_{n+1}=C$). Закрасили треугольники $C_iB_iC_{i+1}$. Какая часть площади треугольника закрашена?

Решение:

Покажем, что закрашенная часть составляет ровно половину площади всего треугольника. Для этого из точек B_1, ..., B_n опустим перпендикуляры на сторону AC. Эти перпендикуляры являются высотами треугольников $C_iB_iC_{i+1}$ с одинаковыми основаниями, причем, как следует из соображений подобия, $h_i = ih_1$. Отсюда вытекает, что таким же соотношением будут связаны площади окрашенных треугольников: $S_i = iS_1$.

(на рисунке изображен случай n=4)



Опустив затем перпендикуляры из точек C_1, ..., C_n на сторону AC, и рассуждая аналогично, получим такое же соотношение для площадей незакрашенных треугольников. Осталось заметить, что площадь первого закрашенного треугольника равна площади первого незакрашенного (их основания равны, а высота h_1 общая).

Можно было завершить доказательство и по-другому, просто сложив площади заштрихованных треугольников:

$S' = S_1(1+2+...+n) = \frac{n(n+1)}{2}S_1$.Но, очевидно, $S_1 = \frac{1}{2}h_1\frac{AC}{(n+1)} = \frac{1}{2}\frac{h_n}{n}\frac{AC}{(n+1)} = \frac{S_{ABC}}{n(n+1)}$.

Отметим наконец, что равенство площадей соответствующих пар треугольников (закрашенного и незакрашенного) можно получить практически без вычислений, воспользовавшись тем, что прямые B_iC_i параллельны друг другу (по теореме, обратной теореме Фалеса). Тогда $S(\Delta B_{i-1}B_iC_i) = S(\Delta C_{i-1}B_iC_i)$ (у них общее основание B_iC_i, а вершины лежат на прямой, параллельной основанию- стало быть, и высота к основанию общая) и $S(\Delta C_{i-1}B_iC_i) = S(\Delta B_iC_iC_{i+1})$ (вершина B_i -общая, а $C_{i-1}C_i = C_iC_{i+1}$ по условию).

Задача 7. (В. Протасов)

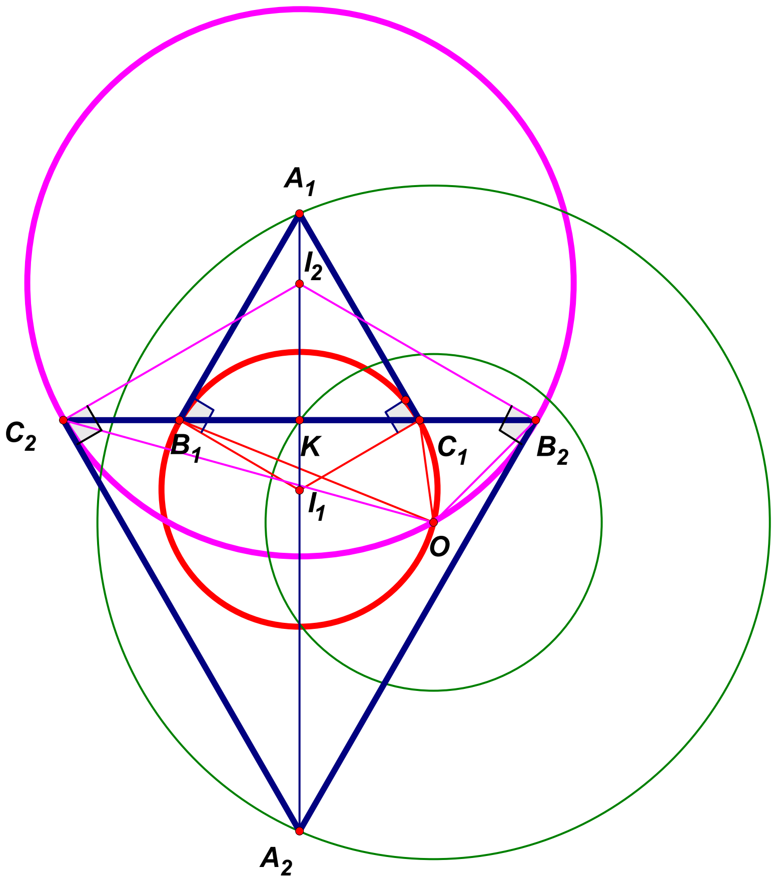
Две окружности с радиусами 1 *и* 2 *имеют общий центр в точке O. Вершина A правильного треугольника ABC лежит на большей окружности, а середина стороны BC – на меньшей. Чему может быть равен угол BOC?*

Решение:

Этот угол равен либо 60^0, либо 120^0.

Первый способ.

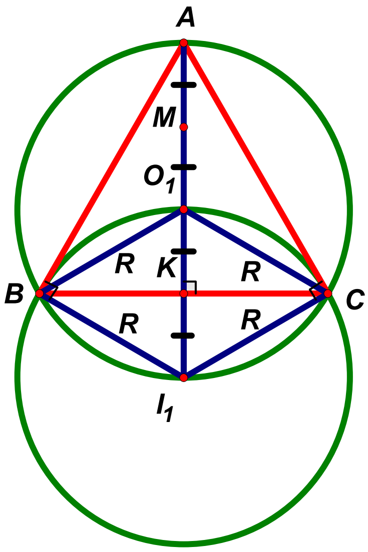
В данной конструкции *окружность, проходящая через вершины B и C правильного треугольника и касающаяся в этих точках его сторон, будет также проходить и через общий центр двух окружностей.*



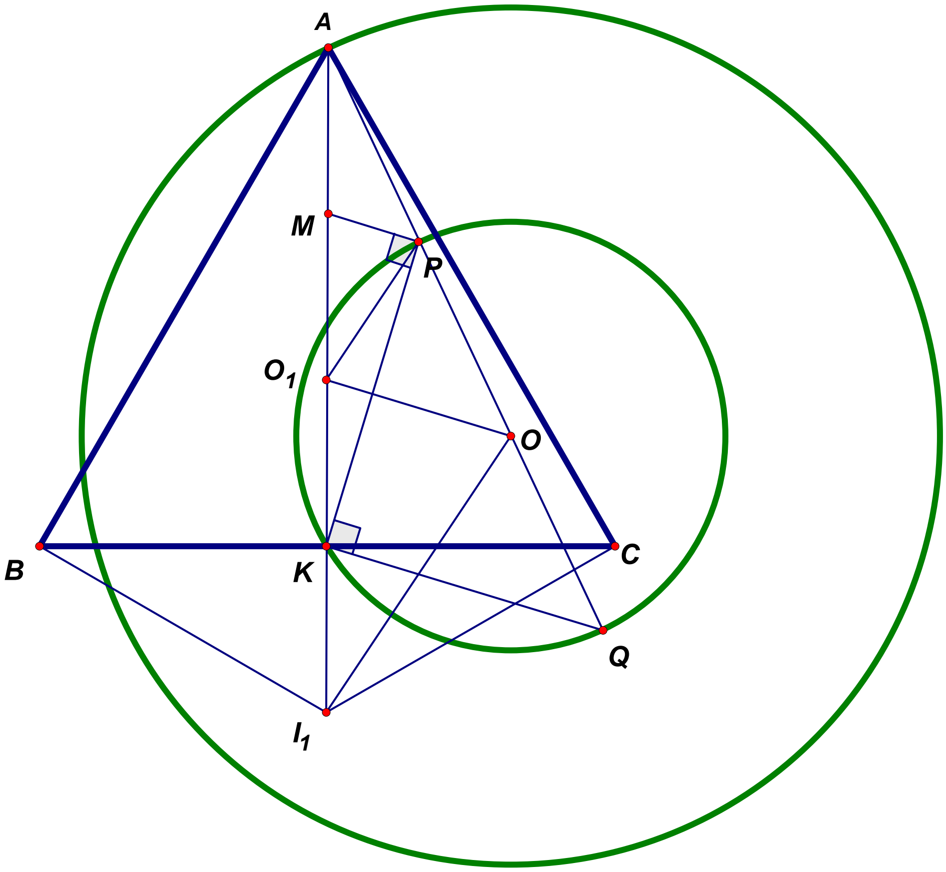
Из этого утверждения следует, что в случае «верхнего» (на рисунке) треугольника $\angle B_1OC_1 = \frac{1}{2}\angle B_1I_1C_1 = \frac{1}{2}120^0 = 60^0$, т.к. вписанный угол равен половине центрального. По той же причине для «нижнего» треугольника получим $\angle B_1OC_1 = 120^0$.

Для доказательства самого утверждения воспользуемся следующим легко проверяемым свойством правильного треугольника:

Пусть I_1 – центр окружности, касающейся сторон AB и AC правильного треугольника ABC в точках B и C соответственно, а K– середина стороны BC. Тогда точка K делит отрезок AI_1 в отношении 3:1, причем *I_1K равен половине радиуса этой окружности.*



Теперь докажем основное утверждение.



Проведем прямую AO и отметим точки P и Q ее пересечения с окружностью единичного радиуса. Точки M , O_1 и K делят отрезок AI_1 на четыре одинаковые части, каждая из которых равна $\frac{R}{2}$, где R – радиус окружности, касающейся сторон AB и AC в точках B *и* C. Мы хотим доказать, что $I_1O = R$.

Из условия следует, что точки P и O делят отрезок AQ на три равные части, поэтому из теоремы, обратной теореме Фалеса следует, что отрезки MP и KQ параллельны. Но $\angle PKQ$ - прямой, как опирающийся на диаметр, поэтому прямым будет и $\angle MPK$.

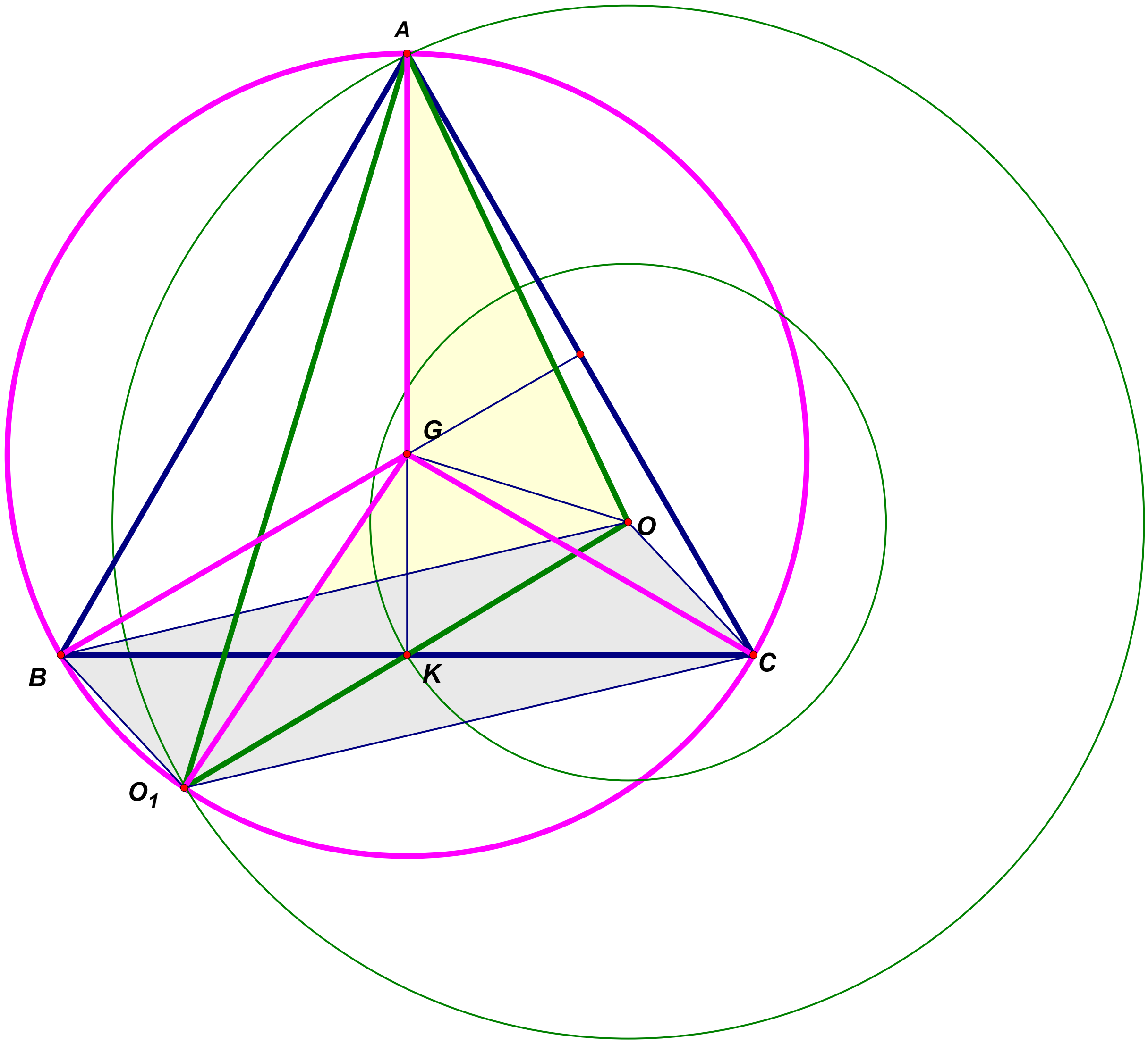
Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы, поэтому $O_1P = O_1M = O_1K = \frac{R}{2}$.

Теперь осталось только заметить, что отрезок O_1P является средней линией треугольника AI_1O и, значит, равен половине I_1O.

Второй способ.

(*Осечкина Мария,* г. Пермь, ФМШ № 9)

Рассмотрим, например, случай, когда точки O и A лежат в одной полуплоскости относительно прямой BC.



Пусть K – середина BC, G- точка пересечения медиан треугольника ABC. Продолжим отрезок OK до пересечения с большей окружностью в точке O_1. По условию, $BK=KC$, $OK=KO_1$, поэтому четырехугольник $BOCO_1$ является параллелограммом, $\Rightarrow \angle BOC = \angle BO_1C$.

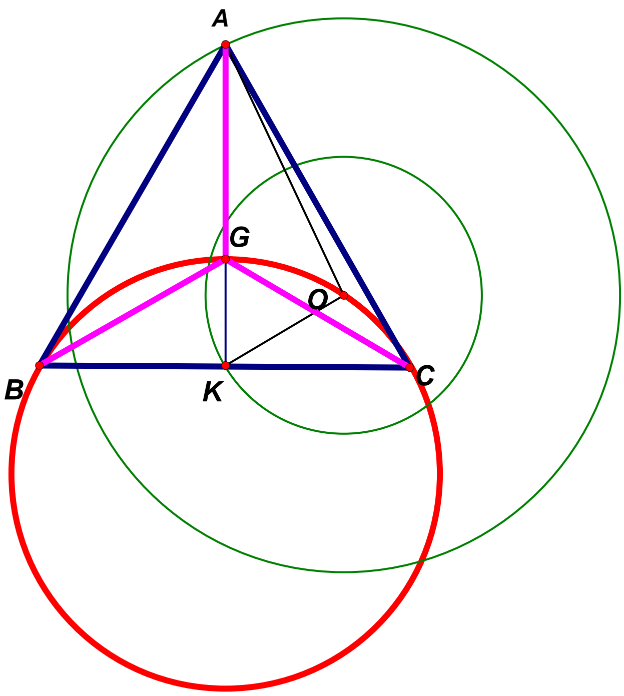
Далее, заметим , что G будет также центроидом (точкой пересечения медиан) и треугольника AOO_1, поскольку AK – медиана этого треугольника, и $AG:GK=2:1$.

И так как треугольник равнобедренный, то медиана OG является также биссектрисой, откуда следует равенство треугольников AGO и O_1GO.

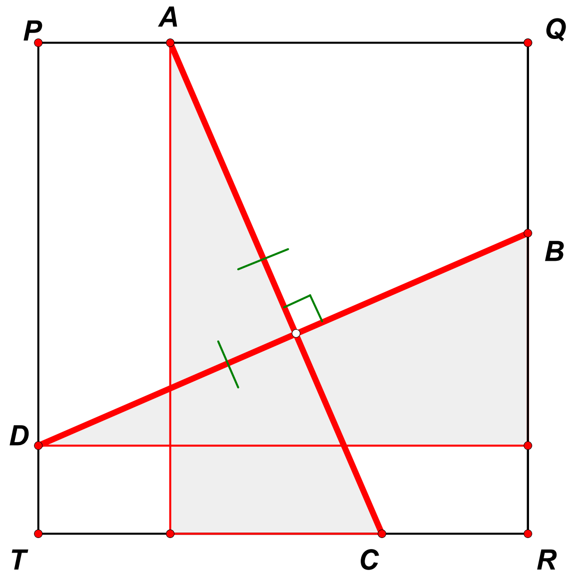
Следовательно, $GA = GO_1 = GB = GC$, т.е. точки A,B,C,O_1 лежат на одной окружности, т.е. $\angle BO_1C = 180^0 - \angle BAC = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Аналогично рассматривая и второй случай, получим 60^0.

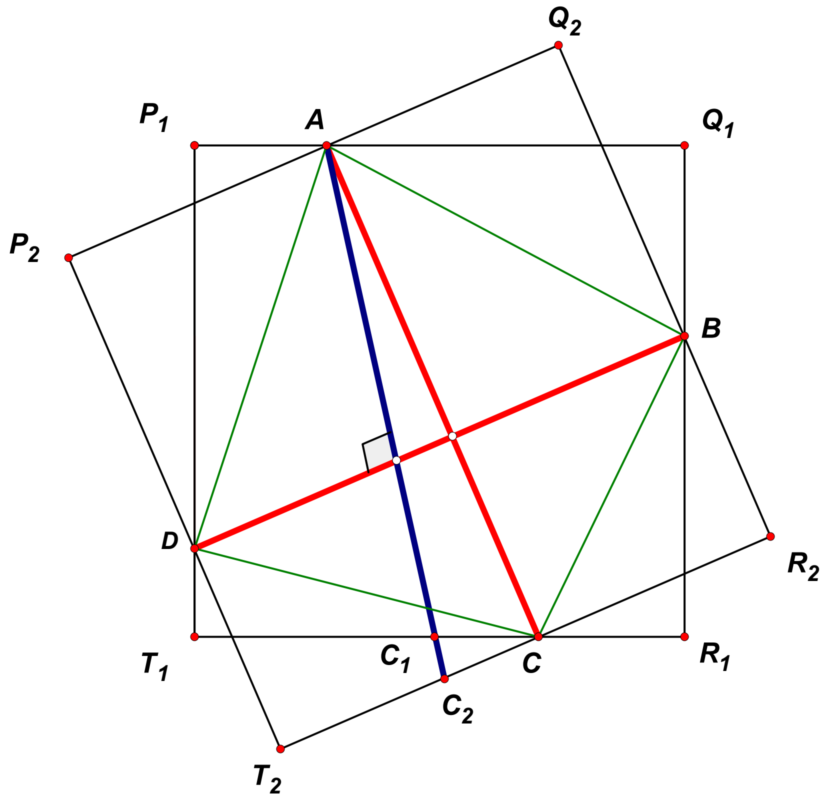
Третий способ.
(*Лысов Михаил,* г. Москва, Лицей «Вторая школа»)
Это, пожалуй, наиболее элегантное, решение основано на использовании следующей классической теоремы элементарной геометрии:
Пусть имеется некоторый отрезок AB на плоскости и некоторое положительное число $\lambda \neq 1$. Тогда геометрическое место точек X, таких что $\frac{AX}{BX} = \lambda$, есть некоторая окружность. Если P и Q –точки , которые делят отрезок AB в отношении λ (внутренним и внешним образом), то эта окружность совпадает с окружностью, построенной на отрезке P Q, как на диаметре. Она называется ***окружностью Аполония***.



