

**Факт №1.** Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 1).

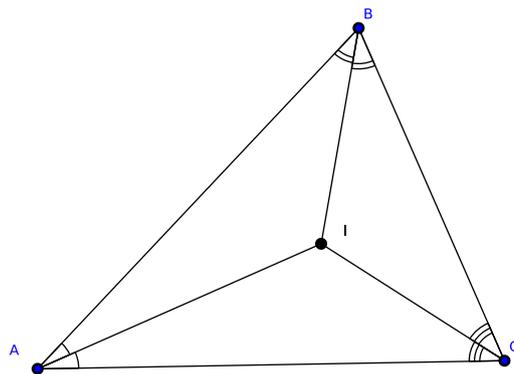


Рис. 1

Этот факт известен, начиная с 7-го класса. Почему-то аналогичное утверждение с участием внешних биссектрис является куда менее популярным.

**Факт №2.** Внешние биссектрисы при вершинах A, C и биссектриса угла B пересекаются в одной точке (рис. 2).

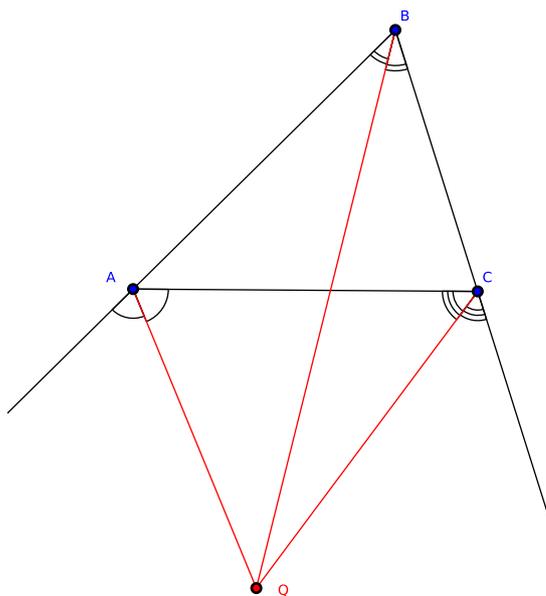
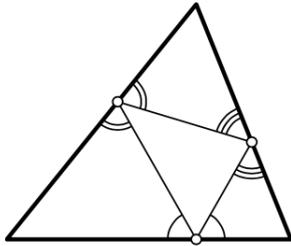


Рис. 2

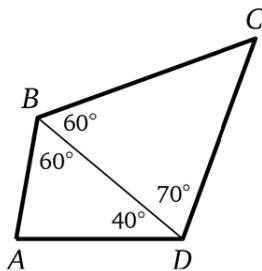
Решения ряда задач основано на такой идее: нужно найти из условия биссектрису внешнего угла при вершине A, биссектрису угла B. Пусть они пересекаются в точке Q. Тогда CQ является биссектрисой внешнего угла при вершине C (по факту №2!). Именно последнее наблюдение часто оказывается решающим.

1. Один из углов треугольника равен  $120^\circ$ . Докажите, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.
2. Биссектрисы  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке M, биссектрисы  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$  треугольника  $AB_1C_1$  пересекаются в точке N. Докажите, что точки A, M и N лежат на одной прямой.

3. Все углы пятиугольника  $ABCDE$  равны. Докажите, что серединные перпендикуляры к отрезкам  $AB$  и  $CD$  пересекаются на биссектрисе угла  $E$ .
4. В треугольнике  $ABC$   $\angle B = 100^\circ$ . В этом треугольнике проведена биссектриса угла  $C$ , пересекающая  $AB$  в точке  $E$ , а на стороне  $AC$  взята точка  $D$  так, что  $\angle CBD = 20^\circ$ . Докажите, что  $\angle CED = 10^\circ$ .
5. На сторонах  $AD$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбираются точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $\angle ABQ = 15^\circ$ ,  $\angle PQD = 30^\circ$ . Найдите угол  $QBP$ .
6. На сторонах треугольника выбраны три точки так, что отмеченные на рисунке углы равны. Докажите, что данные точки — основания высот треугольника.



7. Дан четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$ ,  $\angle ADB = 40^\circ$ , а  $\angle BDC = 70^\circ$ . Найдите угол между его диагоналями.



8. Углы, прилежащие к одной из сторон треугольника, равны  $15^\circ$  и  $30^\circ$ . Какой угол образует с этой стороной проведенная к ней медиана?
9. Точка  $E$  на стороне  $AD$  квадрата  $ABCD$  такова, что  $\angle AEB = 60^\circ$ . Биссектриса угла  $ABE$ , отразившись от стороны  $AD$ , пересекает отрезок  $BE$  в точке  $F$ . Докажите, что точка  $F$  лежит на диагонали квадрата.
10. На полосу наложился квадрат, сторона которого равна ширине полосы, так, что его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом  $45^\circ$ .
11. На сторонах  $AB$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  взяты точки  $K$  и  $M$  соответственно, а на диагонали  $AC$  — точка  $L$  так, что  $ML = KL$ . Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $MK$  и  $BD$ . Найдите угол  $KPL$ .