

Основной факт

Можно ли решить сложную, олимпиадную задачу, обладая знаниями, не выходящими за рамки программы первого полугодия 8 класса? И не зная специальных, «олимпиадных» фактов и приемов? Оказывается, во многих случаях достаточно хорошо владеть обычным, «школьным» материалом.

Рассмотрим простую задачу.

0. Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Найдите угол ACO , если $\angle ABC = \alpha$.

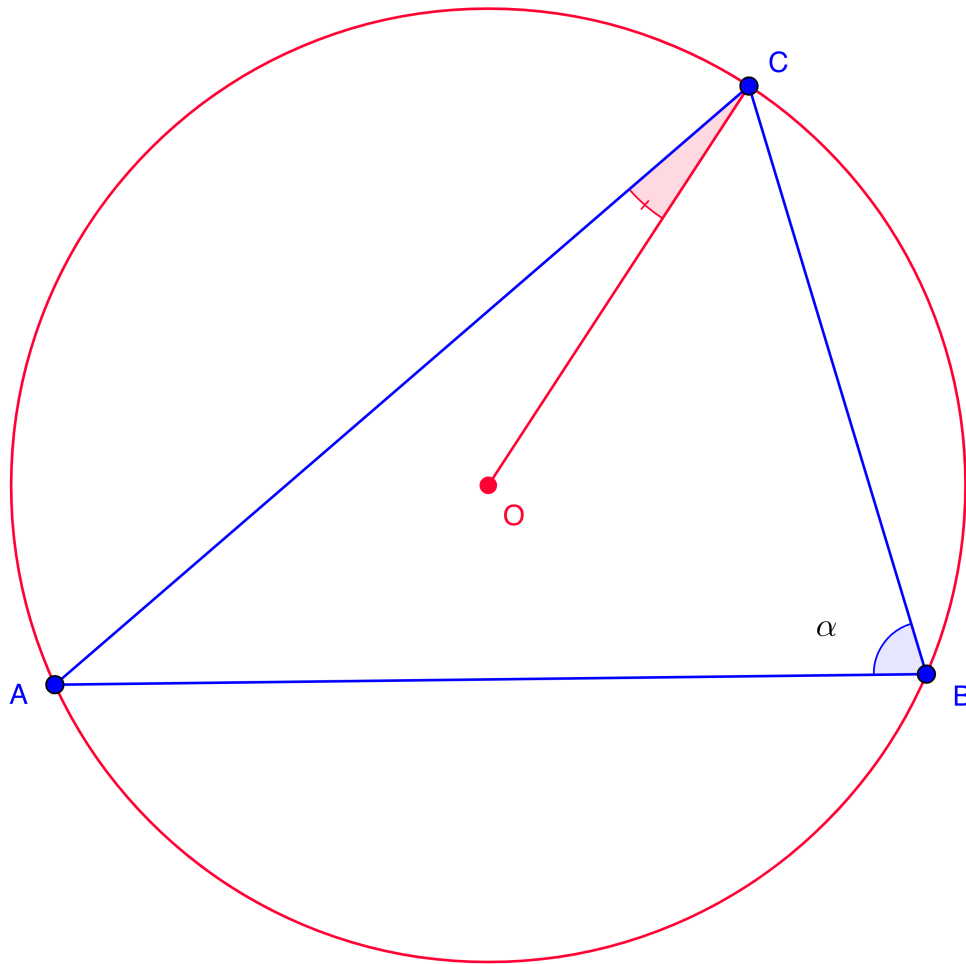


Рис. 1: Формулировка основного факта

Ну и что здесь может быть интересного? — спросит читатель. Действительно, вписанный угол равен половине центрального, опирающегося на ту же дугу (рис. 2),

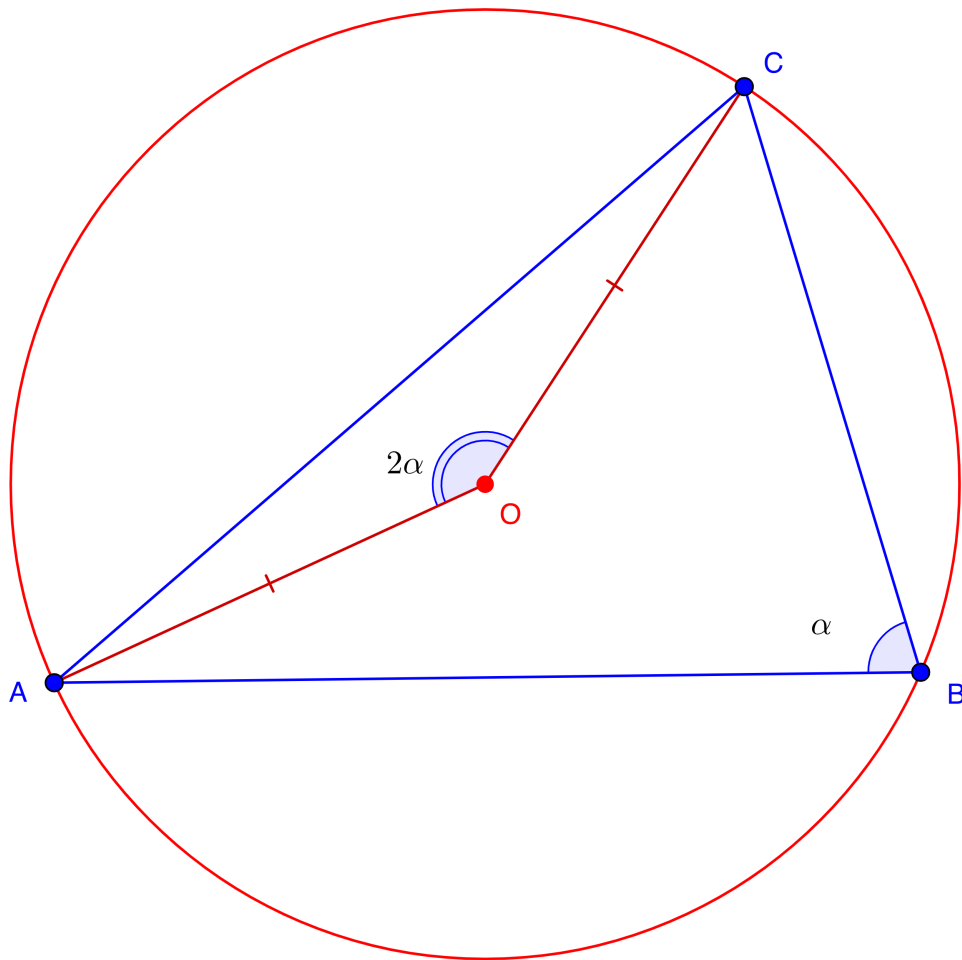


Рис. 2: Доказательство основного факта

то есть если $\angle ABC = \alpha < 90^\circ$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$, откуда $\angle ACO = 90^\circ - \alpha$. $\square$

Просто? – Конечно! Но это и есть *основной факт* нашей статьи, благодаря которому мы сможем решить несколько трудных задач. В дальнейшем мы его будем называть *угол между радиусом и стороной*. Итак,

[Основной факт] Пусть O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC . Тогда $\angle ACO = 90^\circ - \angle ABC$ (рис. 3).