Поскольку из условия нашей задачи сразу следует, что $\frac{AG}{KG} = \frac{AB}{KB} = \frac{AC}{KC} = \frac{AO}{KO} = \frac{2}{1}$, отсюда вытекает, что точки B, G, O, C лежат на окружности Аполония для отрезка AK и $\lambda = 2$.
Понятно также, что $\angle BGC = 120^0 = \angle BOC$ (или $180^0 - \angle BOC$).
Задача 8. (Д. Терешин)
Вокруг выпуклого четырехугольника ABCD описаны три прямоугольника. Известно, что два из этих прямоугольников являются квадратами. Верно ли, что и третий обязательно является квадратом? (Прямоугольник описан около четырехугольника ABCD, если на каждой стороне прямоугольника лежит по одной вершине четырехугольника).
Решение:
Третий прямоугольник также будет квадратом.
Доказательство основано на следующем свойстве квадрата:
Пусть точки A и C лежат на одной паре противоположных сторон квадрата, а B и D – на другой. Тогда условия 1) $AC \perp$ (перпендикулярен)BD и 2) AC=BD являются равносильными.



Это сразу следует из равенства прямоугольных треугольников, показанных на рисунке. Проведем, далее, в нашем четырехугольнике, вписанном в два квадрата, из точки *A* прямую, перпендикулярную *BD* и отметим ее точки пересечения с соответствующими сторонами квадрата: C_1 и C_2.



Из выше указанного свойства квадрата вытекает, что $AC_1 = BD$ и $AC_2 = BD$, т.е. $AC_1 = AC_2$, т.е. точки C_1 и C_2 должны совпадать. Но у двух сторон квадратов, содержащих эти точки, имеется только одна общая точка – *C*. Значит, построенный нами перпендикуляр совпадает с *AC*, и, следовательно, *диагонали четырехугольника ABCD равны и перпендикулярны.*

Очевидно, что если четырехугольник с таким свойством вписан в прямоугольник, то прямоугольник является квадратом.

Задача 9. (А. Мякишев)

Пусть O – центр правильного треугольника ABC. Из произвольной точки P плоскости опустили перпендикуляры на стороны треугольника или их продолжения. Обозначим через M точку пересечения медиан треугольника с вершинами в основаниях перпендикуляров. Докажите, что M – середина отрезка PO.

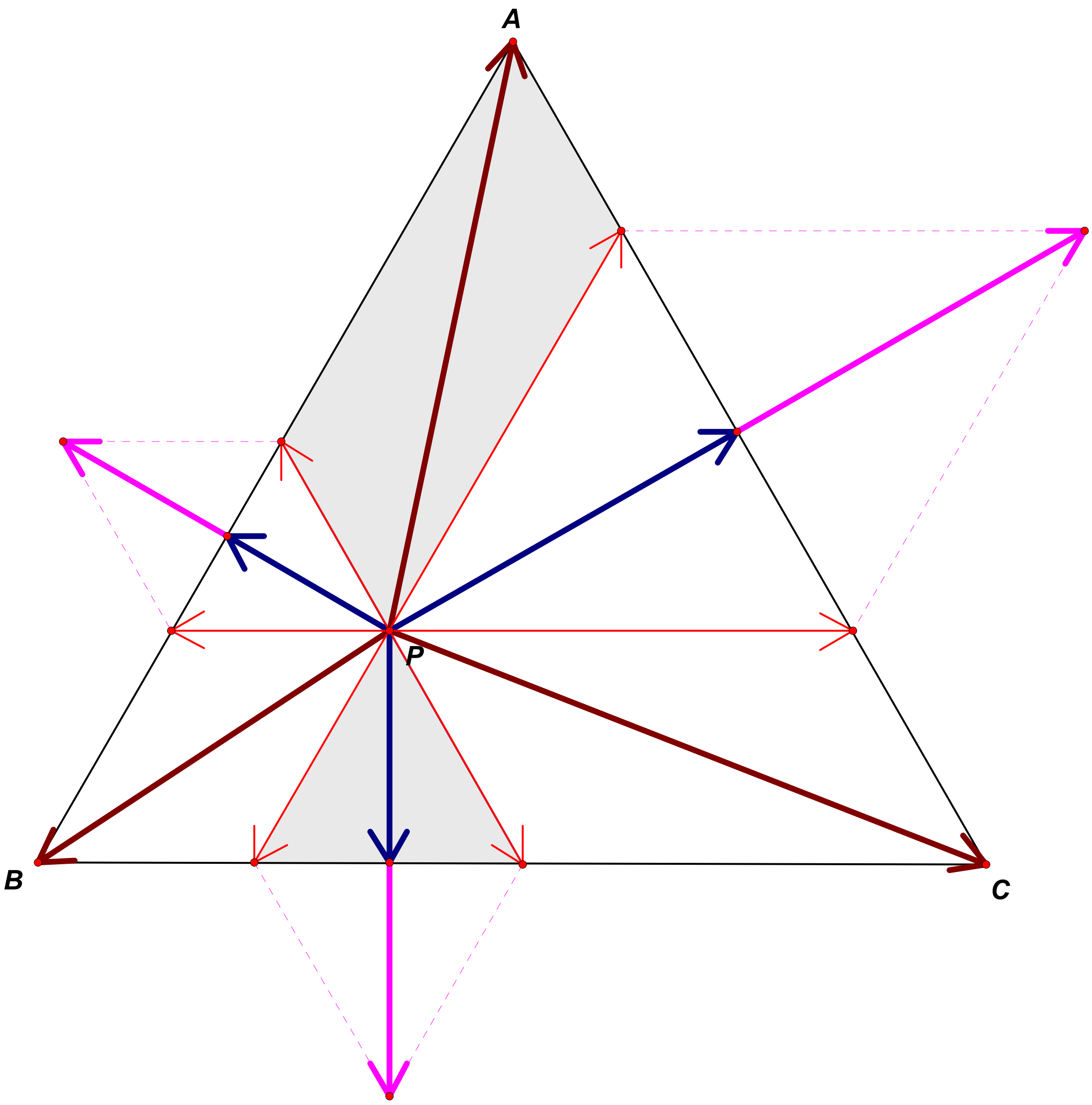
Решение:

В терминах векторов, нам нужно доказать, что $2\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO}$.

Как известно, если G – точка пересечения медиан некоторого треугольника ABC, то для произвольной точки P выполняется равенство: $3\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. С учетом этого свойства, задачу можно переформулировать следующим образом:

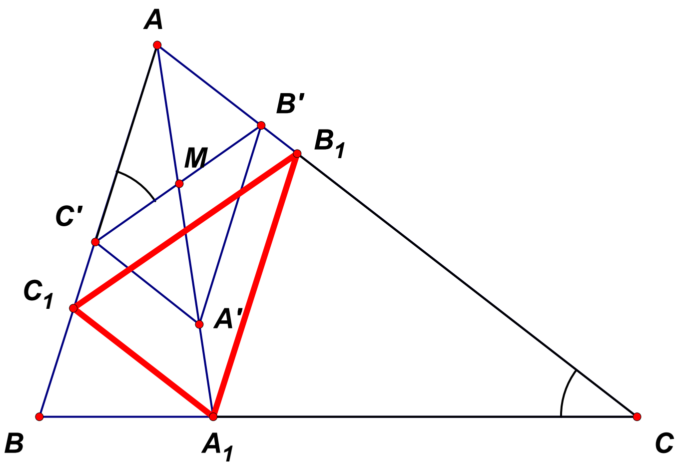
Пусть имеется правильный треугольник ABC и произвольная точка P. Рассмотрим вектора $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$, а также три вектора $\overrightarrow{n_a(P)}, \overrightarrow{n_b(P)}$ и $\overrightarrow{n_c(P)}$, начало каждого из которых расположено в точке P, а конец – на основании перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону треугольника. Тогда $2\left(\overrightarrow{n_a(P)} + \overrightarrow{n_b(P)} + \overrightarrow{n_c(P)}\right) = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.

Для доказательства рассмотрим еще шесть векторов, каждый из которых лежит на прямой, параллельной стороне треугольника и проходящей через точку P.

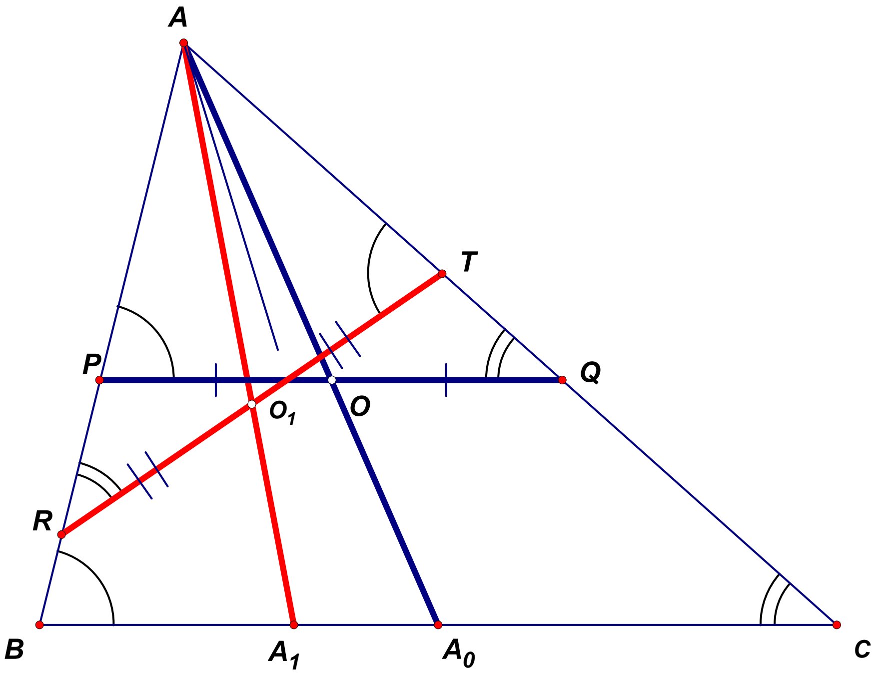


Начало каждого такого вектора расположено в точке P, а конец – на одной из сторон треугольника.
(На рисунке изображен случай, когда точка P лежит внутри треугольника).
Через эти вектора легко выразить как вектора, соединяющие P с вершинами, так и вектора с концами в основаниях перпендикуляров – поскольку параллельные линии разбивают треугольник на правильные треугольники и параллелограммы.
Как видим, наше утверждение доказано.
Легко также убедиться в том, что эти же рассуждения проходят и в случае, когда точка P расположена вне треугольника ABC.

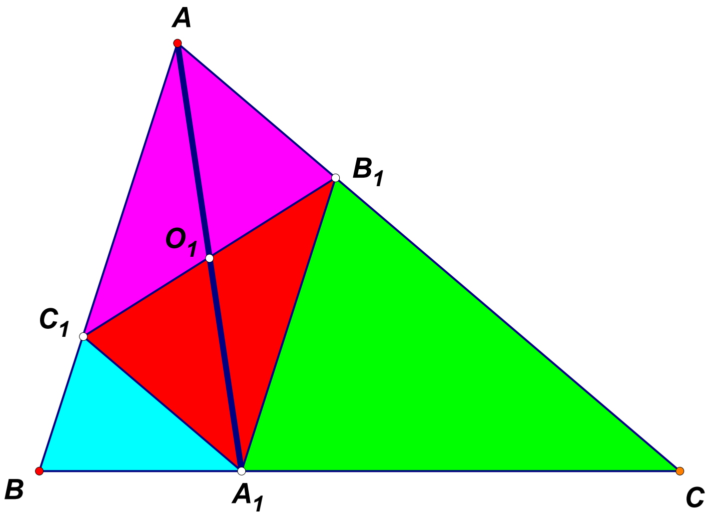
Задача 10. (Т. Емельянова)
Разрежьте неравносторонний треугольник на четыре подобных треугольника, среди которых не все одинаковы.
Решение:
Пусть $AB \neq AC$. Проведем отрезок $B'C'$, так чтобы $\angle AC'B' = \angle ACB$.



Ясно, что треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, при этом $B'C'$ не параллелен BC.
Отметим середину отрезка $B'C'$, точку M, и достроим треугольник $AB'C'$ до параллелограмма $AB'A'C'$. Далее найдем точку A_1 пересечения AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Отрезки A_1C_1, B_1A_1 и B_1C_1 осуществляют искомое разрезание.
Замечание:
В сущности, приведенное решение использует т.н. *симедиану* треугольника.
Симедианой называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы угла треугольника, через вершину которого проходит медиана.
Назовем *параллелью* (к стороне BC) треугольника любой отрезок PQ с концами на, соответственно, прямых AB и AC, параллельный BC. При этом, понятно, $\angle APQ = \angle ABC$ и $\angle AQP = \angle ACB$.
Назовем *антипараллелью* (к стороне BC) треугольника любой отрезок RT с концами на, соответственно, прямых AB и AC, такой, что $\angle ART = \angle ACB$ и $\angle ATR = \angle ABC$.(Как несложно проверить, в частности антипараллелью является отрезок, образованный основаниями соответствующих высот треугольника).
Очевидно, что отрезок является параллелью тогда и только тогда, когда соответствующая медиана делит его пополам.
Поскольку симметрия относительно прямой сохраняет углы и длины отрезков, из этого утверждения вытекает следующая
Лемма:
Отрезок является антипараллелью тогда и только тогда, когда соответствующая симедиана делит его пополам.



Теперь осуществим искомое разрезание.



Допустим, что $AB \neq AC$

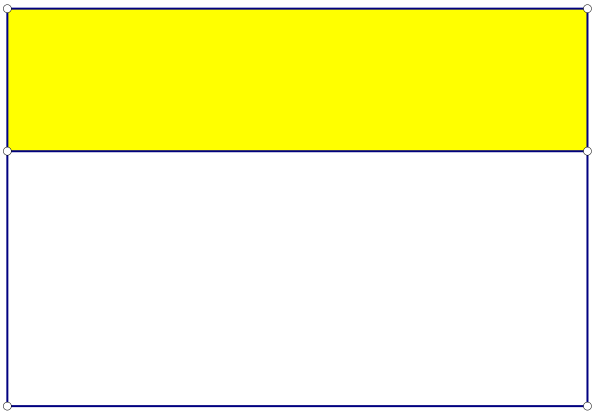
Пусть AA_1 – симедиана треугольника, A_1C_1 и A_1B_1 – параллели к сторонам AC и AB соответственно. Поскольку $A_1C_1AB_1$ – параллелограмм, то его диагонали делятся точкой пересечения пополам, т.е. середина C_1B_1 лежит на симедиане, и потому, согласно лемме, отрезок C_1B_1 является антипараллелью.

Легко проверить, что треугольники $A_1B_1C_1$, AB_1C_1, C_1BA_1 и B_1A_1C подобны треугольнику ABC, и не все одинаковы (т.к. , понятно, для неравнобедренного треугольника основание симедианы A_1 не совпадает с серединой BC. Можно даже показать, что $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB^2}{AC^2}$ - еще одно интересное свойство симедианы).

