Расстояния на сфере

С.КУЗНЕЦОВ

«Доброе утро, говорит командир воздушного судна. Наш самолет сегодня выполняет рейс №100 по маршруту Москва – Нью-Йорк...» Заглянем в справочник: широта Москвы 55°45′, Нью-Йорка 40°43′. Казалось бы, нужно лететь на юго-запад – однако самолет уверенно забирает к северу: под крылом Санкт-Петербург, Балтийское море, Скандинавия...

Разгадка проста: Земля не плоская, и линия, проведенная по линейке на карте (*локсодромия*), не будет самой короткой на глобусе. Рассмотрим, например, две точки на широте 45°, между которыми 180° долготы. Если лететь по 45-й параллели (прямая линия по карте), придется преодолеть расстояние $\pi r = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} R_\oplus$, где r – радиус параллели, $R_\oplus$ – радиус Земли. Если же лететь через полюс, то мы пролетим четверть круга радиуса $R_\oplus$, т.е. $\frac{1}{2}\pi R_\oplus$ – почти в полтора раза меньше ($\sqrt{2} \approx 1,41$). Недаром знаменитый советский летчик Валерий Чкалов избрал именно этот опасный полярный маршрут (рис.1) для перелета из Москвы (55°45′ с.ш., 37°37′ в.д.) в американский Ванкувер (45°38′ с.ш., 122°36′ з.д.).

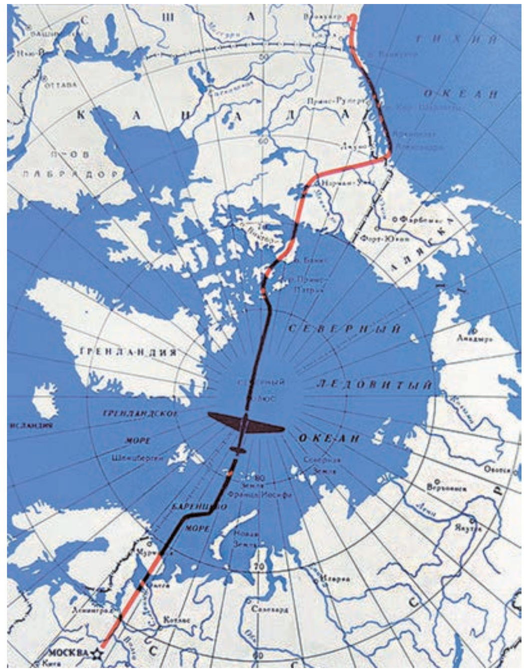

Рис. 1

Самый короткий путь на сфере – это дуга *большого круга*, т.е. окружности, которая получается при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр. Всякий меридиан есть дуга (точнее, половина) большого круга, а вот среди параллелей такой чести удостоился лишь экватор.

А как вычислить расстояние по этой кратчайшей линии, если известны географические координаты двух пунктов P и Q? Пусть между ними β градусов долготы, а широты их равны α_1 и α_2 (обе точки в северном полушарии). Проведем через эти точки меридианы, они пересекутся в полюсах N и S (рис.2). Треугольник NPQ составлен из дуг больших кругов; их длины удобно измерять *угловой мерой*: 1 градус составляет 1/360 от полного круга. Перейти от угловой меры к километрам очень просто: дуга в γ градусов имеет длину $\frac{\gamma}{360°} \cdot 2\pi R_\oplus$.

В угловой мере стороны NP и NQ равны α_1 и α_2; угол при вершине N равен β. Нужно найти сторону PQ. На плоскости мы бы воспользовались теоремой косинусов. Есть ли такая теорема на сфере?

