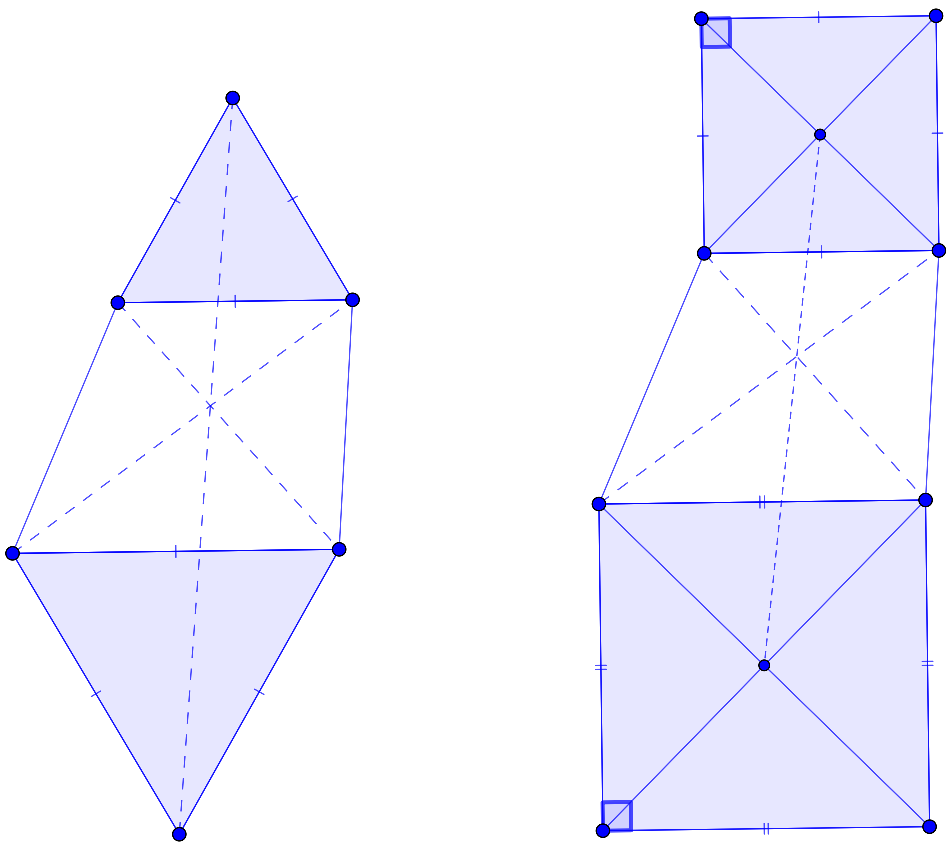
Основная идея. Мы хотим посмотреть возможности гомотетии в задачах на доказательство, когда однократное выполнение гомотетии сразу же решает задачу.

Гомотетией называют преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X', такую, что $\overrightarrow{OX'} = k\overrightarrow{OX}$ (точка O и число k фиксированы). Точку O называют *центром гомотетии*, а число k – *коэффициентом гомотетии*.

Гомотетию с центром O и коэффициентом k будем обозначать H_O^k.

1 (**Турнир Городов).** Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM образуют квадрат.

2. Придумайте два утверждения про трапеции по рисункам ниже и докажите их.



3. Пусть медианы треугольника ABC пересекаются в точке M. Выполним гомотетию в центром в точке M и коэффициентом -$\frac{1}{2}$.

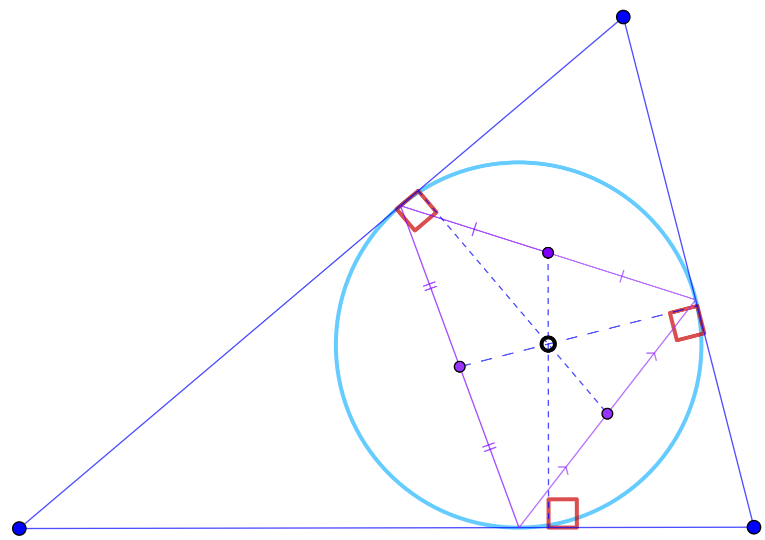
а) В какую точку на стороне AC перейдёт вершина B?

б) В какую прямую перейдёт высота из вершины B треугольника ABC?

в) В какую точку перейдёт ортоцентр треугольника ABC?

г) Какую теоремы вы доказали, решив пункты а) - в)?

4 (🏠). На рисунке ниже изображена задача. Сформулируйте её и решите.



5 (🏠). Медианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M; P – произвольная точка. Прямая ℓ_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1; прямые ℓ_b и ℓ_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) прямые ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c пересекаются в одной точке Q;

б) точка M лежит на отрезке PQ, причём $PM : MQ = 1 : 2$.

6 (🏠). а) По рисункам ниже вспомните(узнайте) свойства ортоцентра треугольника.

б) Теперь давайте выполним гомотетию с центром в ортоцентре и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Какой факт вы доказали, выполнив такую гомотетию?