

Вписанная окружность: прямоугольный треугольник

-1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Найдите радиус r вписанной окружности треугольника.

0. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей.

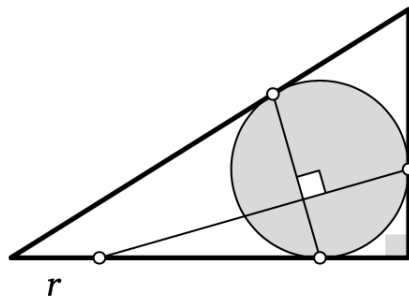
1. Известно, что в треугольнике $r = p - c$. Докажите, что треугольник является прямоугольным.

2. Пусть CH — высота прямоугольного треугольника ABC , проведённая из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH , BCH и ABC , равна CH .

3. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

4. В прямоугольном треугольнике на гипотенузе AB от вершины A отложен отрезок AD , равный катету AC , а от вершины B — отрезок BE , равный катету BC . Докажите, что длина отрезка DE равна диаметру окружности, вписанной в треугольника ABC .

5 (ММО). В прямоугольный треугольник вписана окружность. Через точку ее касания с катетом проведена прямая, перпендикулярная хорде, соединяющей две другие точки касания. Эта прямая разбивает второй катет на два отрезка. Докажите, что меньший из них равен радиусу данной окружности.

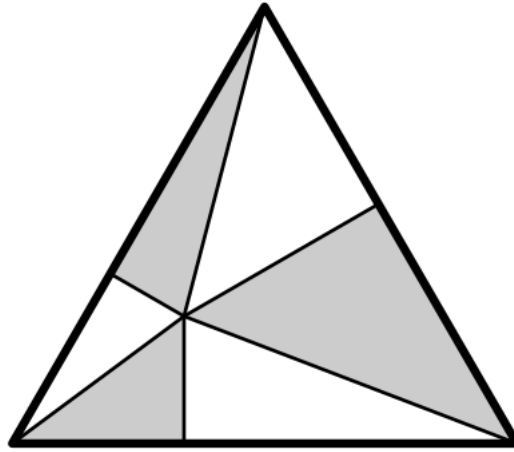
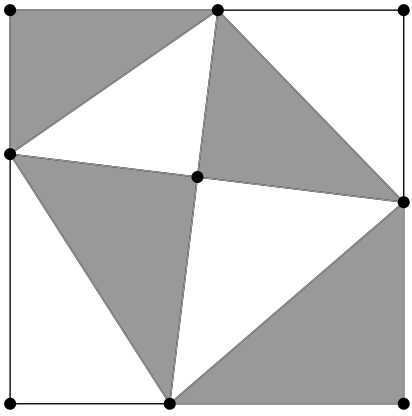


6. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C провели биссектрисы AK и BN , на которые опустили перпендикуляры CD и CE из вершины прямого угла. Докажите, что длина отрезка DE равна радиусу вписанной окружности.

7. Отрезок AB делит квадрат на две части, в каждую из которых можно вписать окружность. Радиусы этих окружностей равны r_1 и r_2 , причём $r_1 > r_2$. Найдите AB .

Задачи Произволова В. В.

8. Четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями вписан в квадрат. Диагонали и стороны четырёхугольника разделили квадрат на 8 треугольников, попеременно окрашенных в серый и белый цвет. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в серые треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в белые треугольники.



9. Точка равностороннего треугольника соединена отрезками с его вершинами, а также из неё опущены перпендикуляры на его стороны. Названные отрезки разрезали равносторонний треугольник на шесть прямоугольных треугольников — белые и серые через один. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в белые треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в серые треугольники.

10. В квадрат со стороной 1 вписан четырёхугольник. Его стороны являются гипотенузами четырёх прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность. Докажите, что сумма радиусов этих окружностей не превосходит $2 - \sqrt{2}$ и достигает этого числа лишь тогда, когда стороны вписанного четырёхугольника параллельны диагоналям квадрата.