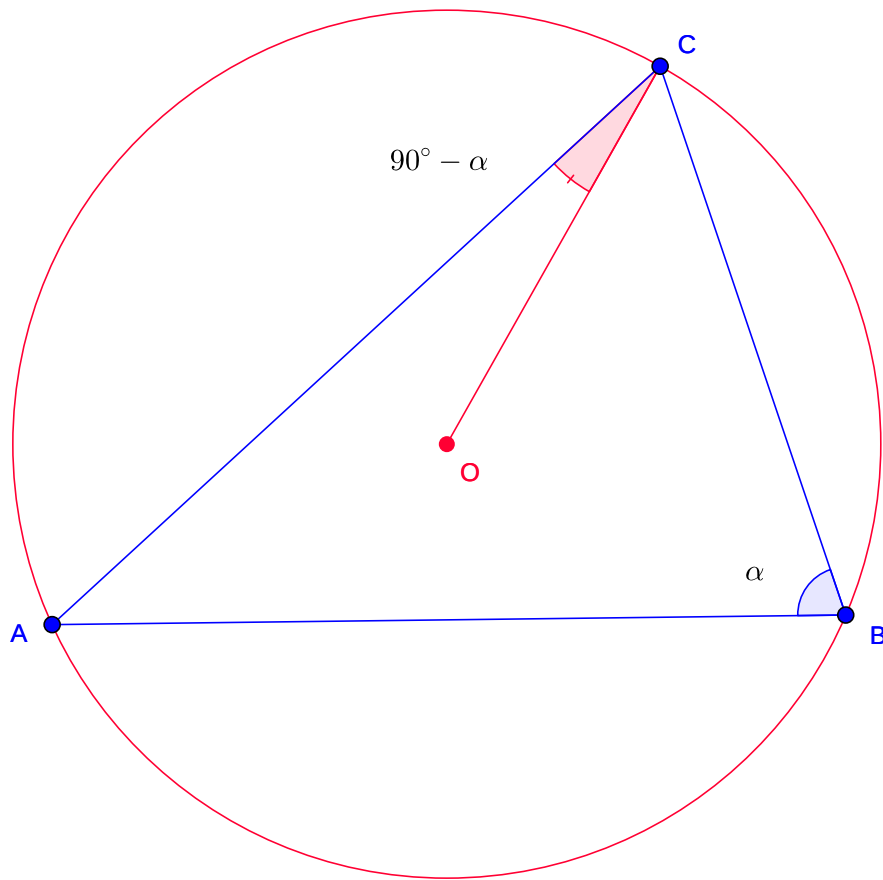


Рис. 3: Основной факт

Упражнение 1. Восстановите по рисунку 4 другое доказательство основного факта.

Упражнение 2. Как поменяется основное утверждение в случае тупого угла ABC ?

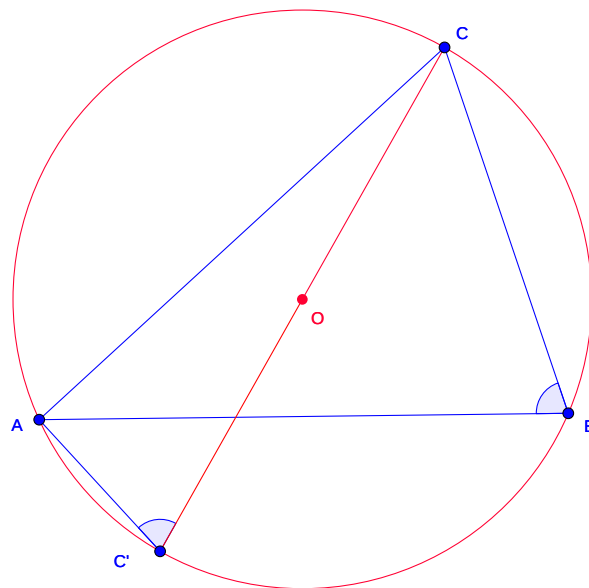


Рис. 4: Другое доказательство основного факта

Как же можно использовать этот факт? Дело в том, что он указывает на *расположение* центра окружности, описанной около треугольника. В школьном курсе обычно доказывается, что центр описанной окружности треугольника равноудален от его вершин, то есть лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. Но, если фиксирован, например, угол B треугольника ABC , то центр описанной окружности также лежит на прямой, которая составляет фиксированный угол со стороной AC .

Рассмотрим следующую задачу.

1. Биссектриса AL пересекает описанную окружность равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) в точке W ; точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC . Докажите, что центр описанной окружности треугольника $I BW$ лежит на стороне BC . (рис. 5)

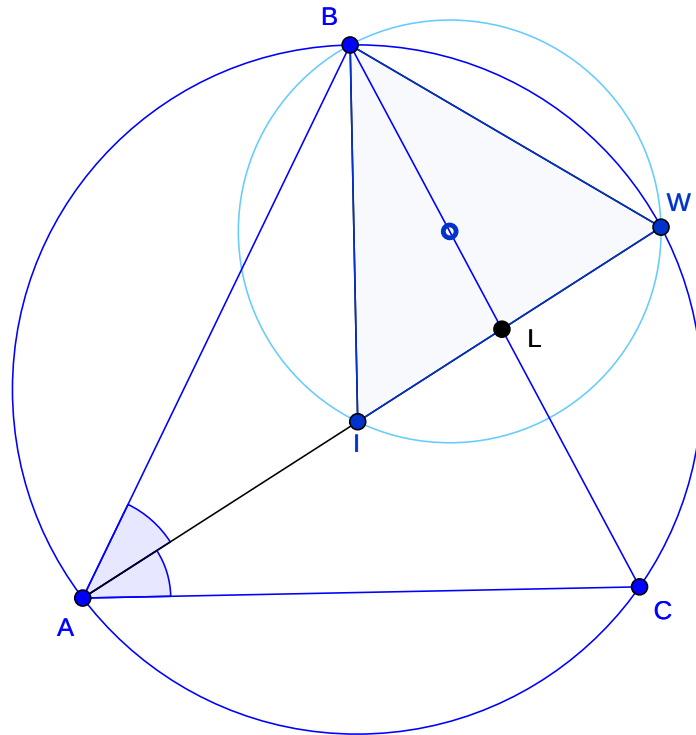


Рис. 5: К задаче 1

Решение. Заметим, что BI — биссектриса угла B (рис. 5). Обозначим: $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$.

Тогда $\angle IWB = \angle AWB = \angle ACB = 2\alpha$, используя равенство вписанных углов, опирающихся на одну дугу (рис. 6).



Начиная с 2005 года, каждое лето в конце июля проводится финальный тур геометрической олимпиады им. И.Ф. Шарыгина.² Как правило, задачи этой олимпиады трудны даже для опытных школьников. Следующая задача (в терминах геометрического места точек) предлагалась девятиклассникам на финальном туре в 2010 году.

2. Произвольная прямая, проходящая через вершину B остроугольного треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , а описанную окружность — в точке M . Докажите, что центры описанных окружностей всех таких треугольников AMK лежат на одной прямой (рис. 7).

¹Тут внимательный читатель спросит: «Почему треугольник IBW остроугольный?». Это можно обосновать, используя лемму о трезубце.

²Страничка олимпиады <https://geometry.ru/olimp/olimpsharygin.php>, на которой можно найти условия и решения задач прошлых лет и много другой полезной информации.

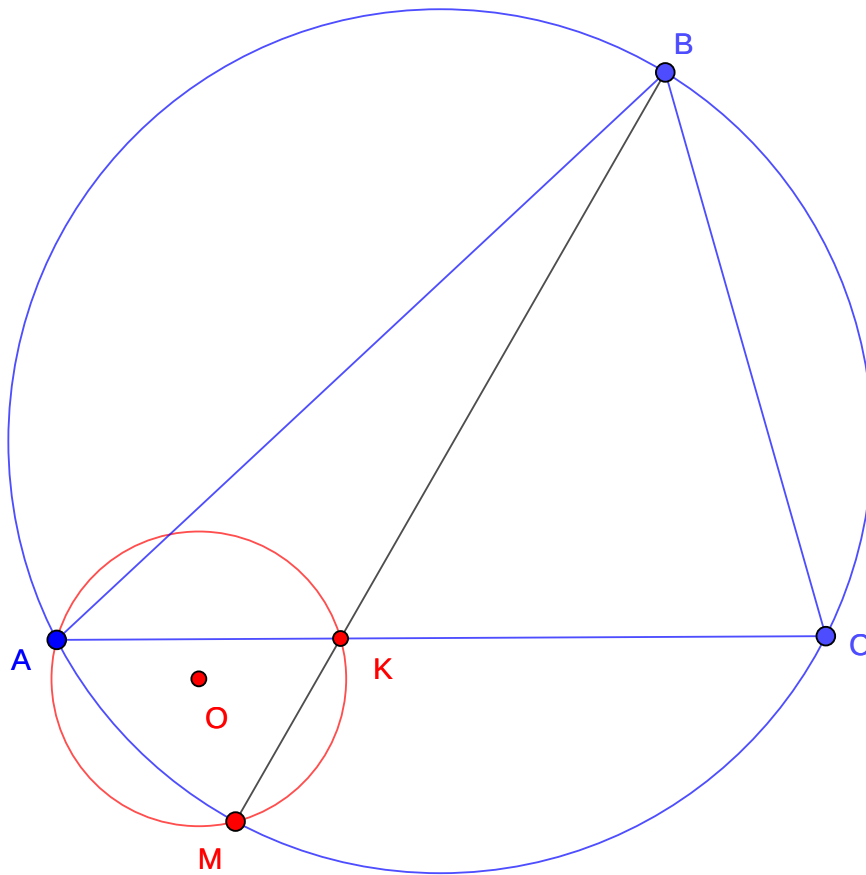


Рис. 7: Центры описанных окружностей треугольников AMK лежат на одной прямой

Решение. Заметим, что $\angle AMK = \angle AMB = \angle ACB$, то есть он фиксирован и острый (рис. 8).