Вспомним, откуда берется плоская теорема косинусов. Посмотрим на рисунок 3 и

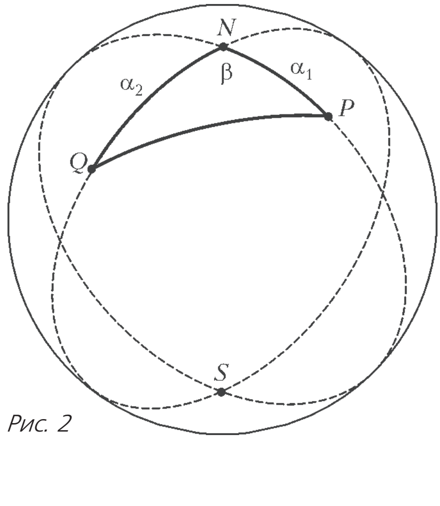

Рис. 2

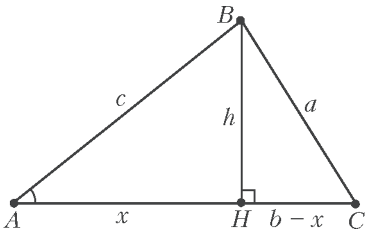

Рис. 3

применим дважды теорему Пифагора:

$$\begin{cases} a^2 = h^2 + (b-x)^2, \\ c^2 = h^2 + x^2, \end{cases}$$

откуда следует $a^2 - c^2 = b^2 - 2bx$. Поскольку $x = c\cos\angle A$, получаем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A.$$

Итак, нам нужны два ингредиента: аналог теоремы Пифагора и аналог соотношения, выражающего косинус, для прямоугольного треугольника на сфере.

Пусть в ΔABC на сфере угол C прямой, а $\angle A = \alpha$; угловые меры катетов BC и AC и гипотенузы AB равны a, b и c соответственно. Повернем сферу так, чтобы точка A оказалась Южным полюсом. Для простоты считаем, что точки B и C тоже находятся южнее экватора. Совершим центральную проекцию[1] (рис.4) – точки B и C перейдут в B_1 и C_1. Пирамида OAB_1C_1 изобилует прямыми углами:

$$\angle AC_1B_1 = \angle OC_1B_1 = \angle OAC_1 = \angle OAB_1 = 90^\circ$$

(докажите это!). В частности, сохранился прямой угол при вершине C. Значит, $\cos\angle A = AC_1/AB_1$ (сам угол при вершине A

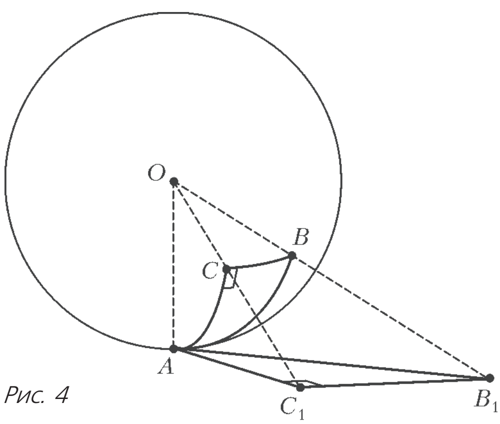

Рис. 4

[1] Заметим, что эта же проекция использовалась на карте на рисунке 1.

и на сфере, и на касательной плоскости имеет ту же величину). Поскольку $AC_1 = OA\,\mathrm{tg}\,b$ и $AB_1 = OA\,\mathrm{tg}\,a$, получаем $\cos\angle A = \mathrm{tg}\,b/\mathrm{tg}\,a$: на сфере, чтобы узнать косинус угла, надо делить не катет на гипотенузу, а тангенс катета на тангенс гипотенузы. Легко получить и соотношение на катеты и гипотенузу, заменяющее здесь теорему Пифагора:

$$OB_1\cos c = OA = OC_1\cos b = OB_1\cos a\cos b,$$

откуда

$$\cos a\cos b = \cos c.$$

Теперь мы готовы вывести сферическую теорему косинусов. Посмотрим еще раз на рисунок 3 и вообразим, что дело происходит на сфере:

$$\begin{cases} \cos a = \cos h\cos(b-x), \\ \cos c = \cos h\cos x. \end{cases}$$

