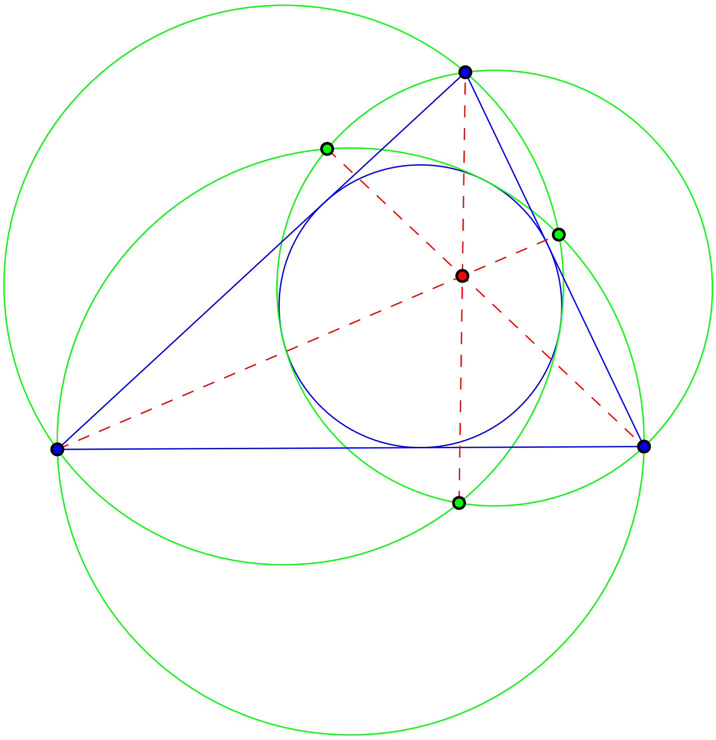
Step by Step

Данный сюжет посвящен решению задачи Фёдора Ивлева с олимпиады "Romanian Master of Mathematics & Sciences".



1. а) Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D, DM – её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K. Докажите, что $AK = DC$.

б) В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр I вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MI, которая пересекает высоту AH в точке E. Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

в) В неравнобедреном треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, I_c — центр окружности, касающейся стороны AB и продолжений сторон CB и CA ; L и L' — точки, в которых сторона AB касается этих окружностей. Докажите, что прямые IL' , I_aL и высота CH треугольника ABC пересекаются в одной точке.

2 (IMO-shortlist, 2002). The incircle ω of ABC touches its side BC in K. Let M be the midpoint of the altitude AD in ABC, and let the line KM meet ω for the second time in N . Show that the circumcircle of BCN touches ω.

а) Пусть L – точка касания вневписанной окружности; I_a — её центр; P – четвёртая вершина прямоугольника KLI_aP. Тогда $BK \cdot KC = IK \cdot KP$;

б) $IK \cdot KP = OK \cdot KN$, где O — центр прямоугольника ;

в) точка O лежит на описанной окружности треугольника BCN;

г) O — середина дуги BOC;

д) используя лемму Архимеда наоборот, докажите касание нужных окружностей.

3 (Ф. Ивлев). Let ABC be a triangle and let I and O denote its incentre and circumcentre respectively. Let ω_a be the circle through B and C which is tangent to the incircle of the triangle; the circles ω_b and ω_c are defined similarly. The circles ω_b and ω_c meet at a point A' distinct from

A ; the points B' and C' are defined similarly. Prove that the lines AA', BB', CC' are concurrent at a point on the line IO.

Пусть A'' точка касания вписанной окружности и окружности ω_a, B'', C'' — аналогично; I_a, I_b, I_c — excenters; T_a, T_b, T_c — точки касания вписанной со сторонами.

а) $A''T_a$ проходит через I_a;

б) прямые I_aT_a, I_bT_b, I_cT_c конкурентны;

в) пусть $A''T_a$ пересекает ω_a в точке P_a; аналогично определим точки P_b, P_c. Тогда $P_aP_b||T_aT_b$, т.е. $\triangle P_aP_bP_c$ гомотетичен $\triangle T_aT_bT_c$ с центром в точке Q.

г) прямые $A''T_a$, $B''T_b$, CC' конкурентны;

д) покажите, что O — центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$.

4. Найдите что-нибудь ещё в этой конструкции.