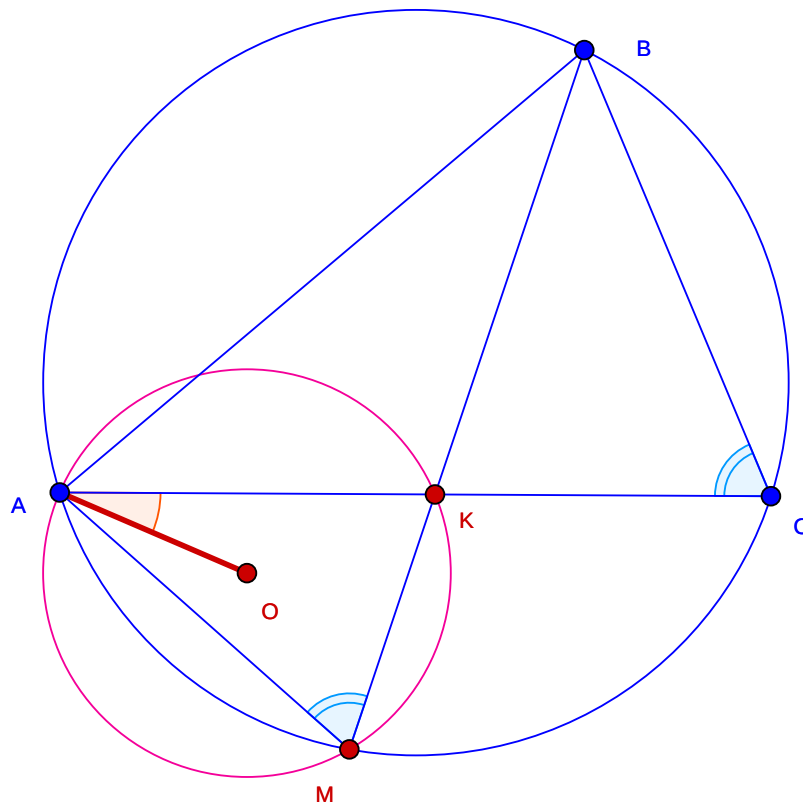


Рис. 8: Направление луча AO определяется фиксированным углом AMB

Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMK . Тогда $\angle OAK = 90^\circ - \angle ACB$, согласно основному факту, то есть тоже фиксирован, причем точки O и M лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC . Следовательно, точка O лежит на фиксированном луче с началом в точке A , что и требовалось. ■

Упражнение 3. Найдите ГМТ таких центров.

В условии предыдущих задач фигурировал центр описанной окружности. Значительно сложнее, когда в условии про него ничего не сказано ...

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CDB = 60^\circ$, $\angle BCA = \angle CAD = 30^\circ$. Найдите BD , если $AB = 2$ (рис. 9).

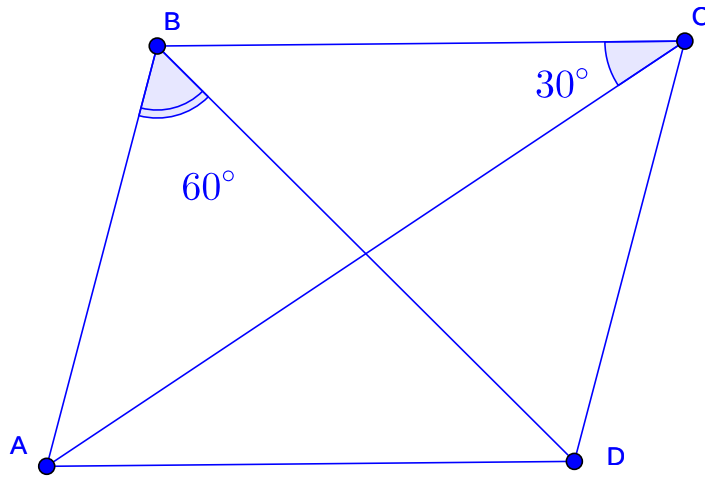


Рис. 9: к задаче 3

Путь к решению. Заметим, что $ABCD$ — параллелограмм. Однако, найти его углы или углы какого-то треугольника непосредственным подсчетом не получается ... Но есть углы, дополняющие друг друга до 90° , поэтому можно попробовать рассмотреть вспомогательную окружность.

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 10).

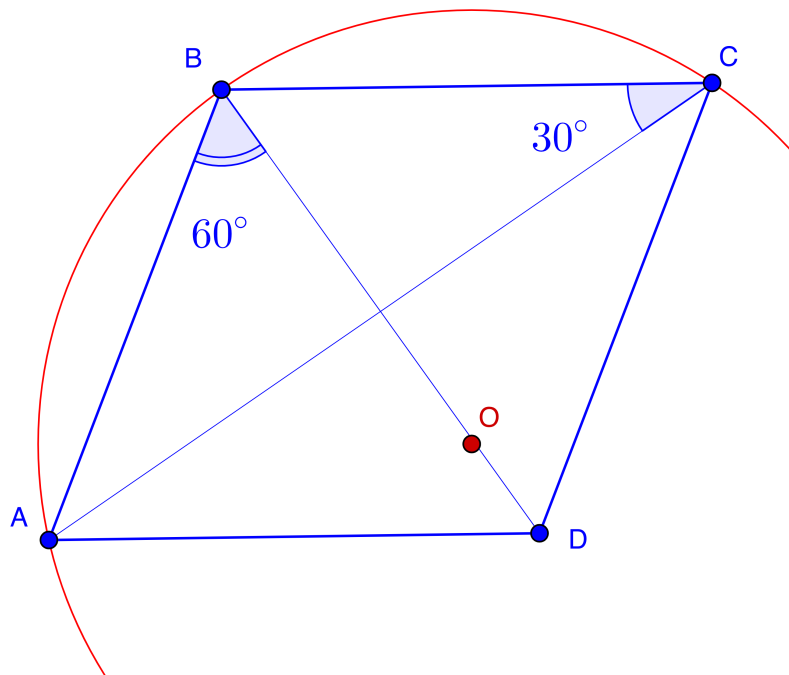


Рис. 10: решение задачи 3

Тогда $\angle ABO = 90^\circ - \angle ACB = 60^\circ = \angle ABD$, то есть O лежит на луче BD . С другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к диагонали AC (почему?).

Возможны два случая:

- точка O совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, то есть параллелограмм является прямоугольником и $BD = 2AB = 4$
- серединный перпендикуляр совпадает с прямой BD , то есть параллелограмм является ромбом и $BD = AB = 2$, как сторона равностороннего треугольника.

■

Заметим, что в задаче мы «нашли» центр описанной окружности как пересечение луча из вершины, проведенного под данным углом и серединного перпендикуляра к стороне. Этот прием будет нами использован еще раз.

К высотам

Ну что ж, с фактом мы разобрались, посмотрели первые примеры. Что дальше? Какой угол также дополняет угол треугольника до 90° ? Конечно, угол между стороной треугольника и высотой, проведенной к другой стороне!

Исходя из этого, можно сформулировать

Следствие 1. Пусть CC' — высота остроугольного треугольника ABC . Точка O — центр описанной окружности. Тогда $\angle ACO = \angle BCC'$, то есть прямые CO и CC' симметричны относительно биссектрисы угла C треугольника ABC (рис. 11).