Если $\cos x \neq 0$, можно избавиться от $\cos h$; вместо формулы квадрата разности нам теперь пригодится формула косинуса разности:

$$\cos a = \frac{\cos c}{\cos x}(\cos b\cos x + \sin b\sin x) =$$
$$= \cos b\cos c + \sin b\cos c\,\mathrm{tg}\,x.$$

Наконец, $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,c\cos\angle A$, откуда

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\angle A.$$

Эта формула не очень похожа на плоскую теорему косинусов[2], однако ее работу успешно выполняет. Вернемся к ΔNPQ: в нем $\cos PQ = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\beta$. Для Москвы и Нью-Йорка $\alpha_1 \approx 35^\circ$, $\alpha_2 \approx 50^\circ$, $\beta \approx 111^\circ$, откуда $\cos PQ \approx 0{,}37$, угловая мера дуги PQ примерно равна $68{,}28^\circ$, а расстояние между городами равно примерно 7600 км.

Наш результат не вполне точен, потому что поверхность Земли не совсем сферическая. Вращение вокруг оси сжимает планету к плоскости экватора; влияет на ее форму и

[2] На самом деле, плоская теорема косинусов получается как предельный случай сферической: если угловая мера дуги x мала, то $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, и после подстановки и отбрасывания малых слагаемых получается как раз обычная теорема косинусов (а из соотношения $\cos c = \cos a\cos b$ в прямоугольном треугольнике получается теорема Пифагора).

неравномерное распределение суши и океанов. Современная наука говорит, что Земля имеет форму *геоида* (переводя с греческого: форму тела, похожего на Землю). При нашем вычислении погрешность составила около 100 км, т.е. меньше 1,5%.

Упражнения

1. Вычислите расстояние по дуге большого круга между Берлином (52°31′ с.ш., 13°23′ в.д.) и Сиднеем (33°52′ ю.ш., 151°12′ з.д.).

2. В доказательстве сферической теоремы косинусов мы опустили многие случаи: когда высота попадает на продолжение стороны; когда $\cos x = 0$; когда вершины прямоугольного треугольника оказываются в разных полушариях. Восстановите рассуждения для этих случаев.

3. Докажите, что в прямоугольном треугольнике на сфере $\sin\angle A = \frac{\sin a}{\sin c}$. Выведите отсюда сферический аналог теоремы синусов.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Задачи

Мы завершаем очередной этап конкурса по решению математических задач. Конкурс возобновится в следующем учебном году. Задания появятся в сентябре и будут опубликованы в «Кванте» №9.

Задачи рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: savin.contest@gmail.com или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы.

Желаем успеха!

24. В волшебном дворце обитают прекрасные феи. Каждый день у всех фей, кроме одной, улучшается и обаятельность, и привлекательность, а у оставшейся феи – только одно из этих качеств (а другое может и ухудшиться). Однако за последний год все феи совершенно не изменились. Каково наибольшее возможное число фей во дворце? (В году 365 дней.)

А.Канель-Белов

25. Из круга можно вырезать четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны a и c, а две другие – b и d. Толик Втулкин утверждает, что тогда из этого круга можно вырезать и четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны a и b, а две другие – c и d. Прав ли Толик? Решите задачу в случаях, когда исходный четырехугольник: а) вписан в данный круг (вершины четырехугольника лежат на границе круга); б) не обязательно вписан, но выпуклый (диагонали лежат внутри четырехугольника); в) может быть невыпуклым (одна из диагоналей может лежать снаружи четырехугольника).

С.Дворянинов

26. Ладья должна пройти из левого нижнего угла шахматной доски в правый верхний ровно за 6 ходов. При этом она может сдвигаться только вправо или вверх, а ходы вверх и вправо должны чередоваться. Найдите количество возможных маршрутов ладьи.

П.Кожевников

27. Докажите, что для всех натуральных n число $\frac{1}{3}\left(4^{4n+1} + 4^{3n+1} + 1\right)$ является составным.

В.Расторгуев

Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».