Для Учителей

На этом занятии мы на новом, тригонометрическом, языке повторяем известные уже из прошлых занятий соотношение. С одной стороны, ребята привыкают к тому, что синусы и косинусы бывают не только в прямоугольных треугольника ☺, с другой стороны, к финалу занятия мы добираемся до формулы Герона.

Напомним классические обозначения из геометрии треугольника.

$AB = c$, $BC = b$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$;
r — радиус вписанной окружности, r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон BC, AC, AB, соответственно

Докажите, следующие тождества.

1. $a = r(\operatorname{ctg}(\beta/2) + \operatorname{ctg}(\gamma/2))$.

2. $a = r_a(\operatorname{tg}(\beta/2) + \operatorname{tg}(\gamma/2))$.

3. $p - b = r\operatorname{ctg}(\beta/2)$.

4. $p - b = r_a tg(\gamma/2)$.

5. $p = r_a \operatorname{ctg}(\alpha/2)$.

6. $rp = r_a(p - a)$.

7. $rr_a = (p - b)(p - c)$.

8. $r_b r_c = p(p - a)$.

9. *(формула Герона) Докажите, что площадь S треугольника можно выражается через длины сторон следующим образом:*

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

.

10 (ММО-2024). *Дан описанный четырехугольник $ABCD$ с тупым углом ABC. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи DA и CB — в точке Q. Докажите, что $|AD - CD| \geqslant |r_1 - r_2|$, где r_1 и r_2 — радиусы вписанных окружностей треугольников PBC и QAB.*