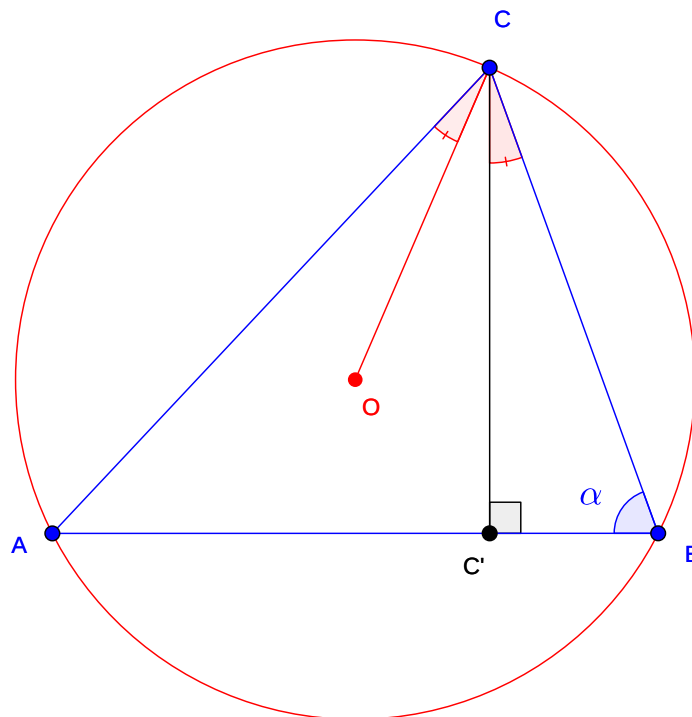


Рис. 11: Радиус и высота образуют равные углы.

Сложного опять-таки ничего нет. Заметим, что если $\angle ABC = \alpha$, то $\angle BCC' = 90 - \alpha = \angle ACO$.

Заметим, что факт верен и в случае тупоугольного треугольника.

Упражнение 4. Как изменится доказательство?

Рассмотрим применение указанного следствия. Ученикам седьмого класса доступна такая задача

Упражнение 5. В прямоугольном треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH к гипотенузе AB . Докажите, что $\angle ACM = \angle BCH$ (рис. 12).

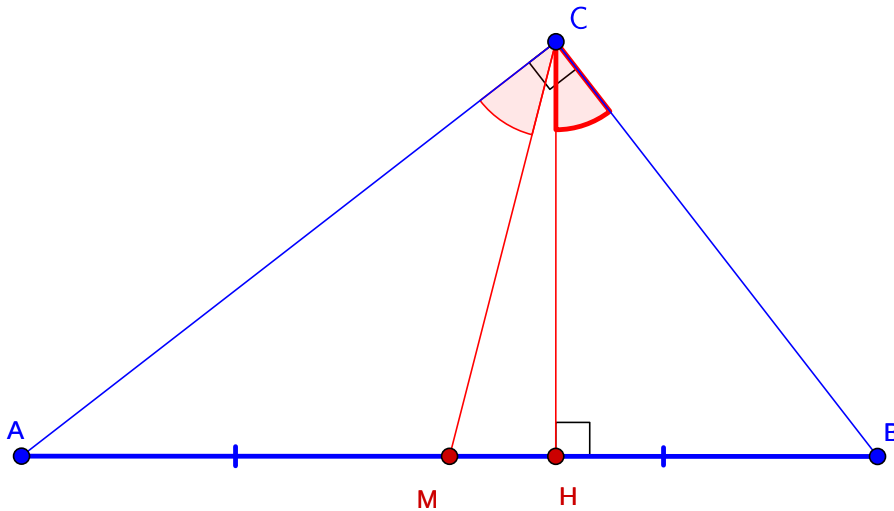


Рис. 12: Медиана и высота образует равные углы

Обратная задача, как это порой **бывает**, оказывается значительно труднее.

4. В неравностороннем треугольнике ABC проведены медиана CM и высота CH (точка H лежит на отрезке AB). Докажите, что, если $\angle ACM = \angle BCH$, то $\angle ACB = 90^\circ$.

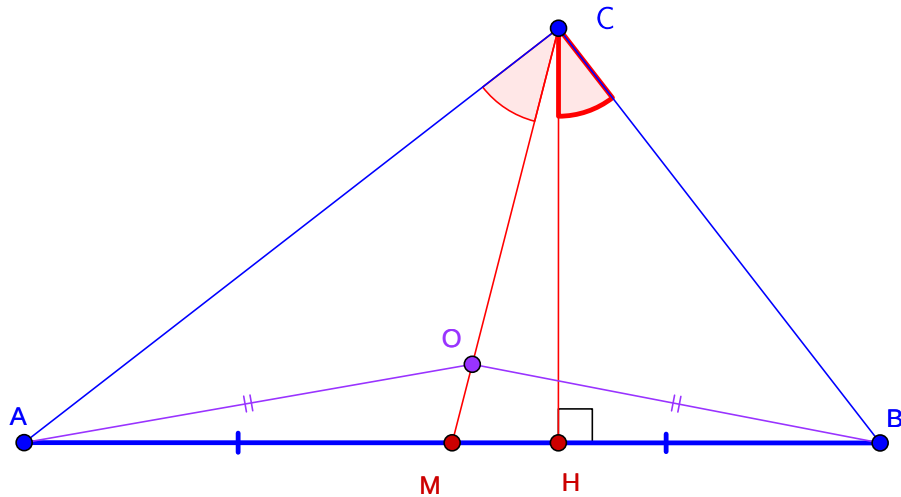


Рис. 13: Признак прямоугольного треугольника

Решение. Докажем, что M — центр окружности, описанной около треугольника ABC , откуда и будет следовать утверждение задачи. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 13). Тогда $\angle ACO = \angle BCH$, то есть O лежит на луче CM . С другой стороны, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . Поскольку треугольник не является равнобедренным, то совпадать они не могут и центр O описанной окружности лежит на их пересечении — в точке M . ■

В следующей задаче, которая предлагалась девятиклассникам на математических боях имени А.П. Савина ³ (в терминах ГМТ), идею симметрии высоты и радиуса спрятали чуть глубже.

5. Дан остроугольный треугольник ABC . На стороне AC выбирается произвольная точка K и такая точка L , что $\angle ABK = \angle CBL$. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников KBL лежат на одной прямой. (рис 14)

³Сайт турнира – <http://tursavin.ru/>

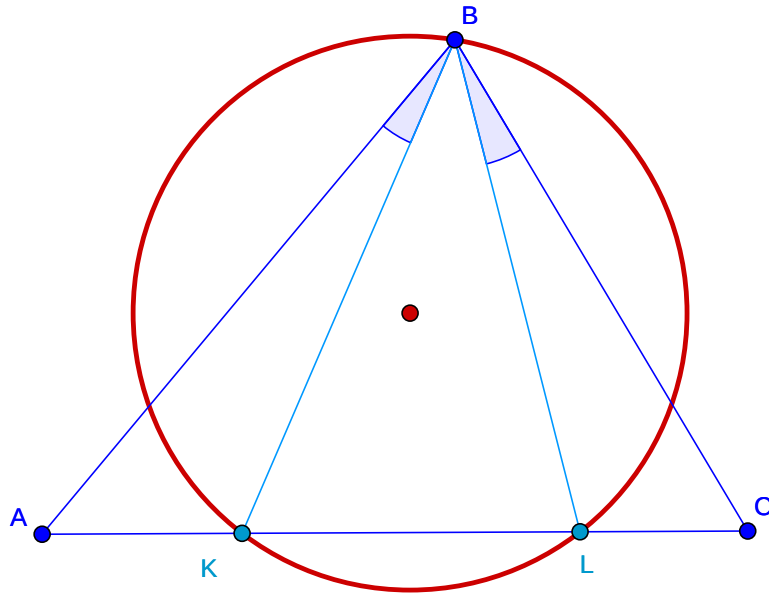


Рис. 14: Центры описанных окружностей треугольников KBL лежат на одной прямой

Решение. Заметим, что треугольники KBL и ABC имеют общую высоту BH , проведенную к стороне AC (рис. 15).