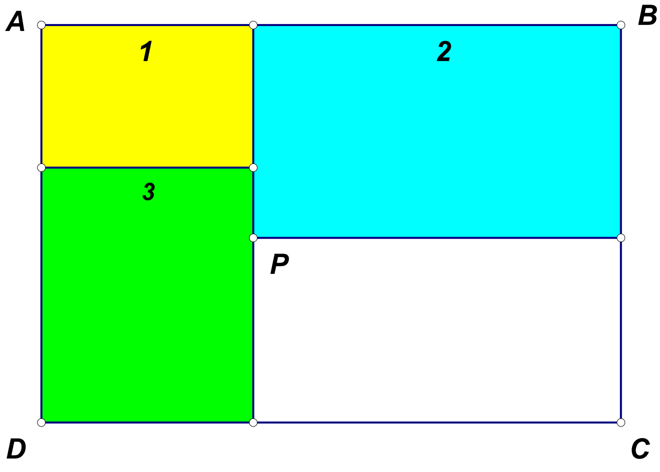
Задача 11. (Л. Емельянов)

Квадрат разрезали на n прямоугольников со сторонами $a_i \times b_i, i = 1, \ldots, n$. *При каком наименьшем n в наборе* $\{a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n\}$ *все числа могут оказаться различными?*

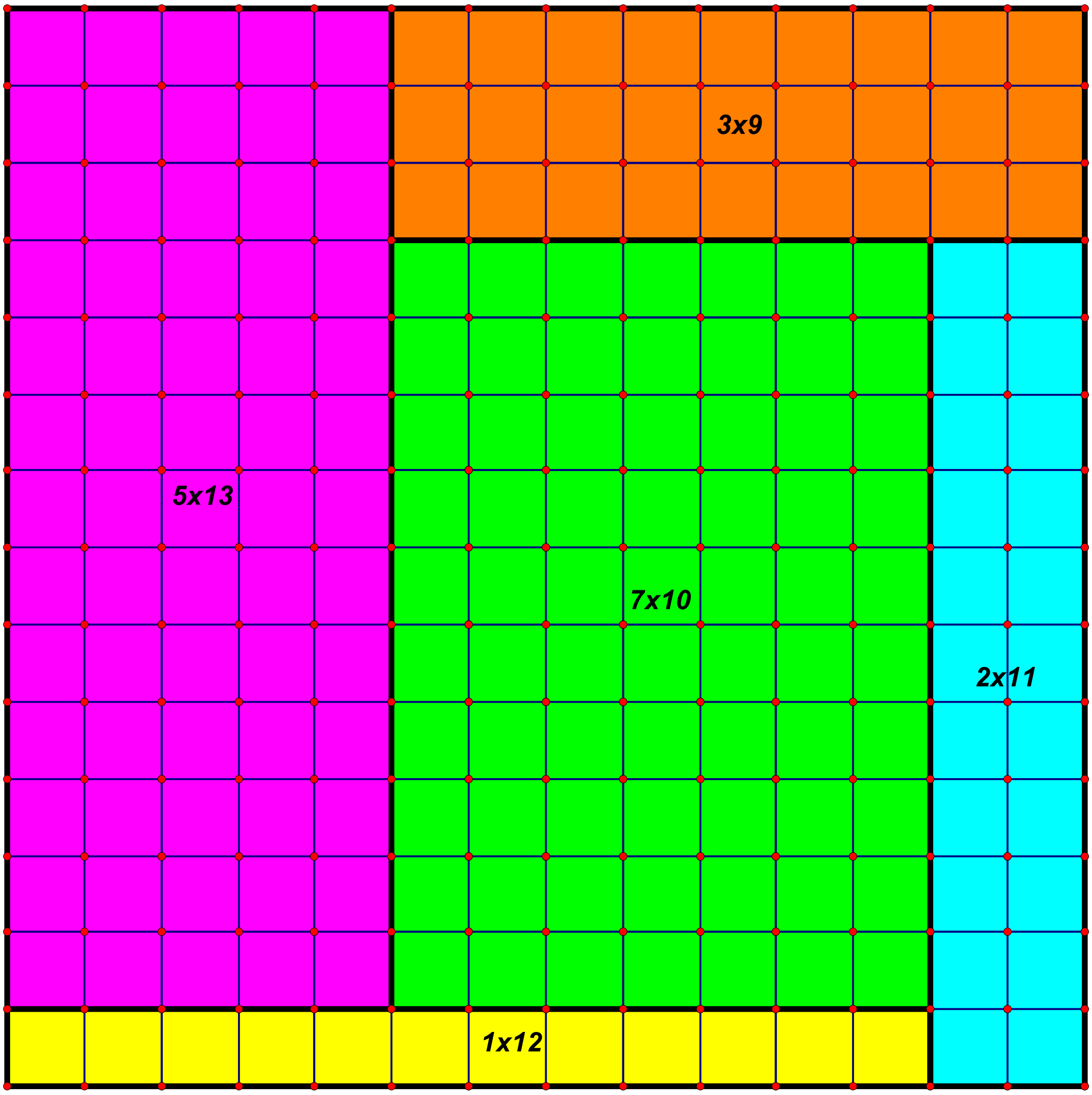
Решение:
Наименьшее значение *n* равно 5.
Покажем сначала, что никакой прямоугольник (в частности, квадрат) нельзя разрезать ни на 2, ни на 3, ни на 4 прямоугольника с различными сторонами.
Очевидно, что если прямоугольник разрезан на 2 прямоугольника, то у них есть общая сторона.
Пусть, далее, прямоугольник разрезан на 3 прямоугольника. Тогда один из них содержит две вершины исходного треугольника (так как три прямоугольника должны накрыть все 4 вершины исходного), и мы свели задачу к предыдущему случаю (оставшаяся часть-прямоугольник, который необходимо разбить на два).



Наконец, допустим, что прямоугольник разрезан на 4 других.
Имеем две возможности – либо один из прямоугольников разбиения содержит две вершины исходного (и мы сводим задачу к разрезанию прямоугольника на 3 части), либо каждый из прямоугольников разбиения содержит по 1 вершине исходного.
В последнем случае рассмотрим 2 прямоугольника, содержащие соседние вершины.



Они должны соприкасаться (т.к. очевидно, что если бы был «зазор» между ними, то его нельзя было бы покрыть двумя прямоугольниками, содержащими остальные две вершины исходного).
Рассмотрим тот прямоугольник из оставшихся, который содержит точку *P*. Он не может содержать вершину *C*, следовательно, он содержит вершину *D* и , значит, имеет общую сторону с первым прямоугольником.
Предъявим теперь одно из возможных разрезаний квадрата на 5 различных прямоугольников.

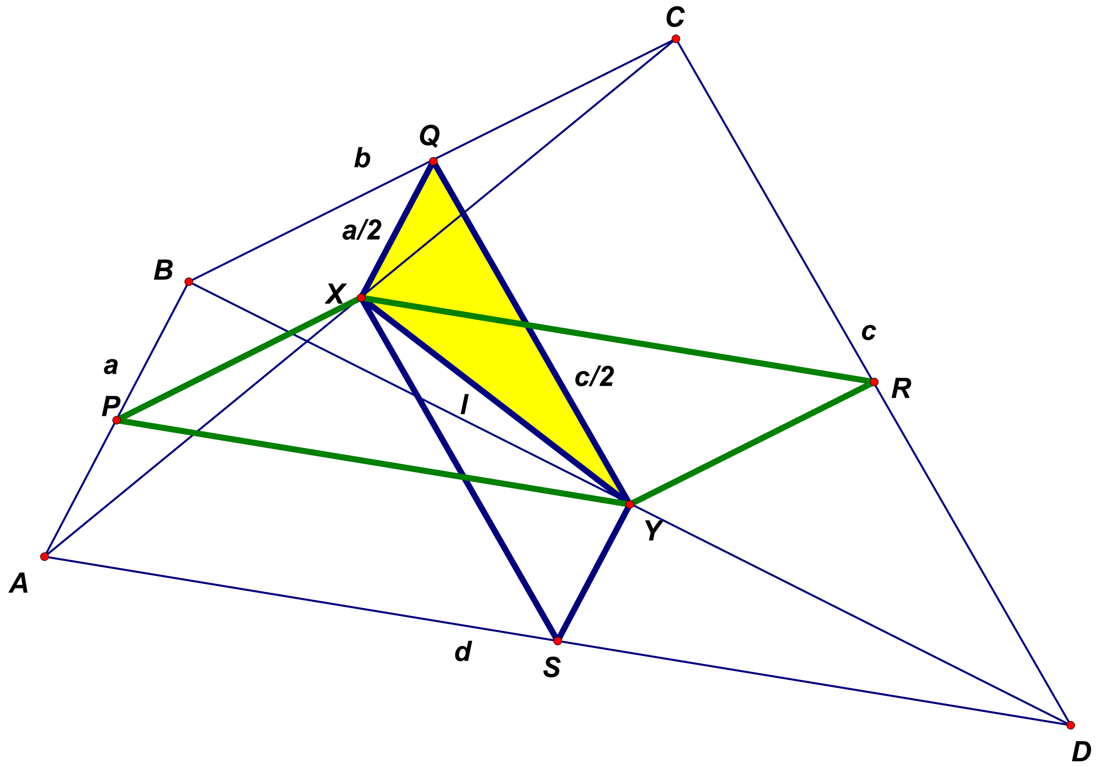


Задача 12. (В. Смирнов)

Постройте четырехугольник по заданным сторонам a,b,c и d и расстоянию l между серединами его диагоналей.

Решение:

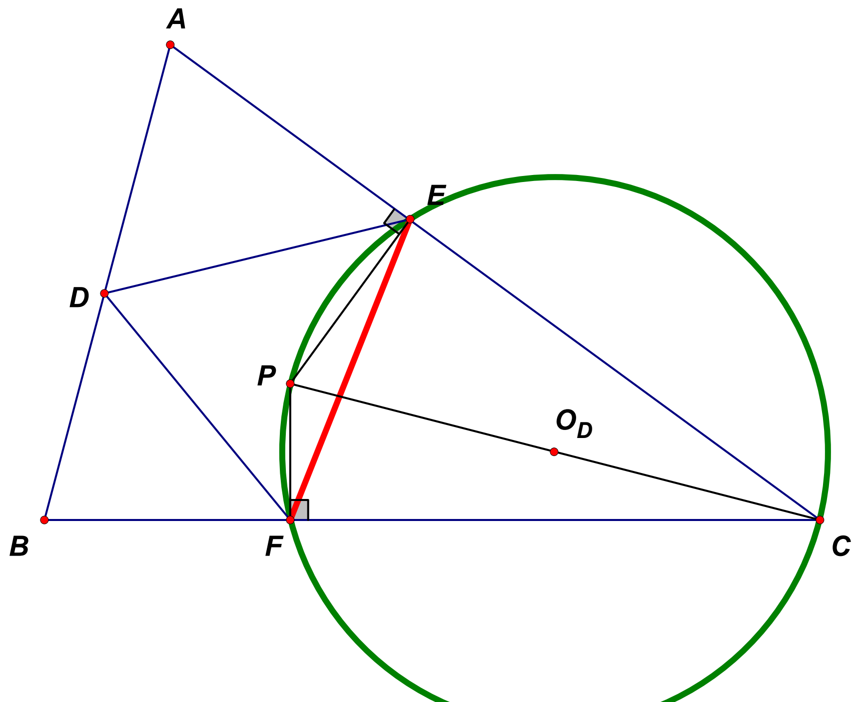
Пусть $ABCD$- искомый четырехугольник, $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$, P, Q, R, S, X, Y - середины отрезков AB,BC,CD,DA,AC,BD соответственно. Так как QX,SY - средние линии треугольников ABC и ABD, то $QX = YS = \frac{a}{2}$. Аналогично, $QY = XS = \frac{c}{2}$. Следовательно, зафиксировав точки X и Y и построив треугольники XYQ и XYS, мы найдем точки Q и S. Аналогично находятся точки P и R. Проведя теперь через P,Q,R,S прямые, параллельные, соответственно, $QX,PX,QY,PY,$ получим искомый четырехугольник.



Задача 13. (А.Заславский)

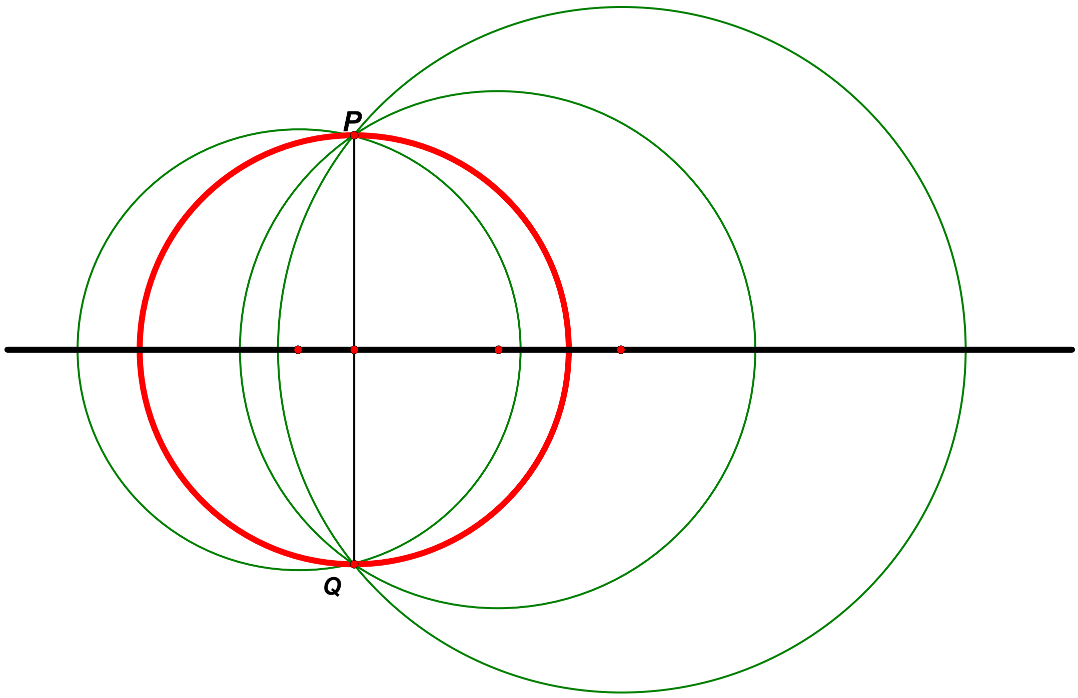
Дан треугольник ABC и две прямые l_1, l_2. Через произвольную точку D на стороне AB проводится прямая, параллельная l_1, пересекающая AC в точке E, и прямая, параллельная l_2, пересекающая BC в точке F. Построить точку D, для которой отрезок EF имеет наименьшую длину.

Решение:



Пусть P – точка пересечения перпендикуляров к AC в точке E и к BC в точке F. Когда D двигается по AB, стороны четырехугольника $DEPF$ сохраняют направления, и, так как три вершины четырехугольника двигаются по прямым, четвертая также движется по прямой.

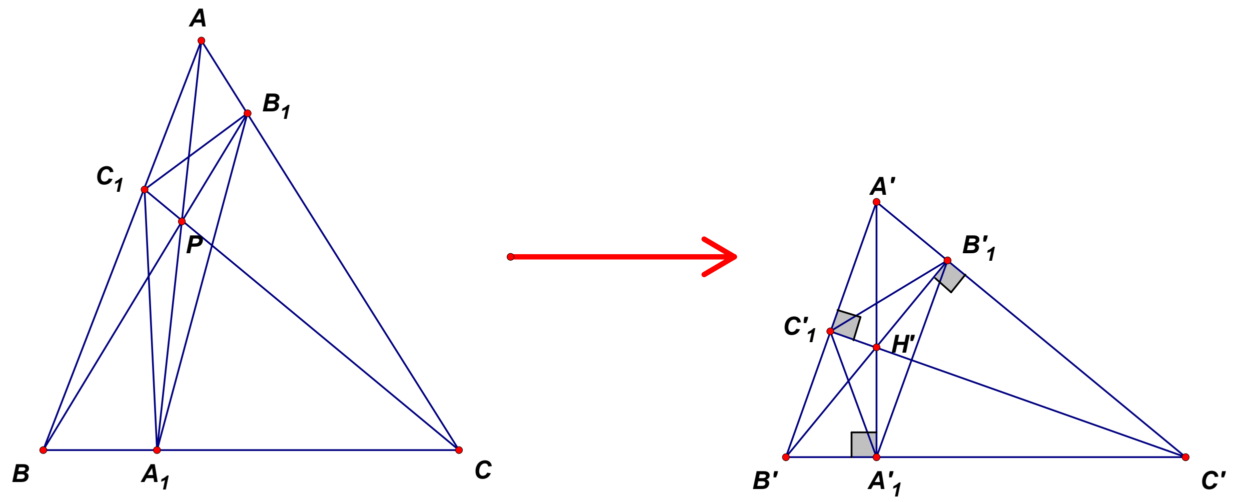
Следовательно, середина отрезка CP, являющаяся центром окружности треугольника CEF, также двигается по прямой. Значит, все эти окружности имеют общую хорду, т.е. помимо C – еще одну общую точку Q. Поскольку хорда EF опирается на постоянный угол C, то ее длина будет минимальной при минимальном радиусе описанной около CEF окружности. Однако среди всех окружностей, содержащих общую хорду, минимальный радиус, очевидно, будет иметь та из них, для которой эта хорда CQ является диаметром.



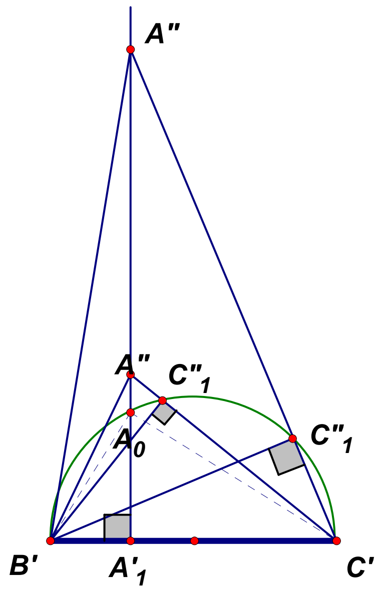
Отсюда вытекает, например, следующий способ построения точки D.
Проведем через A прямую, параллельную l_2 и найдем точку U ее пересечения с BC. Через B проведем прямую, параллельную l_1 и найдем точку V ее пересечения с AC. Пусть Q- вторая точка пересечения окружностей, описанных около ACU и BCV, E – вторая точка пересечения окружности с диаметром CQ и прямой AC. Тогда прямая, проходящая через E и параллельная l_1, пересекает AB в искомой точке.

Задача 14. (Л. Емельянов).
Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1,B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA и AB. Упорядочим площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, обозначив меньшую через S_1, среднюю- S_2, а большую – S_3. Докажите, что $\sqrt{S_1S_2} \le S \le \sqrt{S_2S_3}$ *, где S – площадь треугольника $A_1B_1C_1$.*

Решение:
Первый способ.
Назовем треугольник $A_1B_1C_1$ *чевианным* треугольником точки P.
Оказывается, любой треугольник ABC можно подходящим *аффинным* преобразованием перевести в некоторый остроугольный треугольник $A'B'C'$, так что точка P переходит в его ортоцентр, а чевианный треугольник P - в *ортотреугольник* $A'B'C'$ (треугольник, образованный основаниями высот).



Действительно, возьмем произвольный отрезок $B'C'$, и отметим на нем такую точку A_1', что $\dfrac{B'A_1'}{C'A_1'} = \dfrac{BA_1}{CA_1}$, а затем восстановим в этой точке перпендикуляр к $B'C'$. На этом перпендикуляре построим точку A_0, такую, что $\angle B'A_0C' = \dfrac{\pi}{2}$ (точка пересечения перпендикуляра с окружностью, построенной на $B'C'$, как на диаметре).



Далее, рассмотрим точку A'' на этом перпендикуляре и опустим высоту $B'C_1''$ на $A''C'$. Если A'' расположена близко к точке A_0, то отношение $\dfrac{C'C_1''}{A''C_1''}$ очень велико, а если A'' удаляется по перпендикуляру на бесконечность, то отношение стремится к нулю. Из соображений непрерывности следует, что найдется некоторая точка A' на перпендикуляре, такая что $\dfrac{C'C_1'}{A'C_1'} = \dfrac{CC_1}{AC_1}$. Соответственное равенство третьей пары отношений гарантировано теоремой Чевы.

