

Факт №1. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 1).

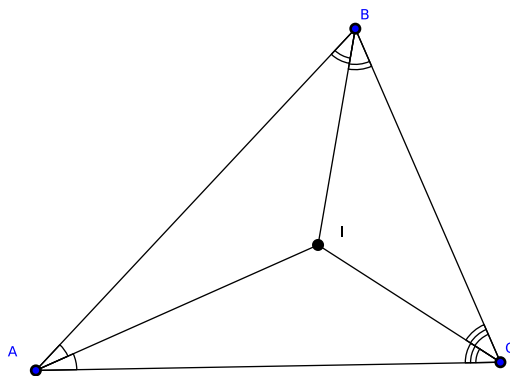


Рис. 1

Этот факт известен, начиная с 7-го класса. Почему-то аналогичное утверждение с участием внешних биссектрис является куда менее популярным.

Факт №2. Внешние биссектрисы при вершинах A, C и биссектриса угла B пересекаются в одной точке (рис. 2).

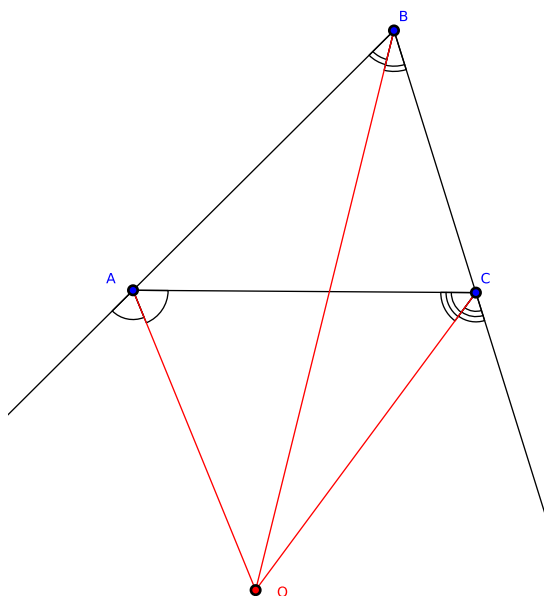
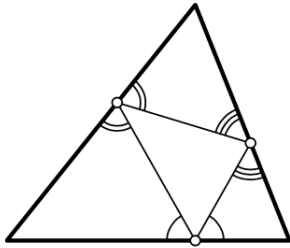


Рис. 2

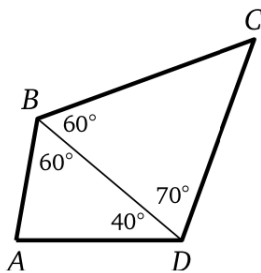
Решения ряда задач основано на такой идее: нужно найти из условия биссектрису внешнего угла при вершине A, биссектрису угла B. Пусть они пересекаются в точке Q. Тогда CQ является биссектрисой внешнего угла при вершине C (по факту №2!). Именно последнее наблюдение часто оказывается решающим.

1. Один из углов треугольника равен 120° . Докажите, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.
2. Биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M, биссектрисы B_1B_2 и C_1C_2 треугольника AB_1C_1 пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

3. Все углы пятиугольника $ABCDE$ равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам AB и CD пересекаются на биссектрисе угла E .
4. В треугольнике ABC $\angle B = 100^\circ$. В этом треугольнике проведена биссектриса угла C , пересекающая AB в точке E , а на стороне AC взята точка D так, что $\angle CBD = 20^\circ$. Докажите, что $\angle CED = 10^\circ$.
5. На сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ выбираются точки Q и P соответственно так, что $\angle ABQ = 15^\circ$, $\angle PQD = 30^\circ$. Найдите угол QBP .
6. На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.



7. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$, $\angle ADB = 40^\circ$, а $\angle BDC = 70^\circ$. Найдите угол между его диагоналями.



8. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны 15° и 30° . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?
9. Точка E на стороне AD квадрата $ABCD$ такова, что $\angle AEB = 60^\circ$. Биссектриса угла ABE , отразившись от стороны AD , пересекает отрезок BE в точке F . Докажите, что точка F лежит на диагонали квадрата.
10. На полосу наложился квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом 45° .
11. На сторонах AB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M соответственно, а на диагонали AC — точка L так, что $ML = KL$. Пусть P — точка пересечения отрезков MK и BD . Найдите угол KPL .