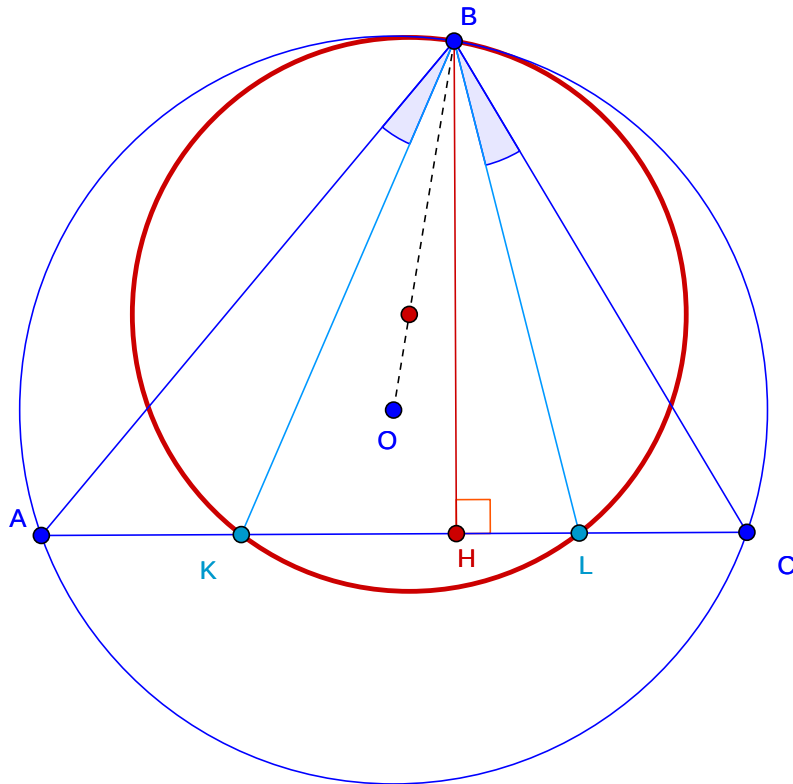


Рис. 15: Решение задачи 5

Кроме того, из равенства $\angle ABK = \angle CBL$ следует, что эти треугольники имеют

также общую биссектрису, проведенную из вершины B . Тогда по следствию 1 фиксированный луч AO , на котором лежит центр описанной окружности треугольника ABC , также содержит центр описанной окружности треугольника KBL . ■

Упражнение 6. Найдите ГМТ таких центров.

Рассмотрим еще одно важное следствие, характеризующее направление радиуса.

Следствие 2. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , O — центр описанной окружности треугольника ABC .

Тогда $CO \perp A_1B_1$ (рис. 16).

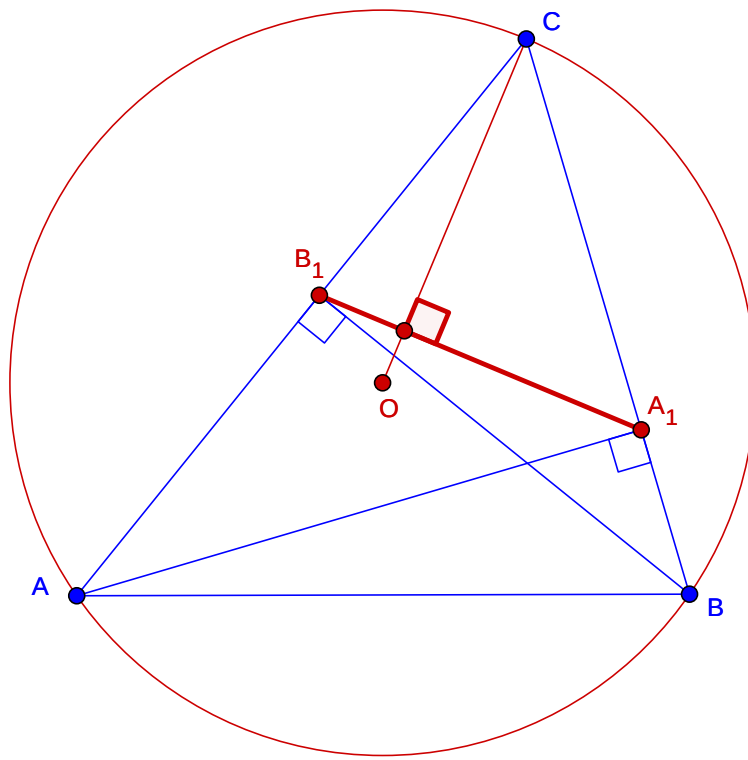
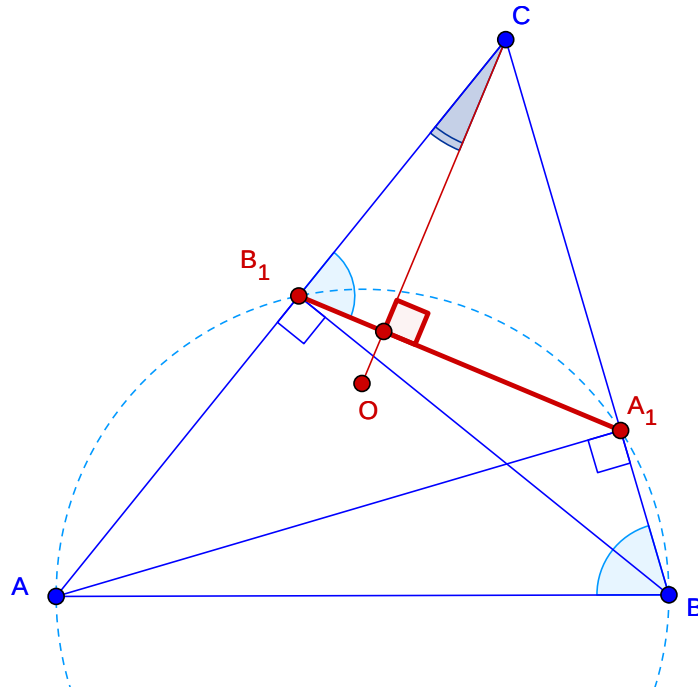


Рис. 16: $CO \perp A_1B_1$

Решение. Поскольку точки B , A_1 , B_1 и A лежат на окружности с диаметром AB (почему?), то $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (рис. 17). Кроме того, $\angle ACO = 90^\circ - \angle CBA$, откуда и следует искомая перпендикулярность. ■

Рис. 17: $CO \perp A_1B_1$

Упражнение 7. Докажите это утверждение для тупоугольного треугольника.

Упражнение 8. Используя те же обозначения, докажите, что касательная, проведенная в точке C , к окружности, описанной около треугольника ABC , параллельна прямой A_1B_1 .

Простейшее применение данного следствия — задача с ["Математической регаты"](#).

6. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке (рис. 18).

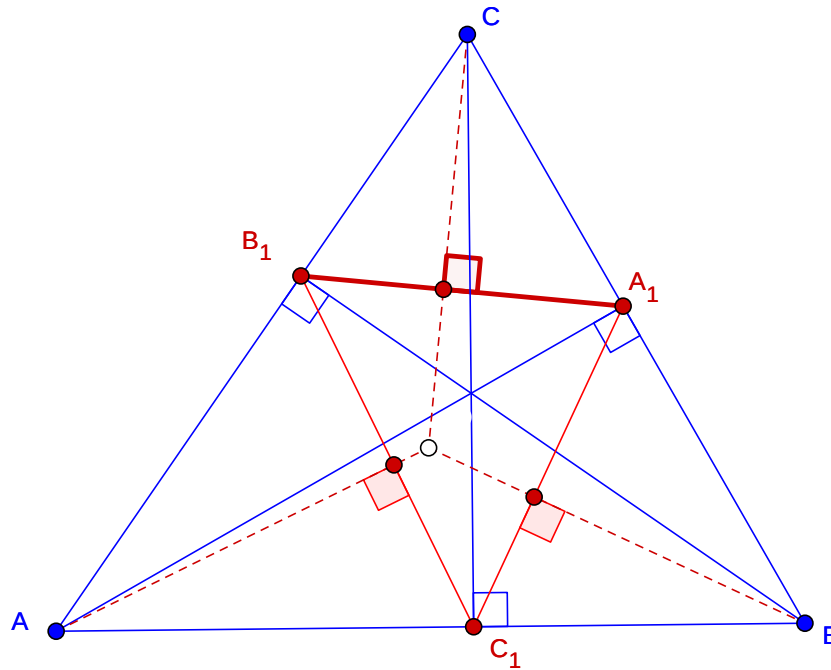


Рис. 18: Задача с «Математической регаты»

Решение. Согласно следствию 2, указанные перпендикуляры пересекаются в центре описанной окружности треугольника ABC . ■

Эту задачу можно переформулировать и так.⁴

Упражнение 9. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров внеписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке.

