

# ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Мы покажем, как можно находить площадь треугольника, и предложим вам подумать над задачами, где потребуются это умение применить. Как обычно, к некоторым задачам указания или решения даны сразу после их условий, а к некоторым – в конце журнала.

Рассмотрим сначала треугольники, расположенные на квадратной сетке.

**Задача 1.** Найдите площади четырёх треугольников, изображённых на рисунке 1.

Ниже приводится решение, но сначала попробуйте решить задачу самостоятельно.

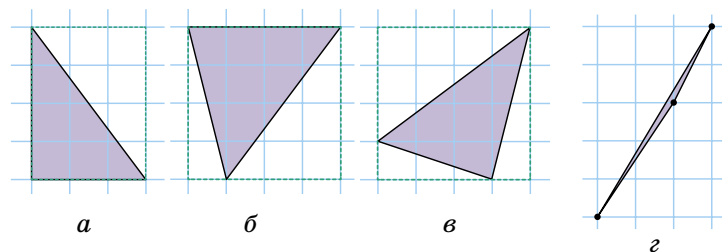


Рис. 1

а) Этот треугольник – половина прямоугольника (рис. 2, а). Значит, нужно найти площадь прямоугольника и поделить её пополам. А чтобы её найти, надо перемножить его стороны. Ответ:  $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ .

б) Проведём в треугольнике высоту (рис. 2, б). Она делит его на два прямоугольных треугольника. Их площади найдём как в пункте а). Ответ:  $\frac{1 \cdot 4}{2} + \frac{3 \cdot 4}{2} = 8$ .

в) Здесь такое решение, как в пункте б), не работает, потому что ни одна высота треугольника не идёт по линии сетки. Поступим по-другому: достроим треугольник до прямоугольника и найдём площади построенных прямоугольных треугольников (рис. 2, в). Затем из площади прямоугольника вычтем площади добавленных частей. Ответ:  $4 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{3 \cdot 1}{2} - \frac{1 \cdot 4}{2} = 6,5$ .

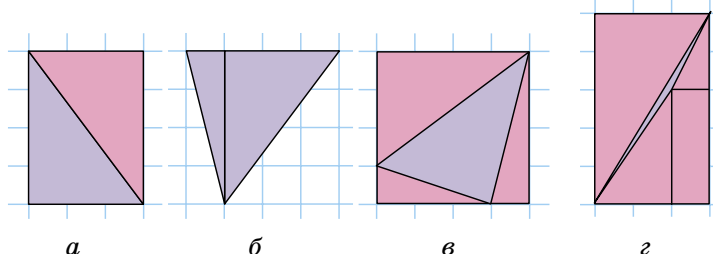


Рис. 2

г) Снова достроим треугольник до прямоугольника. Добавленная область разрезается на прямоугольник и три прямоугольных треугольника (рис. 2,з).  
 Ответ:  $3 \cdot 5 - 3 - \frac{3 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} = 0,5$ .

**Задача 2.** Найдите площадь многоугольника, изображённого на рис. 3.

Попробуйте решить задачу без скучных подсчётов. Такое решение есть!

**Задача 3.** Квадрат на рисунке 4 разрезан на восемь треугольников. Какие из них самые большие по площади?

Сначала можно найти площади прямоугольных треугольников. Теперь можно найти площадь соседних с ними, как в решении задачи 1...

**Задача 4.** Если одну клетку разрезать по диагонали, получится треугольник площадью  $\frac{1}{2}$ . У треугольника на рисунке 1,г площадь тоже  $\frac{1}{2}$ . А сколько всего различных треугольников с вершинами в узлах сетки и площадью  $\frac{1}{2}$ ?

Заметьте, что не нужно находить *все* такие треугольники – в задаче спрашивается, сколько их.

**Задача 5.** Нарисуйте шестиугольник с вершинами в узлах сетки, у которого все стороны длиннее 4, а площадь не больше 2.

В любом шестиугольнике можно провести диагонали так, чтобы он распался на 4 треугольника. Видимо, эти треугольники должны быть длинными, но маленькими по площади...

**Задача 6\*.** Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целым числом или целым числом, делённым на 2. (В частности, треугольников площадью меньше  $\frac{1}{2}$  не бывает.)