Как известно, для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, отображающее первый треугольник на второй. Поскольку аффинное преобразование прямые переводит в прямые , а также сохраняет отношение

длин отрезков – мы нашли аффинное преобразование, переводящее чевианный треугольник в некоторый ортотреугольник.
Кроме того, аффинное преобразование сохраняет и отношение площадей.
Сказанное означает, что нам достаточно доказать утверждение задачи для *остроугольного треугольника и его ортоцентра.*
Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3. Эти треугольники подобны исходному с коэффициентами $\cos A, \cos B, \cos C$ соответственно, поэтому

$S_1 \le S_2 \le S_3 \Leftrightarrow \frac{S_1}{S_{ABC}} \le \frac{S_2}{S_{ABC}} \le \frac{S_3}{S_{ABC}} \Leftrightarrow \cos^2 A \le \cos^2 B \le \cos^2 C \Leftrightarrow A \ge B \ge C$ - поскольку все углы острые, косинусы положительны и убывают. Из последней цепочки неравенств следует, что $C \le \frac{\pi}{3}$ и $A \ge \frac{\pi}{3}$ (иначе $A + B + C \ne \pi$).

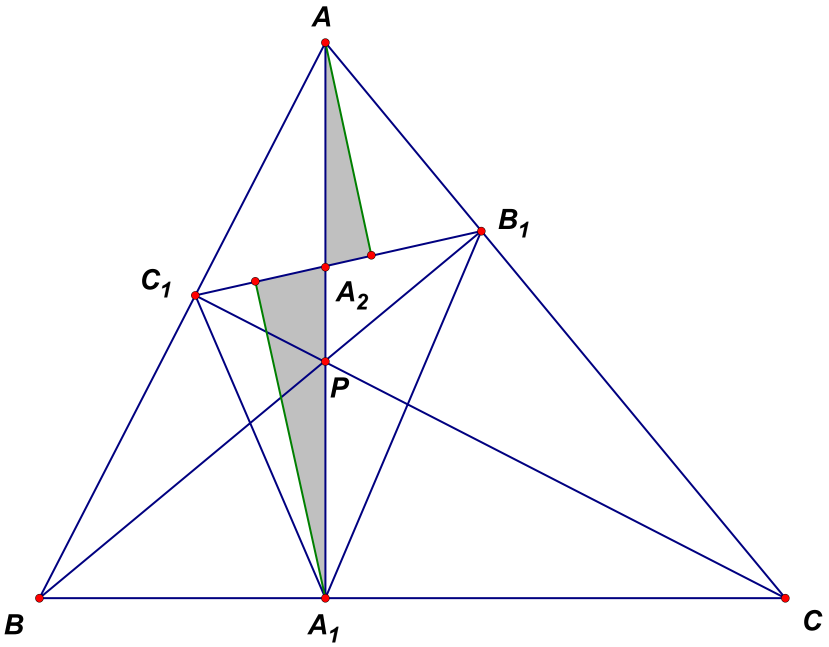
Докажем теперь, что $\sqrt{S_1 S_2} \le S$.

$\sqrt{S_1 S_2} \le S \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S}} \le 1 \Leftrightarrow$ (после возведения в квадрат и деления числителя и знаменателя на $S^2{}_{ABC}$) $\frac{\cos^2 A \cdot \cos^2 B}{(1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C)^2} \le 1$.

Но, как нетрудно проверить, в любом треугольнике имеет место равенство:
$1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C = 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$, поэтому наше неравенство равносильно
$\cos^2 A \cdot \cos^2 B \le 4\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \cos^2 C \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \cos C \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \ge C$.

Аналогично доказывается, что $S \le \sqrt{S_2 S_3}$.

Второй способ.



Не ограничивая общности, будем считать, что площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C соответственно равны S_1, S_2, и S_3.
Пусть точка P имеет (относительно треугольника ABC) *нормированные* барицентрические координаты $p : q : r$, т.е. $p + q + r = 1$. Поскольку P расположена внутри треугольника, то

p, q, r - положительные величины. Выразим через них $\frac{S_1}{S}$. Обозначим через A_2 точку пересечения B_1C_1 и AA_1. Поскольку треугольники AB_1C_1 и $A_1B_1C_1$ имеют общее основание, то, очевидно, $\frac{S_1}{S} = \frac{AA_2}{A_1A_2}$. Далее, понятно что A_2 имеет координаты $2p : q : r$ (центр масс системы $2pA$ и $(q+r)A_1$ расположен на прямой AA_1, а системы $(p+q)C_1$ и $(p+r)B_1$ - на прямой B_1C_1), откуда по правилу рычага имеем $\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{q+r}{2p} = \frac{1-p}{2p}$.

Совершенно аналогично, $\frac{S_2}{S} = \frac{1-q}{2q}$ и $\frac{S_3}{S} = \frac{1-r}{2r}$. Поскольку $S_1 \le S_2 \le S_3$, отсюда следует, что $\frac{1}{2p} \le \frac{1}{2q} \le \frac{1}{2r}$ или $p \ge q \ge r$.С учетом равенства $p+q+r=1$ имеем также $p \ge \frac{1}{3}; r \le \frac{1}{3}$.

Докажем теперь, что $\sqrt{S_1S_2} \le S$.

$\sqrt{S_1S_2} \le S \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S} \cdot \frac{S_2}{S}} \le 1 \Leftrightarrow (1-p)(1-q) \le 4pq \Leftrightarrow 1-p-q \le 3pq \Leftrightarrow r \le 3pq \Leftrightarrow \frac{pq}{r} \ge \frac{1}{3}$.

Но $p \ge \frac{1}{3} \Rightarrow pq \ge \frac{1}{3}q \Rightarrow \frac{pq}{r} \ge \frac{1}{3}\frac{q}{r}$. Наконец, $q \ge r \Rightarrow \frac{q}{r} \ge 1 \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{q}{r} \ge \frac{1}{3}$.

Точно также доказывается, что $S \le \sqrt{S_2S_3}$ (используя неравенство $r \le \frac{1}{3}$).

Замечание:

Идеи, на которых основывалось доказательство, можно реализовать, не используя геометрию масс. Например, ввести отношения $\lambda = \frac{BA_1}{CA_1}; \beta = \frac{CB_1}{AB_1}; \gamma = \frac{AC_1}{BC_1}$ и с помощью теоремы Фалеса (проводя соответствующие параллели) выразить через них отношения площадей.

Третий способ.

(*Авксентьев Евгений,* г. Ростов-на-Дону, МОУ Гимназия № 5).

Следующее симпатичное решение основано на т.н. *теореме Мёбиуса:*

Пусть P – произвольная точка внутри треугольника ABC. Обозначим через A_1,B_1 и C_1 точки пересечения прямых AP, BP и CP соответственно со сторонами BC, CA , AB , а площади треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C и $A_1B_1C_1$ - S_1, S_2, S_3 и S соответственно. Тогда $S^3 + (S_1+S_2+S_3)S^2 - 4S_1S_2S_3 = 0$.

(Это несложно доказать, используя, например, найденные нами отношения площадей в предыдущих рассуждениях).

Рассмотрим функцию $\Phi(x) = x^3 + (S_1+S_2+S_3)x^2 - 4S_1S_2S_3$. По теореме Мёбиуса, $\Phi(S) = 0$. Кроме того, очевидно, что $\Phi(x)$ возрастает на $(0;+\infty)$ (как сумма двух возрастающих функций). Поэтому нам достаточно показать, что $\Phi\left(\sqrt{S_1S_2}\right) \le 0 \le \Phi\left(\sqrt{S_2S_3}\right)$, при условии того, что $S_1 \le S_2 \le S_3$.

Но $\Phi\left(\sqrt{S_1S_2}\right) = S_1S_2\left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le 0$.

Однако $\sqrt{S_1S_2} \le \frac{S_1+S_2}{2}$ (среднее геометрическое двух положительных величин не превосходит их среднего арифметического), поэтому

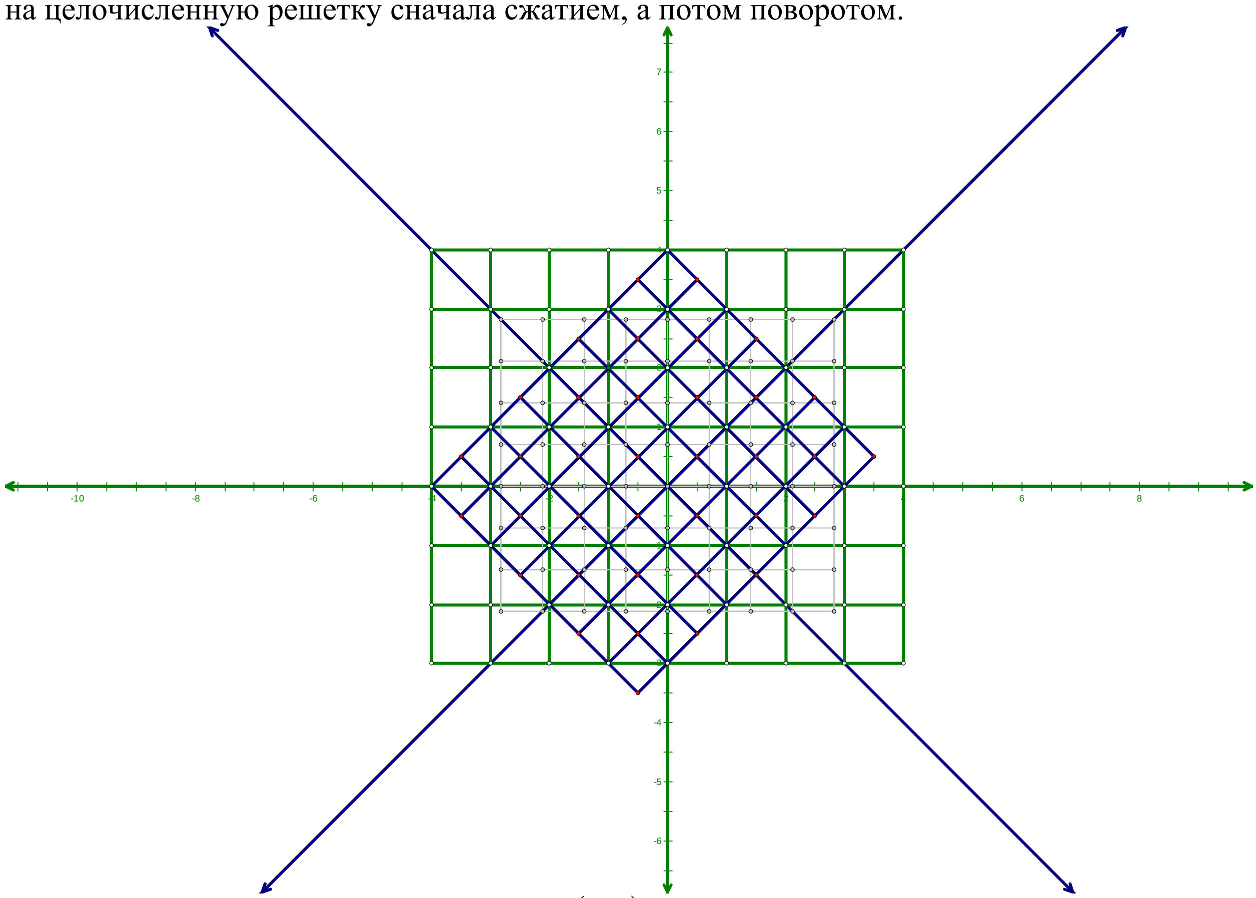
$\left(\sqrt{S_1S_2} + S_1 + S_2 - 3S_3\right) \le \frac{3}{2}(S_1+S_2) - 3S_3 \le \frac{3}{2}2S_3 - 3S_3 = 0.$

С другой стороны, $\Phi\left(\sqrt{S_3S_2}\right) = S_3S_2\left(\sqrt{S_3S_2} + S_3 + S_2 - 3S_1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{S_3S_2} + S_3 + S_2 - 3S_1\right) \ge 0$,
и $\left(\sqrt{S_3S_2} + S_3 + S_2 - 3S_1\right) \ge 3\sqrt{S_3S_2} - 3S_1 \ge 3\sqrt{S_1^{\ 2}} - 3S_1 = 0.$

Задача 15. (А.Заславский)
Дана окружность с центром в начале координат. Докажите, что найдется окружность меньшего радиуса, на которой лежит не меньше точек с целыми координатами.
Решение:

Рассмотрим поворотную гомотетию с центром в начале координат, коэффициентом $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и углом поворота $\frac{\pi}{4}$. Если квадрат радиуса данной окружности – четное число, то все ее целые точки переходят в целые, и мы получаем искомую окружность. Если квадрат радиуса – нечетное число, то все целые точки переходят в центры единичных квадратов с вершинами в целых точках, и искомая окружность получается после переноса на вектор $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Это достаточно очевидно из наглядных соображений – на рисунке изображено действие на целочисленную решетку сначала сжатием, а потом поворотом.



Чисто формально, точка с координатами (x, y) под действием указанных поворота и растяжения, переходит в точку с координатами $\begin{aligned} x' &= \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \\ y' &= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{aligned}$. Если квадрат радиуса-четное число, то x и y одной четности, поэтому x', y' - целые и $x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Если же квадрат радиуса- число нечетное, то четность x и y различна, поэтому после сдвига на вектор $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ получим целую точку $\begin{matrix} x''=\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{2} \\ y''=\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{1}{2} \end{matrix}$ и

$$(x''-\frac{1}{2})^2+(y''-\frac{1}{2})^2=\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{R^2}{2}.$$

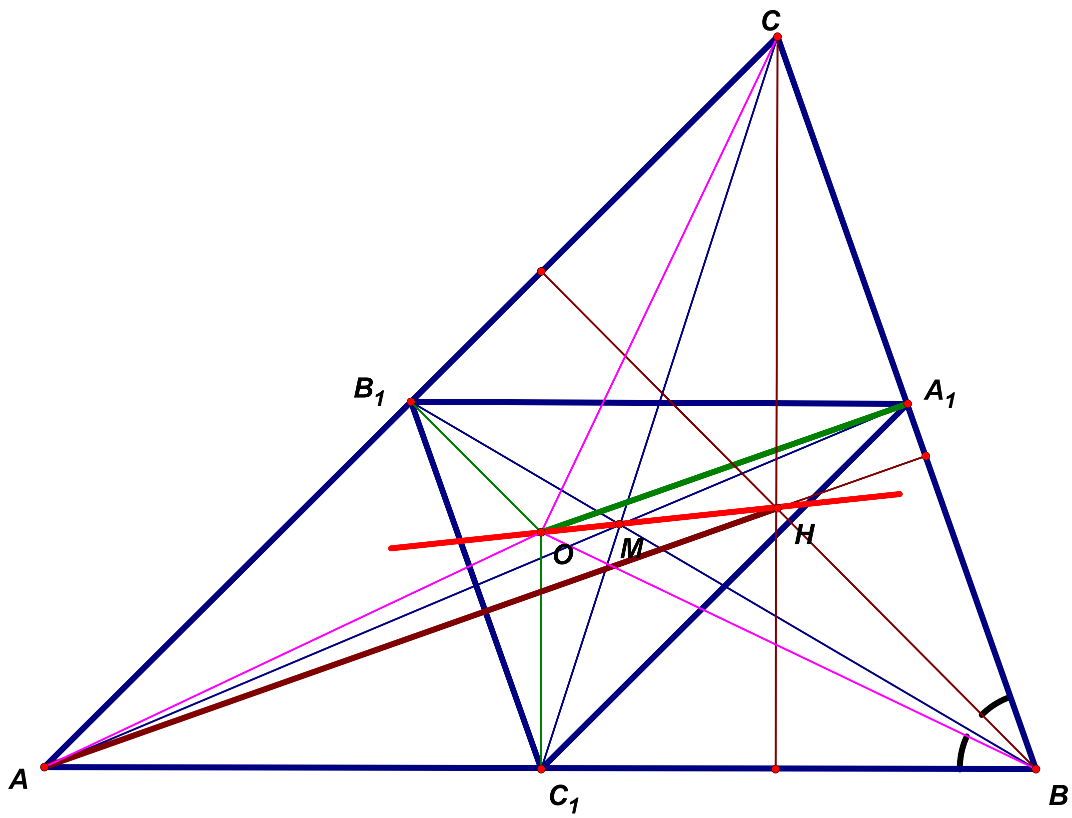
Задача 16. (А.Заславский, Б.Френкин)

В остроугольном неравностороннем треугольнике отметили 4 точки: центры вписанной и описанной окружностей, центр тяжести (точка пересечения медиан) и ортоцентр (точка пересечения высот). Затем сам треугольник стерли. Оказалось, что невозможно установить, какому центру соответствует каждая из отмеченных точек. Найдите углы треугольника.

Решение:

Треугольник, удовлетворяющий условию задачи, равнобедренный с углами $\arccos\frac{1}{4};\arccos\frac{1}{4};\pi-2\arccos\frac{1}{4}$.

Пусть ABC – исходный треугольник, A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB соответственно. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны относительно общего центра тяжести M (с коэффициентом $-\frac{1}{2}$), а центр O описанной окружности треугольника ABC является ортоцентром треугольника $A_1B_1C_1$, - точка M лежит на отрезке OH (H – ортоцентр треугольника ABC) и $HM=2MO$ (прямая, содержащая эти три центра, называется *прямой Эйлера* треугольника ABC).



Поэтому, если точка I (центр вписанной окружности) не лежит на одной прямой с тремя остальными точками, то можно однозначно установить роль каждой из точек в треугольнике ABC. Отметим, что эта прямая проходит не более, чем через одну вершину треугольника, так что можно считать, что точки A и B не лежат на ней.

Так как $\angle OBA = \angle HBC = \dfrac{\pi}{2} - \angle C$, BI является биссектрисой угла HBO. Следовательно, точка I лежит на отрезке OH, причем OI=2IH (иначе роль точек устанавливается однозначно). По свойству биссектрисы получаем, что BO=2BH. Рассуждая аналогично, получим, что AO=2AH. Таким образом, $AH = BH = \dfrac{R}{2}$, где R – радиус описной около ABC окружности.

Заметим теперь, что из гомотетии, указанной в начале решения, следует также, что $AH = 2OA_1$ (и эти отрезки параллельны). Понятно также, что $OA_1 = R\cos A$ (т.к. $\angle BOA_1 = \dfrac{1}{2}\angle BOC = \dfrac{1}{2}2\angle A$). Поэтому $AH = 2R\cos A \Rightarrow \dfrac{R}{2} = 2R\cos A \Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{4}$.

Точно также доказывается, что $\cos B = \dfrac{1}{4}$.

Задача 17. (А.Мякишев)

В треугольник ABC вписана окружность и отмечен ее центр I и точки касания P,Q,R со сторонами BC, CA и AB соответственно. Одной линейкой постройте точку K, в которой окружность, проходящая через вершины B и C, касается (внутреннем образом) вписанной окружности.