Возможно и дальнейшее развитие сюжета.

7. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC , точка O — центр описанной окружности. Через точки A_1 , B_1 , C_1 проводятся прямые, параллельные соответственно радиусам OA , OB и OC . Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке (рис 19).

⁴Об искусстве переформулировать задачи подробнее можно прочитать в "Кванте" в статье [«Как переформулировать задачу?»](#)

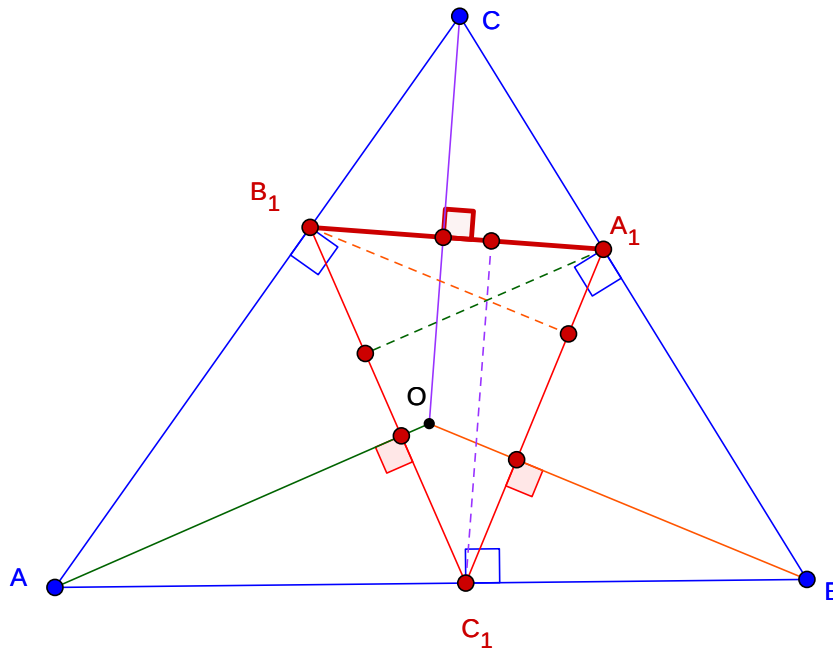


Рис. 19: Параллельно радиусу

Решение. Согласно следствию 2, указанные прямые перпендикулярны сторонам треугольника $A_1B_1C_1$ (ортотреугольника) и проходят через его вершины, то есть являются его высотами и, разумеется, пересекаются в одной точке (ортоцентр ортотреугольника). ■

Оказывается, что из двух последних утверждений следует решение задачи с устной олимпиады по геометрии 2010 (предлагалась в 10-11 классе в качестве самой сложной).

8. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Прямая a проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины A , и параллельна OA . Аналогично определяются прямые b и c . Докажите, что прямые a , b , c пересекаются в одной точке.

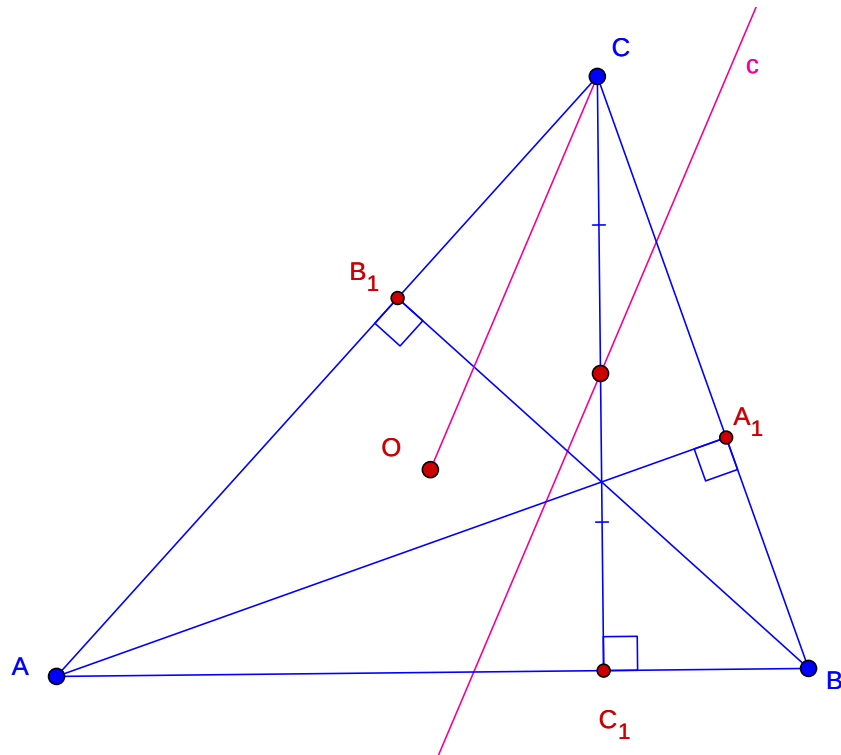


Рис. 20: К задаче 8

Решение. Рассмотрим прямые из задачи 6 и из задачи 7. Пусть c' и c_1 — прямые, проходящие через точки C и C_1 (основание высоты из точки C) и параллельные c .

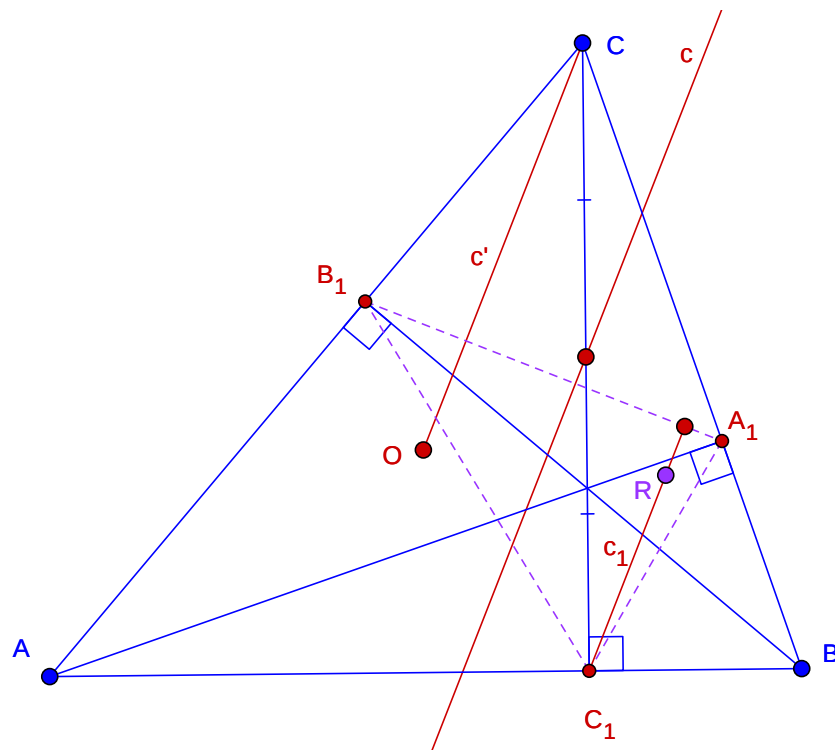


Рис. 21: К задаче 8

Согласно задаче 6 прямая c' проходит через точку O — центр описанной окружности

треугольника ABC . Кроме того, согласно задаче 7, прямая c_1 проходит через точку R — ортоцентр ортотреугольника. Тогда прямая c проходит через середину отрезка OR по теореме Фалеса. Осталось заметить, что прямые a и b также проходят через эту точку. ■

Обобщаем — упрощаем

Полезно после решения проанализировать: все ли условия существенны? Можно ли как-то обобщить задачу? Вернёмся к следствию 2. Оказывается, его можно легко обобщить. Заметим, что в доказательстве следствия для нас не было существенно, что AA_1 и BB_1 именно высоты. Нам было достаточно того, что точки лежат на одной окружности или равенства $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (рис. 22).