На этом закончим изучение фигур на квадратной сетке и рассмотрим произвольный треугольник, не обязательно с вершинами в узлах. Его площадь можно найти по формуле  $S = \frac{1}{2} ah$ , где  $a$  – длина стороны треугольника, а  $h$  – длина высоты, проведённой к этой стороне.

Доказательство формулы похоже на решения пунктов а) и б) задачи 1. Для начала вспомним, что пло-

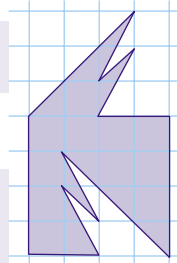


Рис. 3

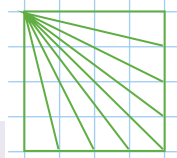
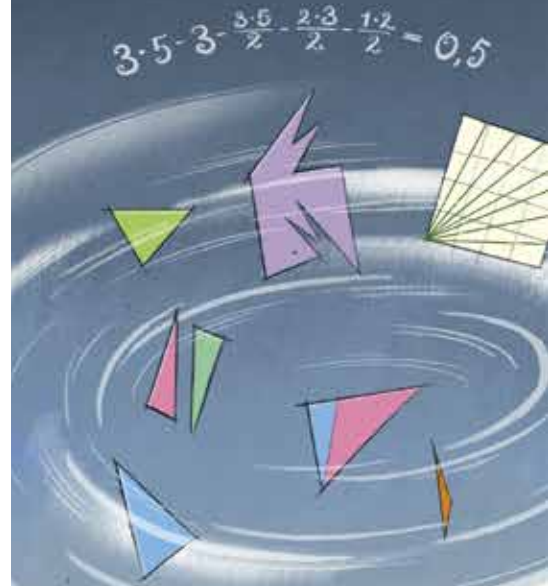


Рис. 4





щадь произвольного (не обязательно клетчатого) прямоугольника равна произведению длин его сторон.

Отсюда сразу следует справедливость формулы, если высота  $h$  треугольника совпадает с одной из его сторон (рис. 5, а): ведь тогда наш треугольник – половина прямоугольника со сторонами  $h$  и  $a$ .

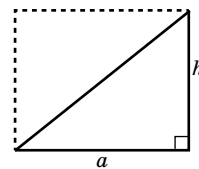


Рис. 5, а

Если же высота  $h$  лежит внутри (рис. 5, б) или снаружи (рис. 5, в) треугольника, то его площадь получается соответственно как сумма или как разность площадей двух прямоугольных треугольников с основанием  $b$  (выделен красным) и основанием  $c$  (выделен синим), для которых формула верна. В первом

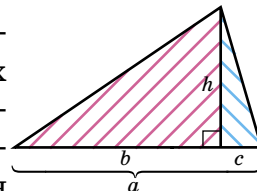


Рис. 5, б

случае  $a = b + c$  и  $S = \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}ah$ , а во втором  $a = b - c$  и  $S = \frac{1}{2}bh - \frac{1}{2}ch =$

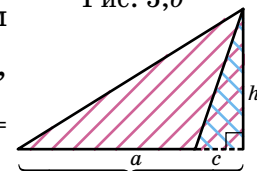


Рис. 5, в

$$= \frac{1}{2} ah.$$

Итак, формула доказана!

Заметим, что с помощью формулы можно дать такое решение задачи 3: у всех этих треугольников есть сторона, равная 1, а высота, проведённая к ним, равна 4 (она проходит по стороне квадрата). Поэтому площадь каждого из них равна  $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$ .

**Задача 7.** Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника одинаковой площади (рис. 6).

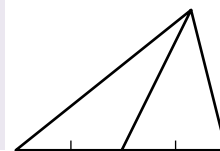


Рис. 6

Здесь можно применить формулу площади треугольника. Для этого надо сначала провести высоту.

**Задача 8\*.** На сторонах треугольника построили квадраты и соединили их вершины, как на рисунке 7. Докажите, что у четырёх закрашенных треугольников одинаковая площадь.

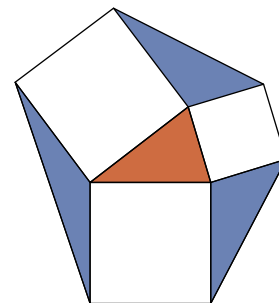


Рис. 7

Хоть здесь и не видно медиан, но в решении этой задачи помогает предыдущая!