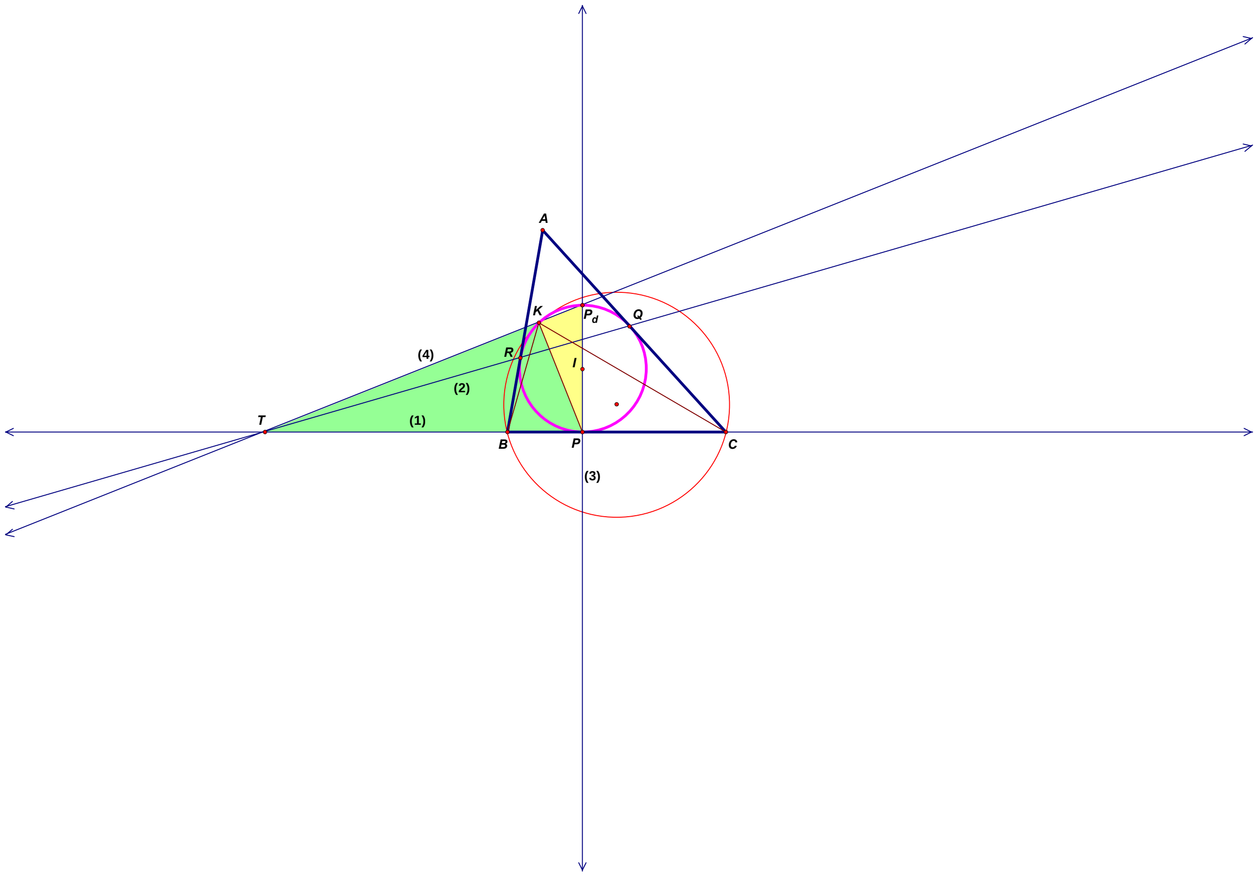
Решение:

Согласно известной теореме Штейнера, *если на плоскости фиксирована окружность с отмеченным центром, то одной линейкой можно построить все то же самое, что и линейкой с циркулем.*

Но применение стандартных методов, не учитывающих особенностей заданной в условии конструкции, требует изрядного количества «шагов». Естественно, требовалось при построении ограничиться минимальным количеством линий.

Оказывается, можно обойтись всего лишь четырьмя!

Сразу заметим, что если $AB=AC$, то построение очевидно (K совпадает с точкой, диаметрально противоположной точке P) и будем рассматривать случай, когда $AB \neq AC$.



Построение:

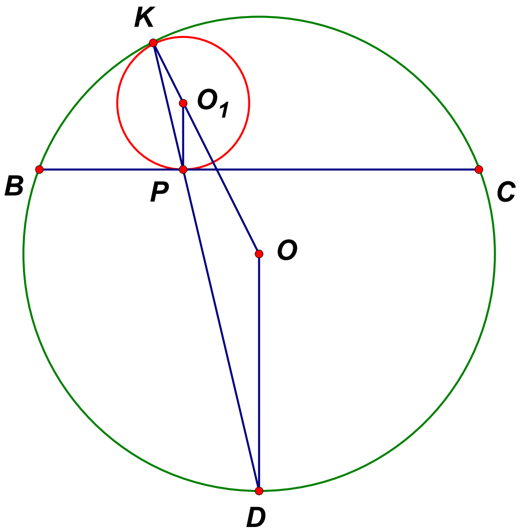
1. Проведем прямую BC .
2. Проведем прямую QR и отметим точку T пересечения этой прямой с прямой BC.
3. Построим точку P_d , диаметрально противоположную точке P.
4. Проведем прямую P_dT и отметим точку K – вторую точку пересечения этой прямой с вписанной окружностью.

Точка K и есть искомая.

Доказательство:

Понятно, что точка T будет делить отрезок BC в том же отношении, что и точка P (по теореме Чевы, $\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, а по теореме Менелая, $\frac{BT}{TC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$, $\Rightarrow \frac{BP}{PC}=\frac{BT}{TC}$).

Пусть интересующая нас окружность построена. Тогда KP – биссектриса угла BKC (по известной *лемме Архимеда – пусть прямая пересекает данную окружность в точках B и C; рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке K, а прямой BC в точке P; тогда прямая KP проходит через середину одной из двух дуг BC –* справедливость этого факта вытекает из подобия равнобедренных треугольников KO_1P и KOD).



По свойству биссектрисы, $\dfrac{BP}{CP} = \dfrac{KB}{KC} = \lambda \neq 1$.

Поэтому точка K лежит на *окружности Аполония* (см. решение задачи № 7, способ № 3) для отрезка BC с отношением λ, построенной на PT как на диаметре, т.е. $\angle\ TKP$ – прямой, или, что тоже, прямым является угол $\angle\ PKP_d$.

Из этих рассуждений следует обоснование нашего построения.

Задача 18. (В. Протасов)

На плоскости даны три прямые l_1, l_2, l_3, образующие треугольник, и отмечена точка O – центр описанной окружности этого треугольника. Для произвольной точки X плоскости обозначим через X_i точку, симметричную точке X относительно прямой l_i, $i = 1,2,3$.

а) Докажите, что для произвольной точки M прямые, соединяющие середины отрезков O_1O_2 и M_1M_2 , O_2O_3 и M_2M_3 , O_3O_1 и M_3M_1 , пересекаются в одной точке;

б) где может лежать эта точка пересечения?

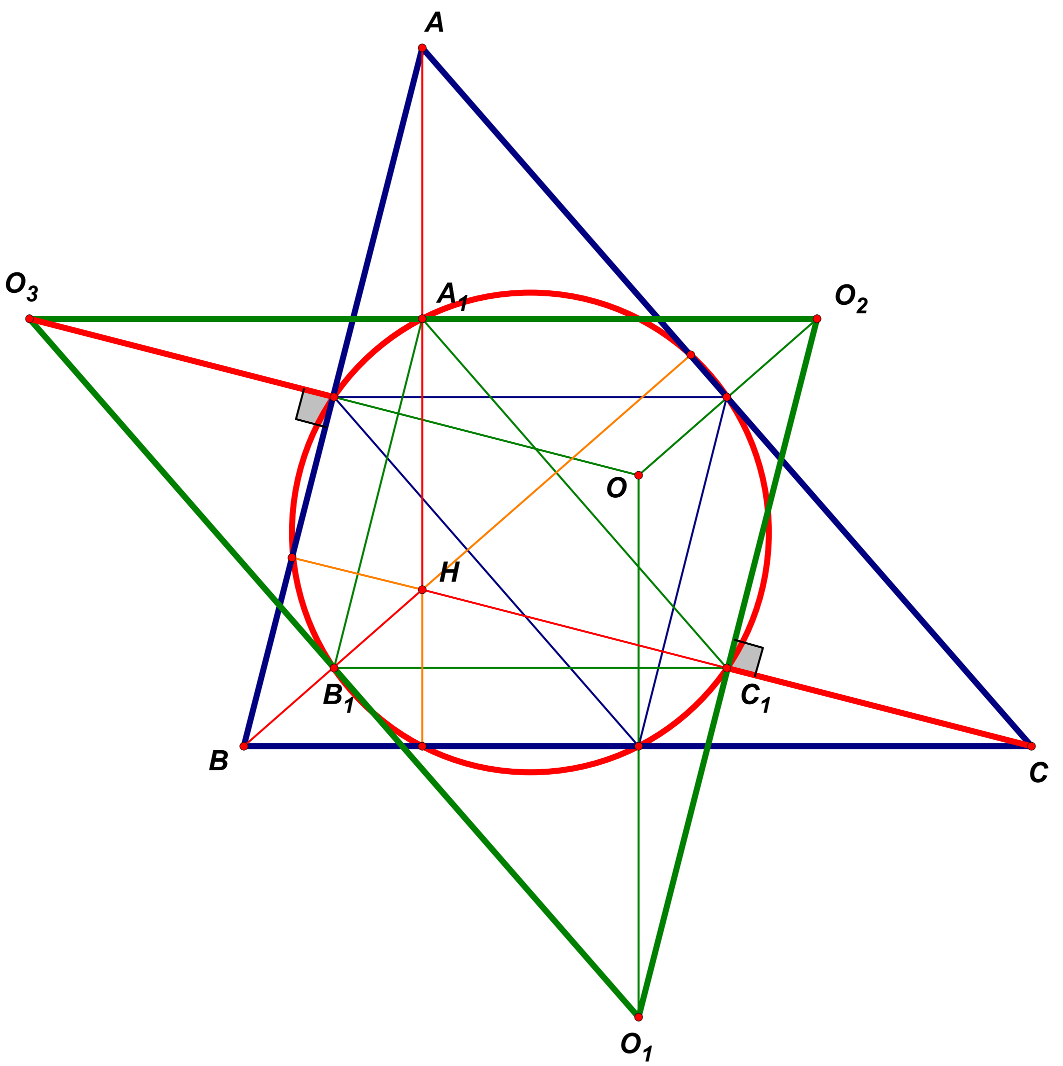
Решение:

Первый способ.

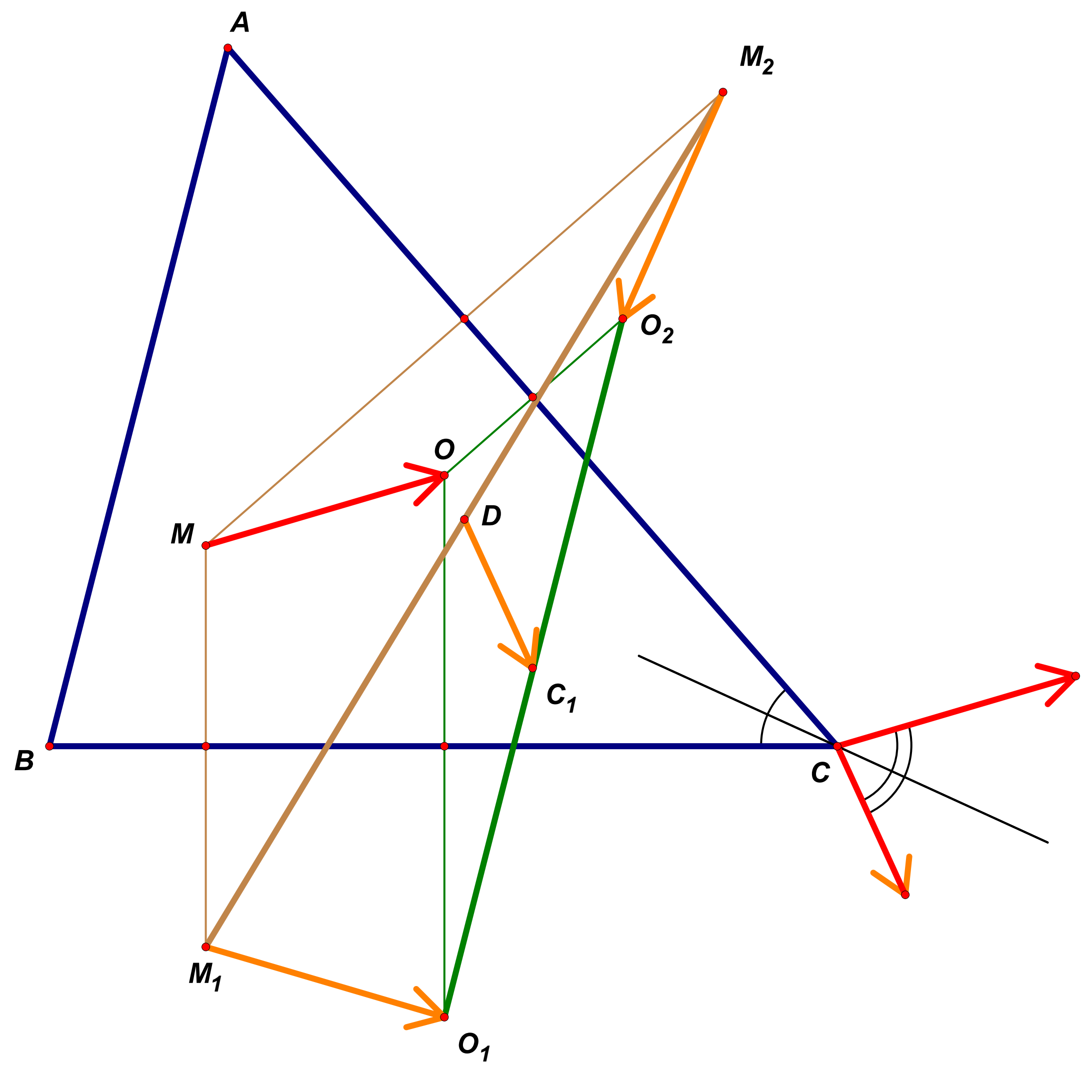
Покажем, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на *окружности Эйлера* .

(Напомним, что окружностью Эйлера треугольника ABC называют окружность, описанную около его серединного треугольника, т.е. проходящую через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами.)

Пусть ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр. Тогда середины O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_1 совпадают с серединами отрезков AH, BH, CH (в дальнейшем будем обозначать их A_1, B_1, C_1) и, стало быть, лежат на окружности Эйлера треугольника ABC. Действительно, стороны треугольника $O_1O_2O_3$ параллельны средним линиям треугольника ABC и вдвое больше их, поскольку переводятся друг в друга гомотетией с центром в O и коэффициентом 2. Следовательно, треугольник $O_1O_2O_3$ центрально симметричен ABC. Значит, прямая, проходящая через C и середину O_1O_2 , параллельна прямой, проходящей через O_3 и середину AB, т.е. совпадает с высотой треугольника ABC, а H является центром гомотетии ABC и $A_1B_1C_1$.



Пусть, далее, M – произвольная точка, D – середина M_1M_2. Тогда $\overrightarrow{DC_1} = \dfrac{\overrightarrow{M_1O_1} + \overrightarrow{M_2O_2}}{2}$ и, так как $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ получаются друг из друга поворотом вокруг точки C на угол $2C$, $\overrightarrow{DC_1}$ образует с каждым из них угол, равный C. Кроме того, $\overrightarrow{M_1O_1}$ и $\overrightarrow{M_2O_2}$ переходят в $\overrightarrow{M\ O}$ при симметрии относительно CB и CA соответственно, поэтому $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{M\ O}$ образуют равные углы с биссектрисой угла C (а значит, равные углы и с биссектрисой угла C_1 в треугольнике $A_1B_1C_1$).

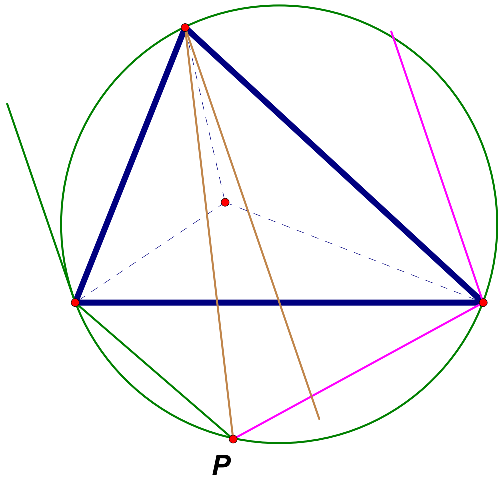


Проведя аналогичные рассуждения для двух других середин, приходим к выводу, что прямые, соединяющие A_1, B_1, C_1 с серединами сторон треугольника $M_1M_2M_3$, симметричны относительно биссектрис треугольника $A_1\,B_1C_1$ прямым, проходящим через A_1, B_1, C_1 и параллельным OM.

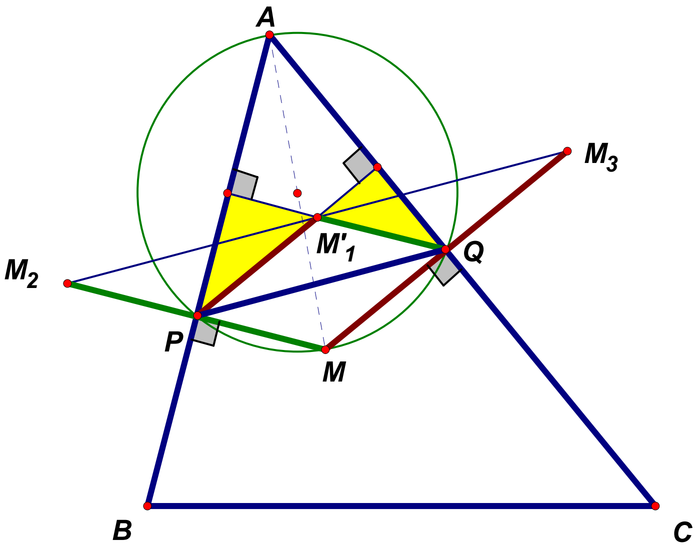
В заключении воспользуемся следующей классической теоремой планиметрии:

Тройка прямых, выходящих из вершин треугольника, пересекается в одной точке, расположенной на описанной около этого треугольника окружности, тогда и только тогда, когда прямые, симметричные данным относительно биссектрис соответствующих углов, параллельны.