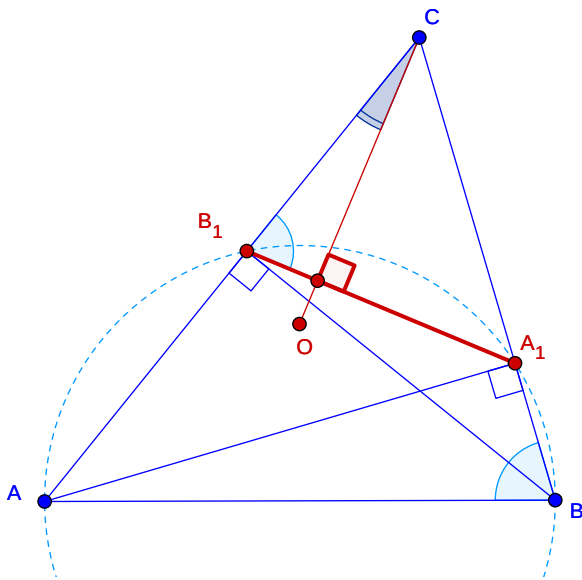


Рис. 22: Следствие 2

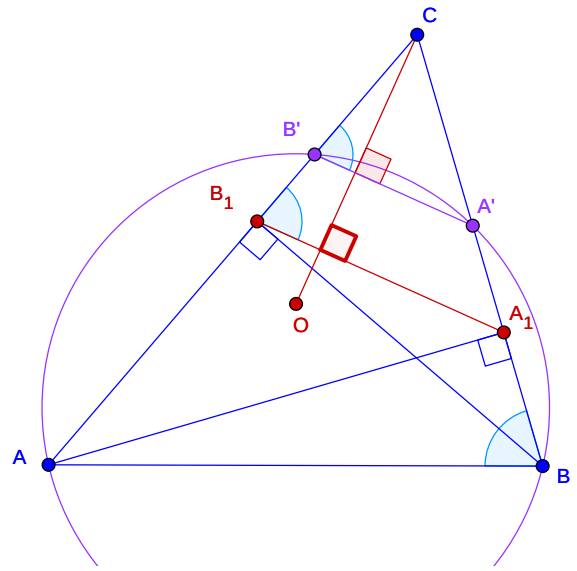


Рис. 23: Антипараллельность

Подобная ситуация часто встречается в задачах.

Определение. Пусть точки B_1 и A_1 лежат на прямых CA и CB соответственно (или обе на лучах CA и CB или обе на лучах, дополнительных к ним). Говорят, что отрезки A_1B_1 и AB *антипараллельны* (относительно пары прямых CA и CB или относительно угла ACB), если $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$.

Теперь мы можем сформулировать

Следствие 2 (обобщение). Пусть отрезок $A'B'$ антипараллелен отрезку AB относительно прямых CA и CB , точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC . Тогда $CO \perp A'B'$ (рис. 23).

Упражнение 10. Докажите обобщённое следствие, рассмотрев различные расположения точек A' и B' .

Каков следующий шаг? Заметим, что треугольники ABC и $A'B'C$ можно поменять местами. Если O' центр окружности, описанной около $A'B'C$, то CO' перпендикулярно AB . Иначе говоря, высота одного треугольника проходит через центр описанной окружности другого и наоборот (рис. 24), поскольку антипараллельность взаимна.⁵

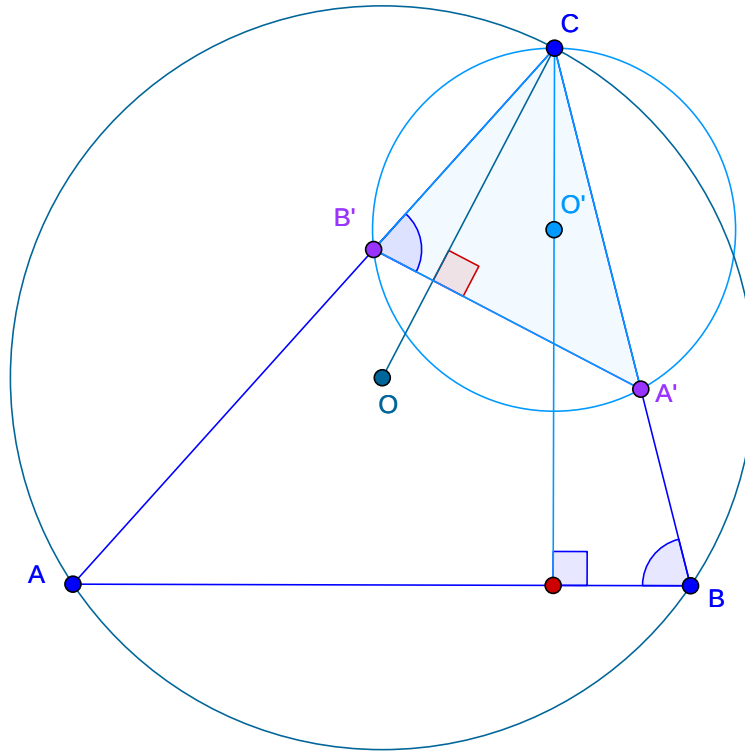


Рис. 24: $CO \perp A'B'$ и $CO' \perp AB$

Доказанное обобщение расширяет наши возможности. Рассмотрим конструкцию, связанную с двумя пересекающимися окружностями. Например, можно легко решить следующую задачу

Упражнение 11. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Через точку A первой окружности проведены прямые AP и AQ , пересекающие вторую окружность в точках B и C . Докажите, что касательная в точке A к первой окружности параллельна прямой BC .

Упражнение 12. Заметим, что предыдущее упражнение можно решить, используя угол между касательной и хордой или антипараллельность. Прodelайте это.

Мы же рассмотрим более сложный факт.

9. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в

⁵Этот результат можно объяснить и так: один треугольник из другого получается композицией симметрии относительно биссектрисы угла C и гомотетии с центром C .

точке Y и прямая XB , которая пересекает вторую окружность в точке Z . Докажите, что прямые, содержащие высоты всех таких треугольников XYZ , проведенные из точки X , проходят через фиксированную точку (рис. 25).

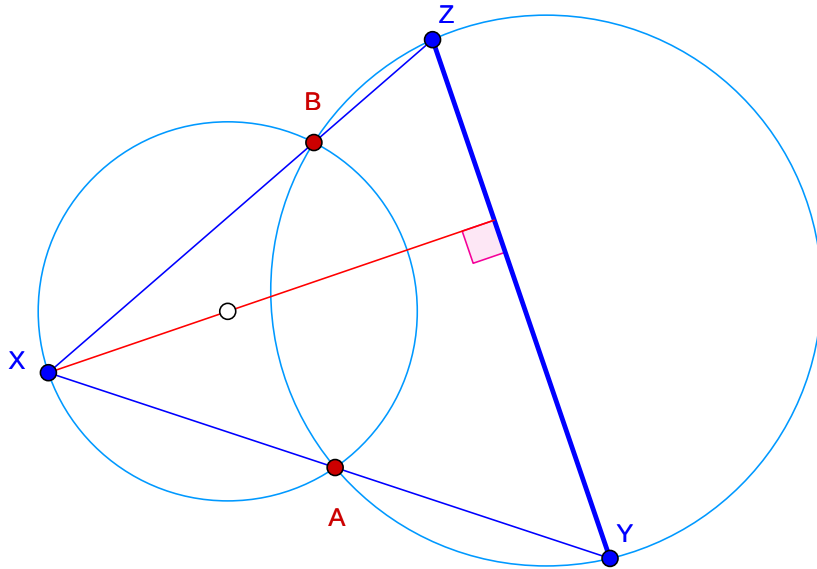


Рис. 25: Высоты из вершины X треугольников XYZ проходят через фиксированную точку.

Решение. Заметим, что точки Z , Y , A и B лежат на одной окружности, откуда следует равенство углов $\angle XBA = \angle XYZ$ или антипараллельность отрезков AB и YZ относительно прямых XU и XZ (рис. 26).

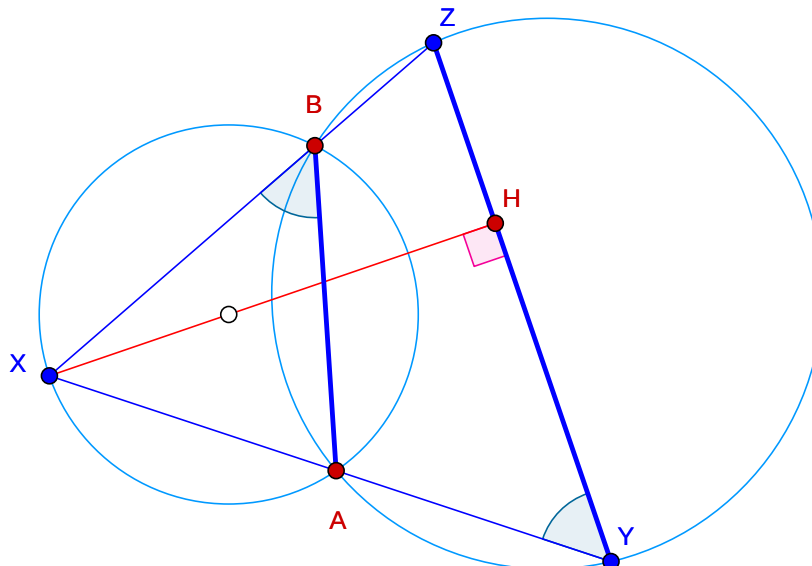


Рис. 26: К решению задачи 9

Согласно обобщению следствия 2, высота XH треугольника XYZ проходит через центр описанной окружности треугольника XAB , то есть через центр первой окружности. ■

И, наконец, сложная задача с финала олимпиады И.Ф. Шарыгина 2007 года (предлагалась 10-му классу).

10. В обозначениях задачи 9 найдите ГМТ центров окружностей, описанных около треугольников XYZ .

Решение. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника XYZ , O_1 и O_2 — центры данных окружностей (рис. 2).

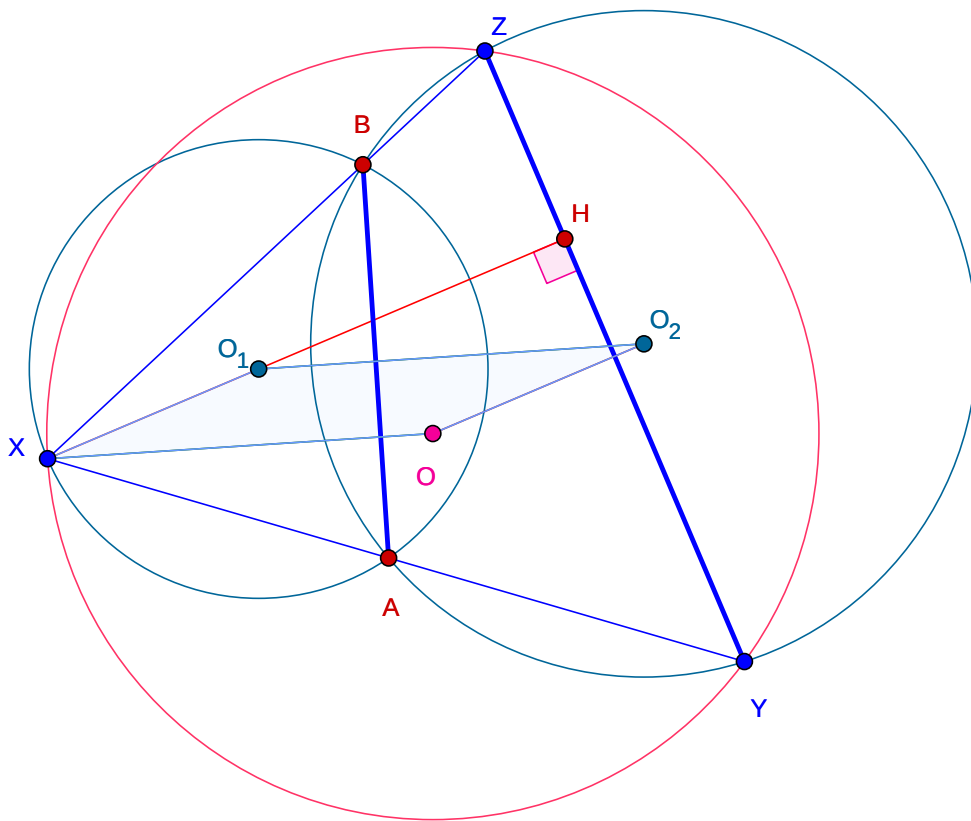


Рис. 27: К решению задачи 2.

По задаче 9 XO_1 — высота треугольника XYZ , то есть XO_1 перпендикулярно YZ . Кроме того, XO перпендикулярно AB , если применить результат задачи 9 для треугольника XAB . Осталось использовать, что общая хорда двух окружностей перпендикулярна их линии центров: прямая O_1O_2 перпендикулярна AB , а OO_2 — прямой YZ . Тогда XO_1O_2O — параллелограмм или все точки лежат на одной прямой, то есть векторы $\overrightarrow{XO}$ и $\overrightarrow{O_1O_2}$ равны. Тогда искомым ГМТ является образ первой окружности при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$. Осталось показать, что любая точка образа первой окружности может являться центром окружности, указанной в условии. Предлагаем убедиться в этом самостоятельно. ■

Начав с довольно простого основного факта, мы смогли решить целый ряд сложных задач. Предлагаем для самостоятельного решения несколько задач различной степени сложности.

Задачи для самостоятельного решения

1. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O . Прямая AO пересекает окружность в точке A_1 , а прямая, содержащая высоту AH , – в точке A_2 . Докажите, что: а) прямая A_1A_2 параллельна BC ; б) $BA_1 = CA_2$.
2. Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол на четыре равные части.
3. Чевиана AA_1 пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке A_2 . Пусть O' – центр описанной окружности треугольника BA_1A_2 . Докажите, что $O'A_1 \perp AC$.
4. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC , пересекает сторону AC в точке K , а описанную окружность – в точке M . Пусть O_a и O_c – центры окружностей, описанных около треугольников AMK и CMK соответственно. Докажите, что прямые AO_a и CO_c пересекаются на высоте треугольника ABC .
- 5 (Окружная олимпиада, Москва, 2015). В треугольнике ABC проведена биссектриса CL , точка O – центр окружности, описанной около ABC . На стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $CO \perp DL$.
- 6 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2012). Пусть I, I_a, I_c – центры вписанной и невписанных окружностей треугольника ABC . Точка O – центр описанной окружности треугольника II_aI_c . Докажите, что $OI \perp AC$.
- 7 (Московская устная олимпиада по геометрии, 2021). На диагонали AC вписанного четырехугольника $ABCD$ выбрали точку E так, что $\angle ABE = \angle CBD$. Пусть O, O_1, O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABC, ABE, CBE соответственно. Докажите, что прямые AO_1, CO_2 и DO пересекаются в одной точке.
- 8 (Московская математическая олимпиада, 2021). В остроугольном треугольнике ABC точка O – центр описанной окружности. Точка B_1 симметрична точке B относительно стороны AC . Прямые AO и B_1C пересекаются в точке K . Докажите, что луч KA является биссектрисой угла BKB_1 .
- 9 (Московская математическая олимпиада, 1993). Дан выпуклый четырёхугольник $ABMC$, в котором $AB = BC$, $\angle BAM = 30^\circ$, $\angle ACM = 150^\circ$. Докажите, что MA – биссектриса угла BMC .

10. В задаче 8 основного текста статьи, мы показали, что три прямые a , b и c пересекаются в одной точке. Обозначим её T . Оказывается, что точка T является центром так называемой окружности Тейлора: пусть AH_1 , BH_2 и CH_3 — высоты треугольника ABC . A_1 и A_2 — проекции точки H_1 на прямые AB и AC . Аналогично определим точки B_1 и B_2 , C_1 и C_2 . Тогда все эти шесть точек лежат на одной окружности — окружности Тейлора. Докажите, что точка T из задачи 8 является центром окружности Тейлора.