(Несложное доказательство использует простой подсчет углов).



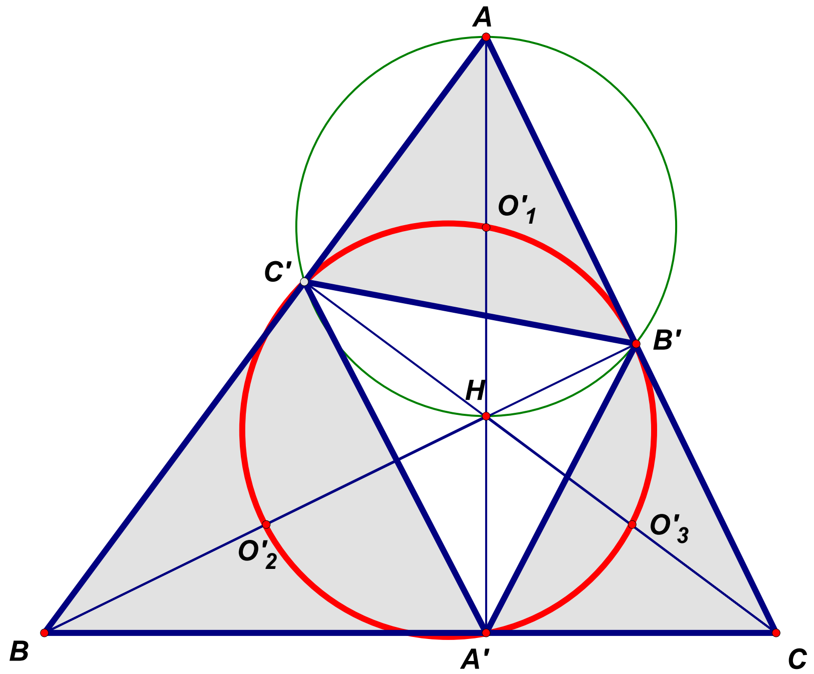
Согласно этой теореме, тройка прямых в нашей задаче пересекается на описанной около треугольника A_1 B_1C_1 окружности, т.е. на окружности Эйлера исходного треугольника.
Второй способ.
(*Авксентьев Евгений,* г. Ростов-на-Дону, МОУ гимназия № 5).
Итак, ABC – треугольник, образованный прямыми l_i, H – его ортоцентр и A', B', C' - основания высот, опущенных на стороны *BC, CA, AB* соответственно.
Дадим теперь следующее определение:
Пусть имеются две подобные фигуры Ψ_1 и Ψ_2 и некоторое преобразование подобия H, переводящее одну фигуру в другую. Скажем, что *две фигуры* Φ_1 *и* Φ_2 *одинаково расположены относительно* Ψ_1 *и* Ψ_2, если преобразование H также переводит Φ_1 в Φ_2.
Теперь докажем, что точки M_1' (середина M_3M_2) и M одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$ и ABC (как известно, эти треугольники подобны с коэффициентом $\frac{1}{|\cos A|}$, причем подобие это можно представить как композицию осевой симметрии относительно биссектрисы угла A и гомотетии с центром в A – см. замечание к решению задачи № 10). Для этого достаточно показать, что $AM_1' = AM|\cos A|$ (отношение расстояния от отрезка до его образа равно коэффициенту подобия) и что отношение расстояний от точки M_1' до AB и AC обратно пропорционально отношению расстояний от M до тех же сторон (т.е. прямая AM_1' при симметрии относительно биссектрисы угла A переходит в прямую AM).



Так как $M_1'Q$ – средняя линия треугольника M_2MM_3, то она перпендикулярна AB. Из тех же соображений $M_1'P$ перпендикулярна AC, поэтому M_1' - ортоцентр треугольника APQ, а значит, $AM_1' = 2\rho|\cos A|$, где ρ - радиус окружности, описанной около APQ (как было показано в решении задачи № 16). Очевидно, что $\rho = \dfrac{AM_1'}{2}$. Равенство же обратных отношений до сторон вытекает из подобия заштрихованных на рисунке треугольников. Точно также доказывается, что M_2' и M одинаково расположены относительно $A'BC'$ и ABC, а M_3' и M - относительно $A'B'C$ и ABC.

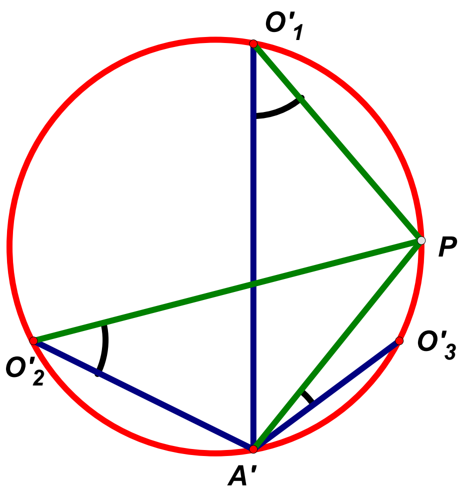
Теперь, если в качестве M мы выберем точку O – центр описанной около ABC окружности, то, очевидно, точки O_1', O_2', O_3' будут серединами отрезков, соединяющих ортоцентр H треугольника ABC с его вершинами (Поскольку прямые, соединяющие вершину треугольника с H и O, симметричны относительно соответствующей биссектрисы, – факт, с которым мы уже сталкивались при решении задачи № 16- и потому, например, точка O_1' лежит на прямой AH. Кроме того, $AO = R$ и $AH = 2R|\cos A| \Rightarrow AO_1' = \dfrac{AH}{2}$ - и т.д.).

Из доказанной нами одинаковой расположенности следует, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ одинаково расположены относительно треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ (т.е. $O_1'M_1'$ и $O_2'M_2'$ одинаково расположены относительно $AB'C'$ и $A'BC'$ и т.д.- циклическими перестановками).



Кроме того, понятно (ведь при подобии треугольников соответственные элементы переходят в соответственные, и, значит, центры описанных окружностей- друг в друга), что и прямые $O_1'A'$, $O_2'A'$ и $O_3'A'$ одинаково расположены относительно тех же треугольников, причем все эти четыре точки находятся на одной окружности – окружности Эйлера треугольника *ABC*.

Наконец, отсюда заключаем, что углы между парами $O_1'M_1'$ и $O_1'A'$, $O_2'M_2'$ и $O_2'A'$, $O_3'M_3'$ и $O_3'A'$ одинаковы.



Таким образом, мы показали, что прямые $O_1'M_1'$, $O_2'M_2'$ и $O_3'M_3'$ пересекаются в одной точке, расположенной на окружности Эйлера исходного треугольника.

Задача 19. (А. Тарасов)

Как известно, Луна вращается вокруг Земли. Будем считать, что Земля и Луна – это точки, а Луна вращается вокруг Земли по круговой орбите с периодом один оборот в месяц.

Летающая тарелка находится в плоскости лунной орбиты. Она может перемещаться прыжками через Луну и Землю – из старого места (точки А) она моментально

появляется в новом (в точке A') так, что в середине отрезка $A A'$ находится или Луна, или Земля. Между прыжками летающая тарелка неподвижно висит в космическом пространстве.
а) Определите, какое минимальное количество прыжков потребуется летающей тарелке, чтобы допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты.
б) Докажите, что летающая тарелка, используя неограниченное количество прыжков, может допрыгнуть из любой точки внутри лунной орбиты до любой другой точки внутри лунной орбиты за любой промежуток времени, например, за секунду.

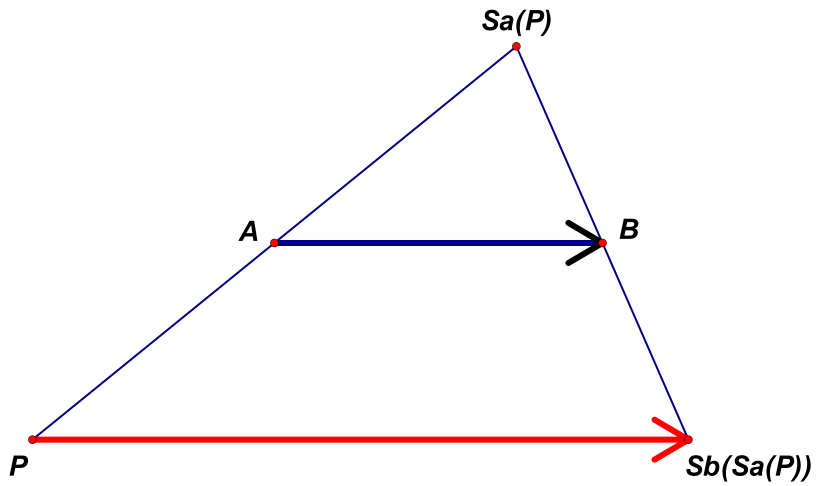
Решение:

а)

Из любой точки внутри лунной орбиты можно допрыгнуть до любой другой точки внутри лунной орбиты за два прыжка. Для этого оба раза надо прыгнуть относительно луны, сначала в момент, когда Луна находится в точке L_1, а второй раз когда луна в точке L_2.

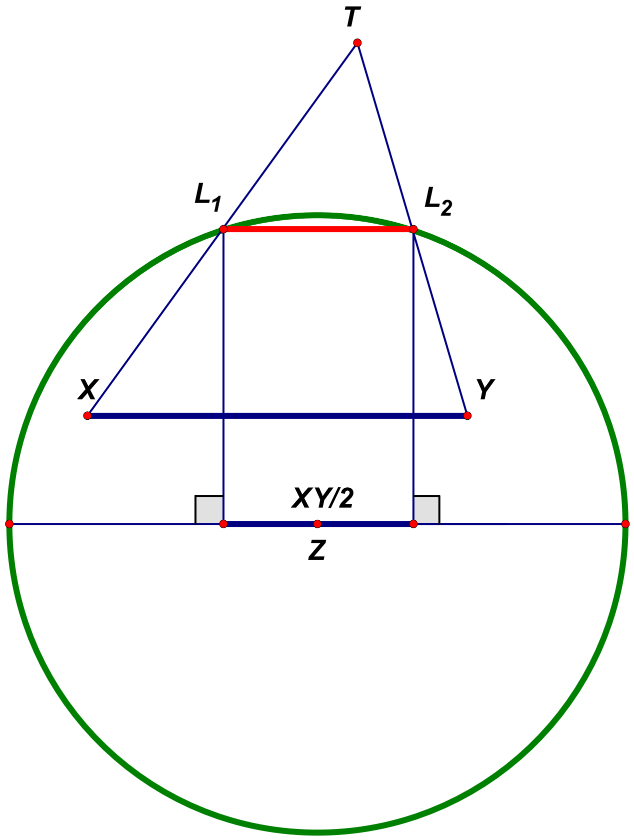
После двух прыжков летающая тарелка переместится на вектор $2\overrightarrow{L_1L_2}$.

(Поскольку композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос на удвоенный вектор с началом в первом центре и концом во втором – см. рис.)

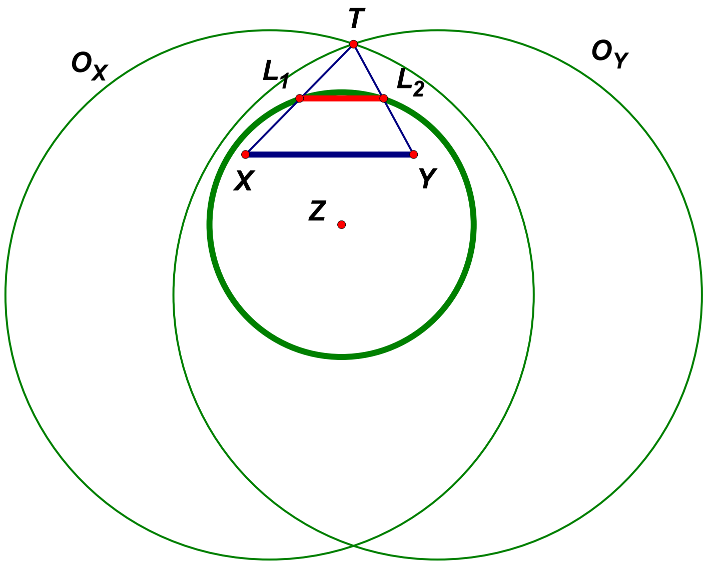


Для любых двух точек внутри орбиты X и Y можно найти хорду L_1L_2, такую , что $|XY| = 2|L_1L_2|$.

Эту хорду можно, например, построить, проведя диаметр, параллельный *(XY)*, и отложить на нем отрезок длиной $\frac{|XY|}{2}$, середина которого совпадает с центром окружности, а затем из концов этого отрезка провести перпендикуляры, которые и отсекут искомую хорду.



А можно рассмотреть гомотетии с центрами в точках X и Y и коэффициентом 2. Образы лунной орбиты при этом должны пересечься, поскольку, если радиус лунной орбиты R и центры образов- O_x, O_y, то $|O_xO_y| < |XY| + 2(|XZ| + |YZ|) < 4R$.



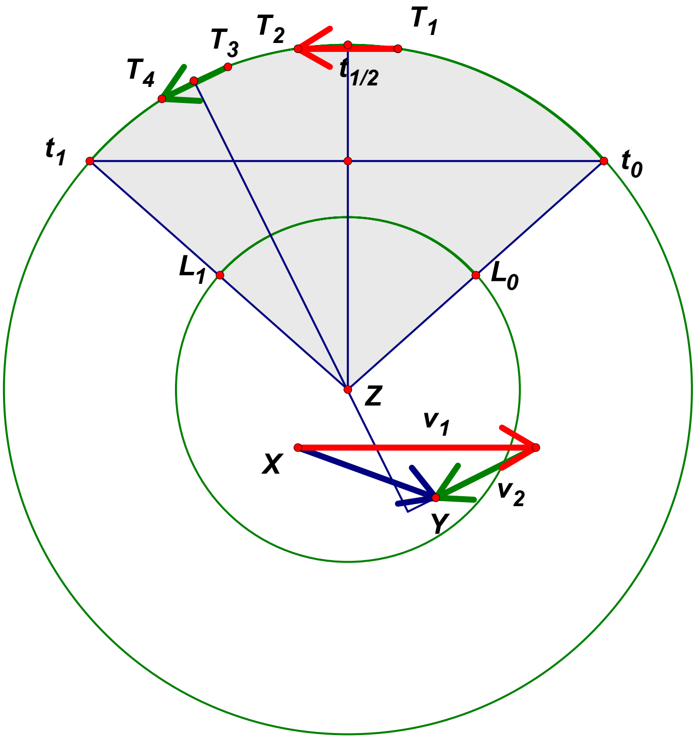
б)

Пусть начальное положение Луны- L_0, конечное – L_1.

Будем рассматривать пару прыжков сначала относительно Земли, а потом относительно Луны , как двойной прыжок. При этом тарелка перемещается на вектор $2\overrightarrow{ZL}$, конец этого вектора- точка T – будет лежать на дуге окружности t_0t_1 с центром в Z и радиусом, вдвое большим, чем радиус орбиты Луны. Будем такие вектора в дальнейшем обозначать просто $\vec{T}$.

Мы прыгаем мгновенно, значит, в любой момент времени мы можем прыгнуть на *целое* число прыжков $k\vec{T}$ (чтобы прыгнуть на вектор $-\vec{T}$, сначала надо прыгнуть относительно Луны, а потом относительно Земли).

Теперь, чтобы из точки X попасть в точку Y, надо представить вектор $\overrightarrow{XY}$ как конечную сумму векторов, состоящих из слагаемых вида $k_i\vec{T_i}$, $k_i \in Z$, а T_i – некоторый набор точек на дуге t_0t_1, расположенных последовательно друг за другом.



Сначала представим $\overrightarrow{XY}$ в виде суммы $\vec{v_1}+\vec{v_2}$, так чтобы оба этих вектора были бы перпендикулярны некоторым радиусам нашего сектора. Это можно сделать, положив $\vec{v_1}=\lambda\left(\vec{t_1}-\vec{t_0}\right), \vec{v_2}=\overrightarrow{XY}-\vec{v_1}$. Поскольку $\vec{v_1}$ перпендикулярен «серединному» радиусу при всех значениях λ и при увеличении λ по модулю $\vec{v_2}$ стремится к $-\vec{v_1}$, то при достаточно большом λ $\vec{v_2}$ также будет перпендикулярен некоторому радиусу.

Очевидно, что найдутся достаточно большие по модулю целые m_1 и m_2 и некоторые точки на дуге T_1, T_2, T_3, T_4, расположенные последовательно и такие, что $\vec{v_1}=m_1\left(\vec{T_2}-\vec{T_1}\right)$ и $\vec{v_2}=m_2\left(\vec{T_4}-\vec{T_3}\right)$.

Искомое представление получено.

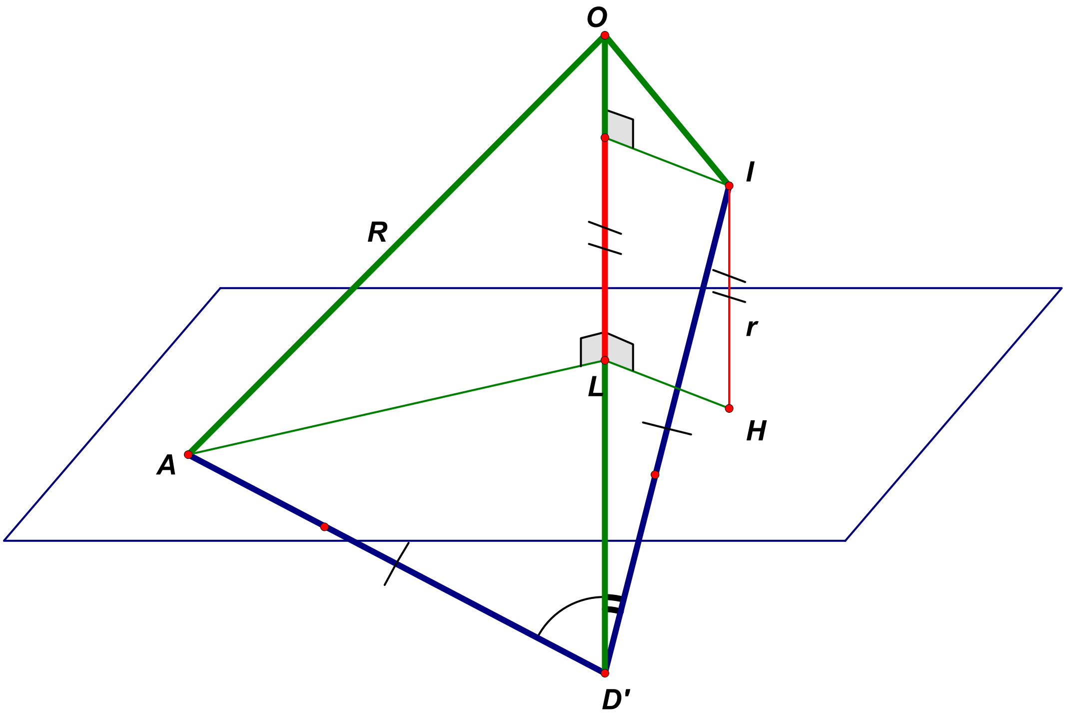
Задача 20. (А.Заславский)

Пусть I – центр сферы, вписанной в тетраэдр ABCD, A', B', C', D' *- центры сфер, описанных около тетраэдров IBCD, ICDA, IDBA, IABC соответственно. Докажите, что сфера, описанная около ABCD, целиком лежит внутри сферы, описанной около* $A'B'C'D'$.

Эта задача оказалась своеобразной рекордсменкой – с ней не удалось справиться никому из принимавших участие в заочном туре.

Решение:

Пусть *R, r* – радиусы описанной и вписанной сфер *ABCD, O* – центр описанной сферы *ABCD, L* – центр описанной окружности треугольника *ABC*, *H* – проекция *I* на плоскость *ABC*. Из условия следует, что *O* и D' лежат на перпендикуляре к плоскости *ABC*, проходящем через *L*, поэтому прямые OD' и *IH* параллельны. Кроме того, $D'A = D'I$ (как радиусы сферы, описанной около *IABC*), *OA=R, IH=r.*



Дважды применим теорему косинусов – к треугольникам $AD'O$ и $OD'I$:

$R^2 = D'A^2 + D'O^2 - 2D'A \cdot D'O \cos\angle AD'O$,

$OI^2 = D'I^2 + D'O^2 - 2D'I \cdot D'O \cos\angle ID'O$.

Вычитая из первого равенства второе, получим:

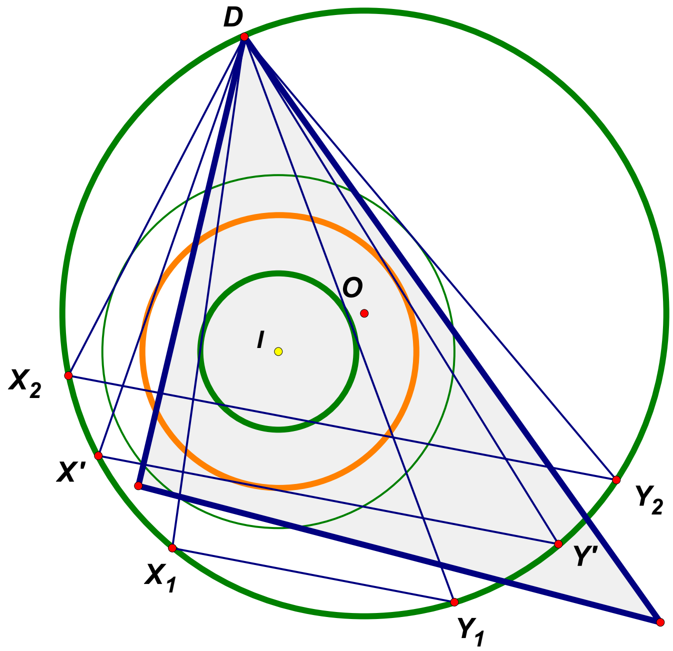
$R^2 - OI^2 = 2D'O \cdot \left|\left(D'A\cos\angle AD'O - D'I\cos\angle ID'O\right)\right| = 2D'O \cdot IH$.

Следовательно, $D'O = \dfrac{R^2 - OI^2}{2r}$.

Аналогично доказывается, что и точки A', B', C' удалены от *O* на такое же расстояние. Таким образом, сферы *ABCD* и A', B', C', D' *концентричны* (т.е. их центры совпадают) и $D'O = \rho$ - радиус сферы, описанной около A', B', C', D'.

Докажем, что $\rho > R \Leftrightarrow \dfrac{R^2 - OI^2}{2R} > r$.

Для этого проведем плоскость *DOI*. Она пересекает описанную и вписанную сферу по окружностям с центрами *O, I* и радиусами *R, r*, а тетраэдр – по некоторому треугольнику. Вершина *D* этого треугольника лежит на большей окружности, а из двух других вершин по крайней мере одна лежит внутри этой окружности. Кроме того, меньшая окружность целиком лежит внутри этого треугольника и внутри большей окружности.



Поэтому, если провести через D хорды DX_1 и DY_1 большей окружности, касающейся меньшей, то меньшая окружность окажется строго внутри треугольника DX_1Y_1. Будем теперь «раздувать» меньшую окружность, сохраняя центр и увеличивая радиус. Из соображений непрерывности следует, что наступит момент, когда «раздутая» окружность (некоторого радиуса r') будет *вписана* в треугольник $DX'Y'$, образованный парой касательных с вершиной в D.

Этот же треугольник будет *вписан* в большую окружность, поэтому для него выполняется классическое соотношение, выражающее расстояние между центрами вписанной и описанной окружности через их радиусы (т.н.*формула Эйлера*):

$OI^2 = R^2 - 2Rr'$.

Следовательно, $r' = \dfrac{R^2 - OI^2}{2R}$. Понятно также, что $r' > r$.

Задача решена.

Задача 21. (Н. Долбилин)

Планета «Тетраинкогнито», покрытая «океаном», имеет форму правильного тетраэдра с ребром 900 *км. Какую площадь океана накроет «цунами» через* 2 *часа после тетратрясения с эпицентром в*

а) центре грани,

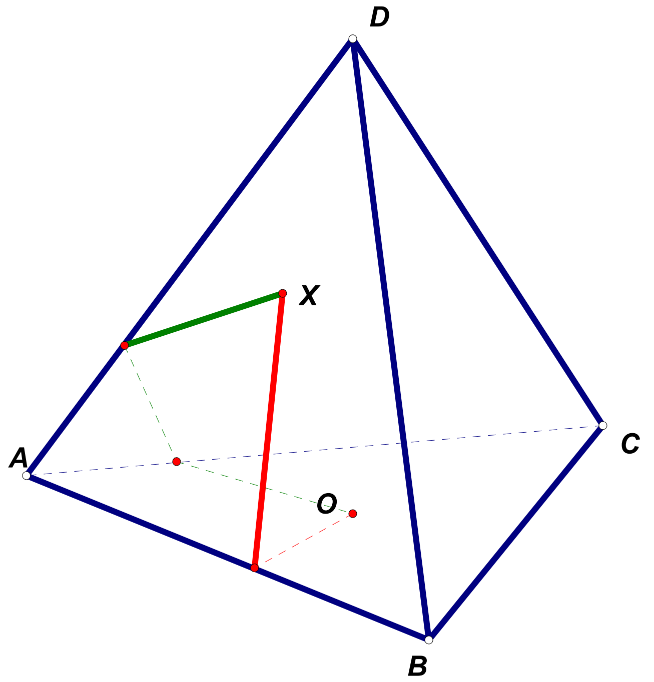
б) середине ребра,

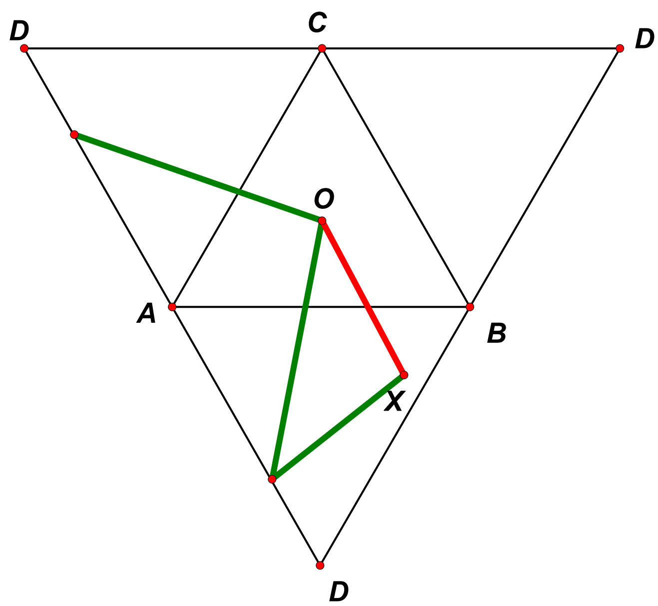
если скорость распространения цунами 300 *км/час?*

Решение:

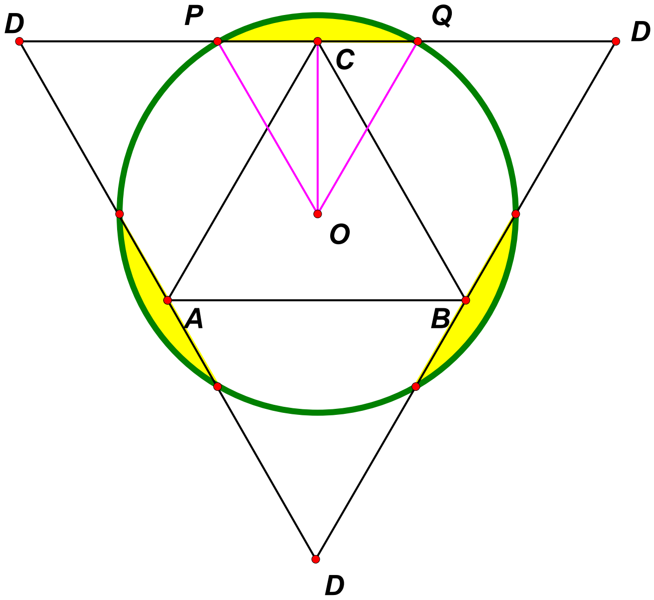
а)

Рассмотрим развертку в виде правильного треугольника и докажем, что кратчайший путь из его центра в любую точку будет на этой развертке отрезком. Пусть O - центр грани ABC, X - точка на грани ABD и некоторый путь из O в X пересекает сначала ребро AC. Если продолжить этот путь на развертке, мы попадем в некоторую точку на ребре AD. Но в эту точку ведет и симметричный путь через ребро AB, через которое в X можно попасть напрямую.





Поэтому площадь, которую накроет цунами, есть разность между площадью круга радиусом 600 км и утроенной площадью сегмента.



$$\cos\angle POC=\frac{OC}{OP}=\frac{900}{\sqrt{3}\cdot 600}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle POQ=\frac{\pi}{3}.$$

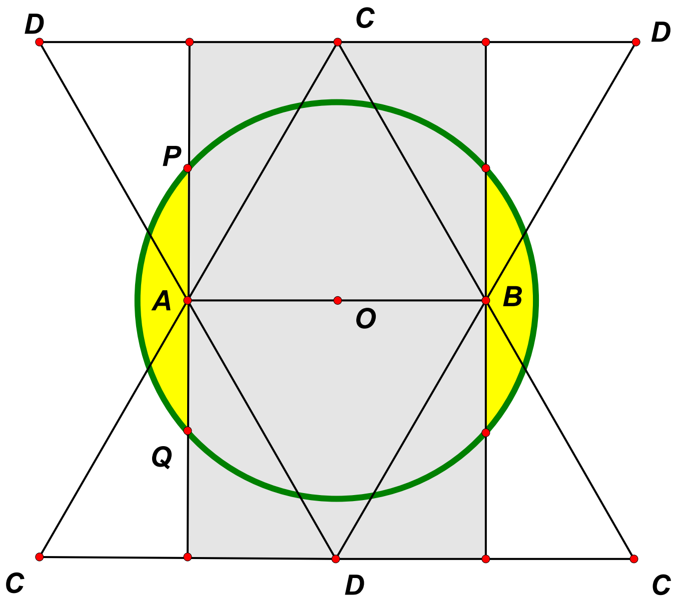
Площадь сегмента есть разность площадей сектора и треугольника:

$$S_{сег.}=\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}600^2-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}600^2\Rightarrow S_{цунами}=\pi\cdot 600^2-\frac{3}{2}\cdot 600^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$

$$=180000\pi+270000\sqrt{3}.$$

б)

Рассматривая «двойную» развертку тетраэдра, и рассуждая как в предыдущем случае, убеждаемся в том, что кратчайшие пути лежат внутри заштрихованного прямоугольника.



Площадь, которую накроет цунами, есть разность площади круга и удвоенной площади сегмента.

$$\angle POA=\arccos\frac{OA}{OP}=\arccos\frac{3}{4}\Rightarrow\angle POQ=2\arccos\frac{3}{4}.$$

$PQ = 2PA = 2PO\sin\angle POA = 300\sqrt{7}$

$S_{сег.} = S_{сек.} - S_{тр.} = 2\cdot 180000\arccos\dfrac{3}{4} - 67500\sqrt{7}$.

$S_{иск.} = S_{кр.} - 2S_{сег.} = \pi\cdot 600^2 - 2\cdot 360000\arccos\dfrac{3}{4} + 135000\cdot\sqrt{7} =$

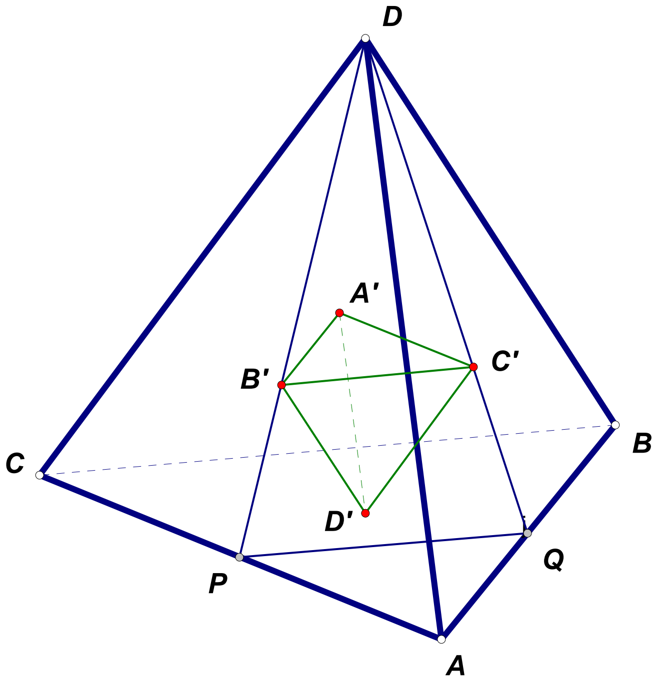
$= 720000\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{3}{4}\right) + 135000\cdot\sqrt{7} = 720000\cdot\arcsin\dfrac{3}{4} + 135000\cdot\sqrt{7}$.

Задача 22. (В. Босс)

К граням тетраэдра восстановлены перпендикуляры в их центрах тяжести (точках пересечения медиан). Докажите, что проекции трех перпендикуляров на четвертую грань пересекаются в одной точке.

Решение:

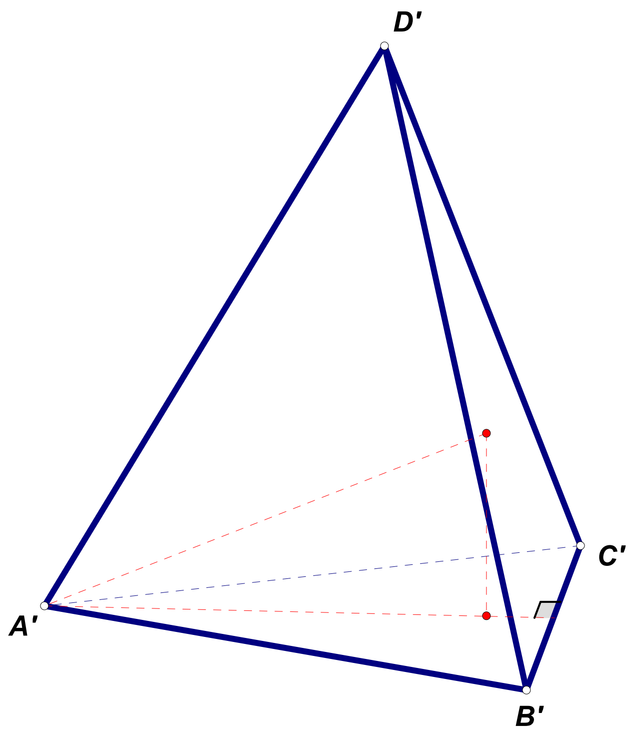
Пусть *ABCD* – данный тетраэдр, A', B', C', D' - центры тяжести граней *BCD, CDA, DAB, ABC.* Оказывается, грани тетраэдра, образованного центроидами, параллельны соответственным граням исходного тетраэдра. Так, например, плоскость *ABC* параллельна плоскости $A'B'C'$ и т.д.



Действительно, пусть точки *P* и *Q* – середины *AC* и *AB.* Так как центроид делит медиану в отношении 2: 1, то, по теореме, обратной теореме Фалеса, $B'C' \parallel PQ$. Но $PQ \parallel BC$, как средняя линия, следовательно, $B'C' \parallel BC$. Точно также, $A'C' \parallel AC$, и, по признаку параллельности двух плоскостей, грани параллельны.

Поэтому перпендикуляры, восстановленные из точек A', B', C', D' к соответствующим граням *ABCD*, являются высотами тетраэдра A', B', C', D' .

По теореме о трех перпендикулярах их проекции на плоскость грани $A'B'C'$ являются высотами этой грани и, значит, пересекаются в одной точке. Но тогда их проекции на параллельную плоскость *ABC* также пересекаются в одной точке.

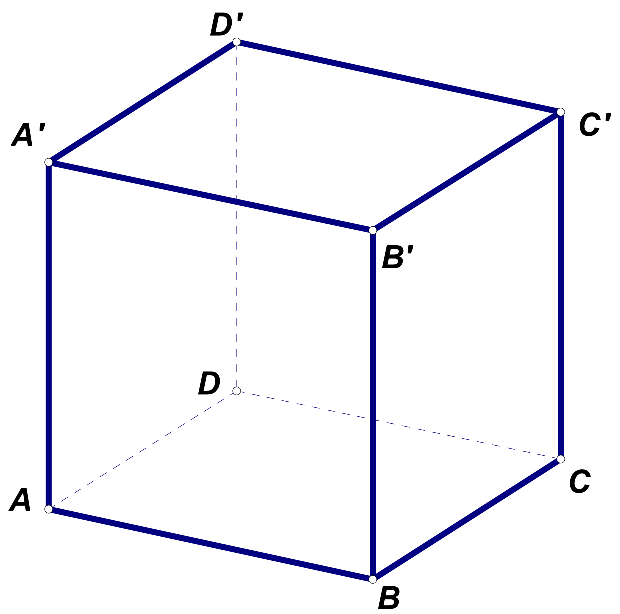


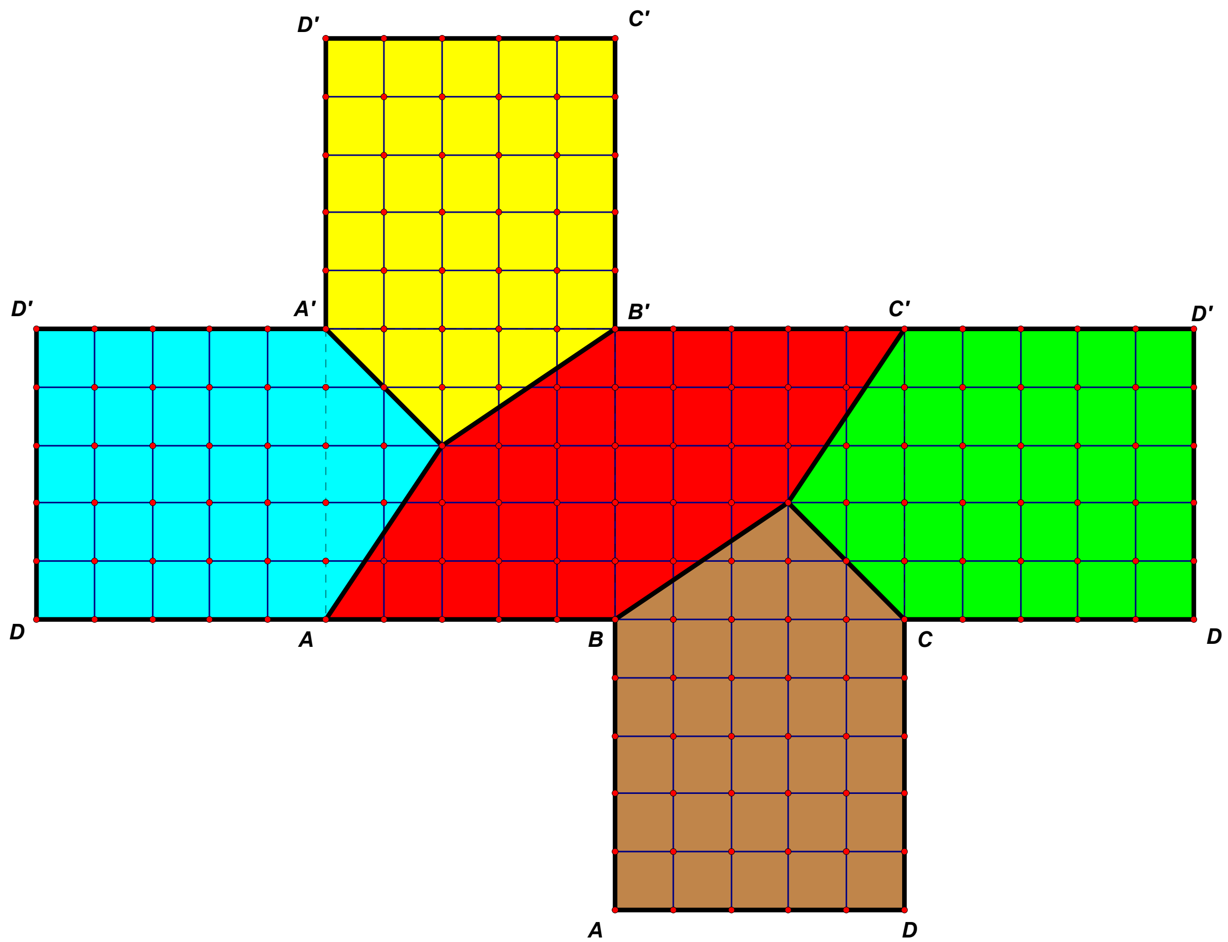
Задача 23. (Л. и Т. Емельяновы)

Оклейте куб в один слой пятью равновеликими выпуклыми пятиугольниками.

Решение:

Например, это можно сделать следующим образом, рассмотрев такую развертку куба:





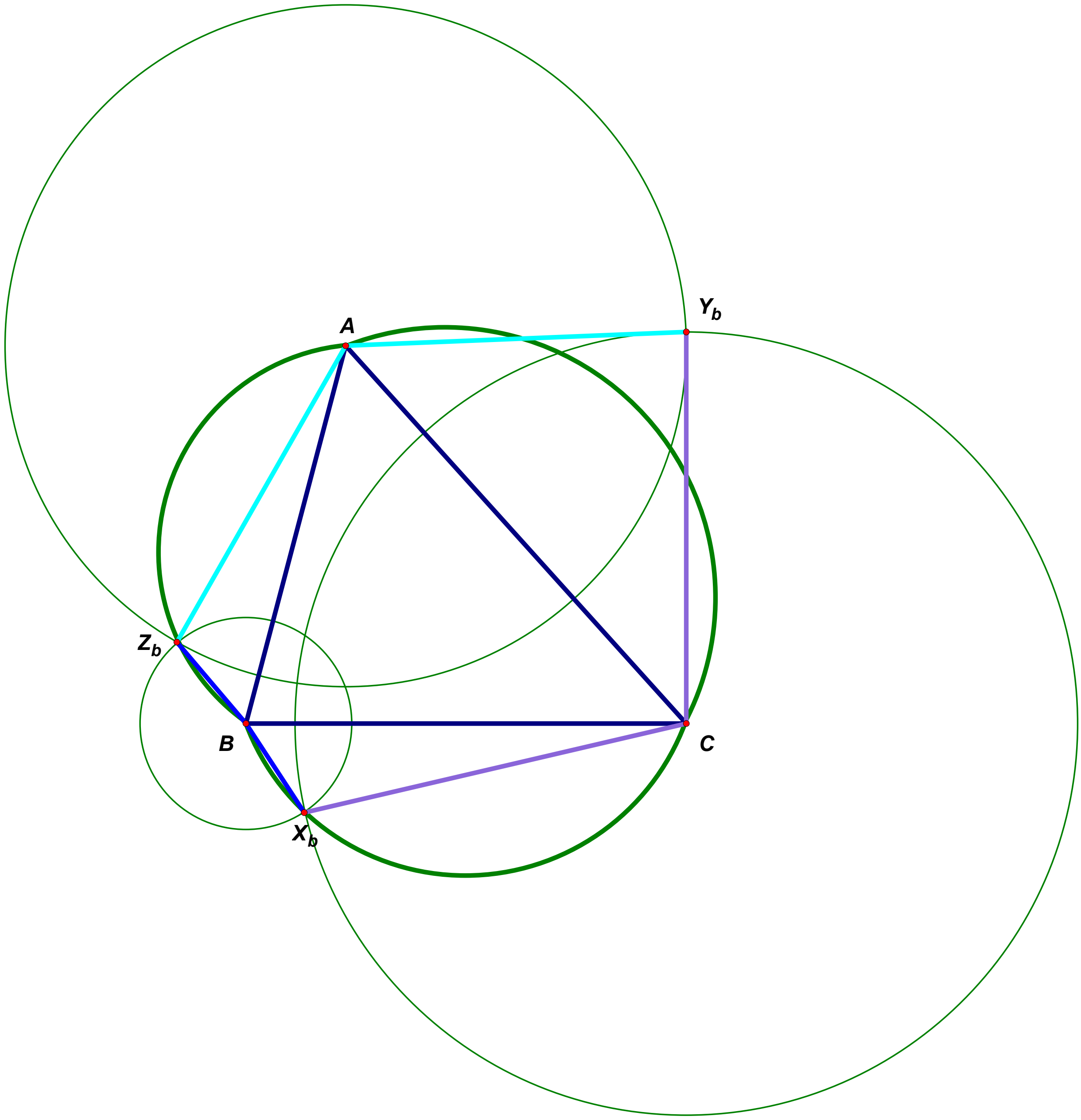
Задача 24. (В. Сендеров)

Дан треугольник, все углы которого меньше φ, где $\varphi < \frac{2\pi}{3}$. Докажите, что в пространстве существует точка, из которой все стороны треугольника видны под углом φ.

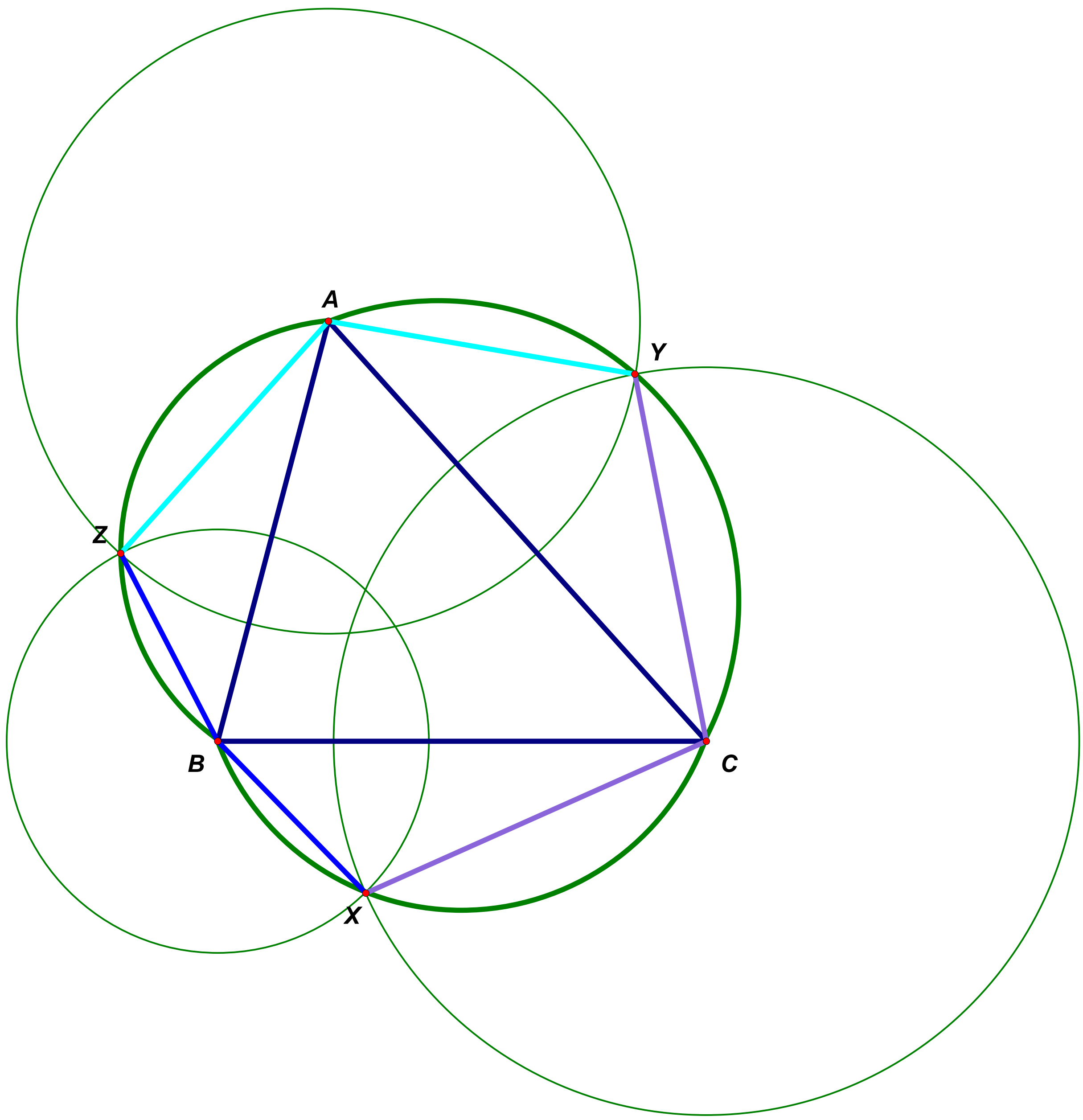
Решение:

Первый способ.

Пусть ABC – данный треугольник. Построим на каждой его стороне во внешнюю сторону дуги, вмещающие угол φ. Покажем, что на дугах BC, CA, AB найдутся точки X, Y, Z соответственно, такие что $AZ=AY$, $BZ=BX$, $CX=CY$. Пусть AC – наибольшая сторона треугольника, AB – наименьшая. Возьмем произвольную точку Z на дуге AB, найдем на дуге BC точку X, такую, что $BX=BZ$ (X определяется однозначно, так как $AB \le BC$), и построим точку Y, лежащую по разные стороны с B от прямой AC и такую, что $AY=AZ$, $CY=CX$. При $Z=B$ имеем $AY=AB$, $CY=CB$. Следовательно, $\angle AYC = \angle B < \varphi$ и Y лежит вне сегмента, построенного на AC.



При $Z=A$ точка Y не существует, так как $AC \geq BC$. Следовательно, при некотором промежуточном положении точки Z, точка Y попадает на дугу AC.

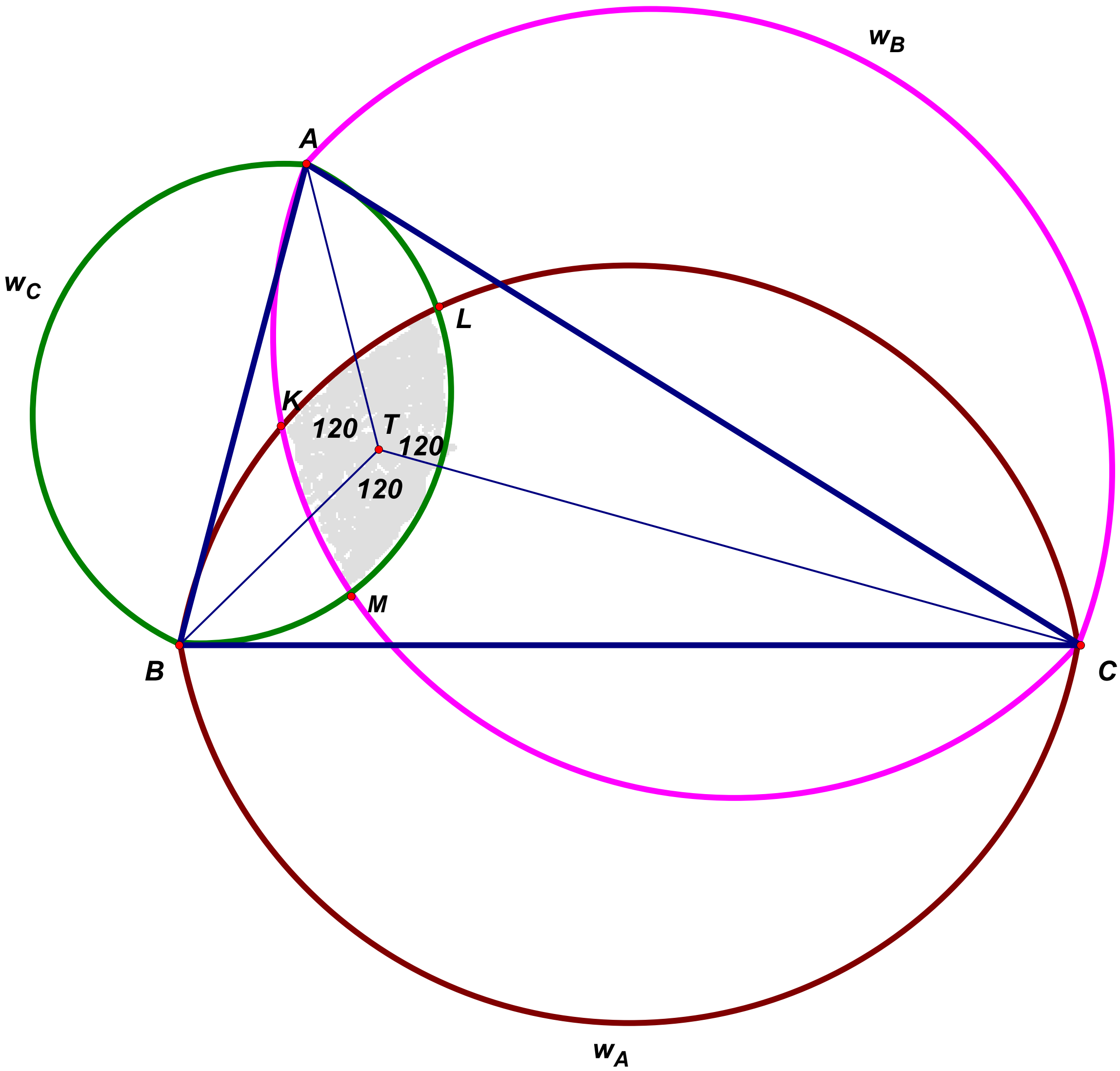


Осталось доказать, что из треугольников *ABC, ABZ, BCX, ACY* можно склеить тетраэдр, т.е. что хотя бы в одной из вершин *A, B, C* угол треугольника *ABC* меньше суммы примыкающих к той же вершине углов двух других треугольников. Если это не так, то $\angle A + \angle B + \angle C \geq 3\pi - 3\varphi > 3\pi - 3\cdot\dfrac{2\pi}{3} = \pi$ - противоречие.

(*Мы воспользовались известной теоремой стереометрии: три плоских углов с общей вершиной образуют трехгранный угол тогда и только тогда, когда любой из них меньше суммы двух других*).

Второй способ.
(*Печёнкин Николай,* г. Москва, школа № 192)
Для каждого из отрезков *AB, BC* и *CA* построим на плоскости множество точек, из которых эти отрезки видны под углом φ - получим 6 дуг. Для *BC* пусть это множество ω_A, для *AC* - ω_B и для *AB* - ω_C. *K, L, M* - точки пересечения этих множеств.

Очевидно, существует область, лежащая внутри всех трех областей с границами из двух дуг (этой области, например, принадлежит точка *Ферма-Торичелли,* из которой все стороны треугольника видны под углом $\frac{2\pi}{3}$).



Понятно, что M лежит в области, ограниченной ω_A , L – ω_B , а K – ω_C .
Далее, множество точек пространства, из которых отрезок BC виден под углом φ - поверхность, получающаяся при вращении ω_A относительно BC. Обозначим ее F_A .
Аналогично получим еще две поверхности - F_B, F_C . Пересечением F_A и F_B будет некоторая непрерывная кривая, проходящая через C и K, причем K лежит внутри тела, ограниченного F_C , а C – вне его. Значит, линия пересечения F_A и F_B будет также пересекать и F_C .