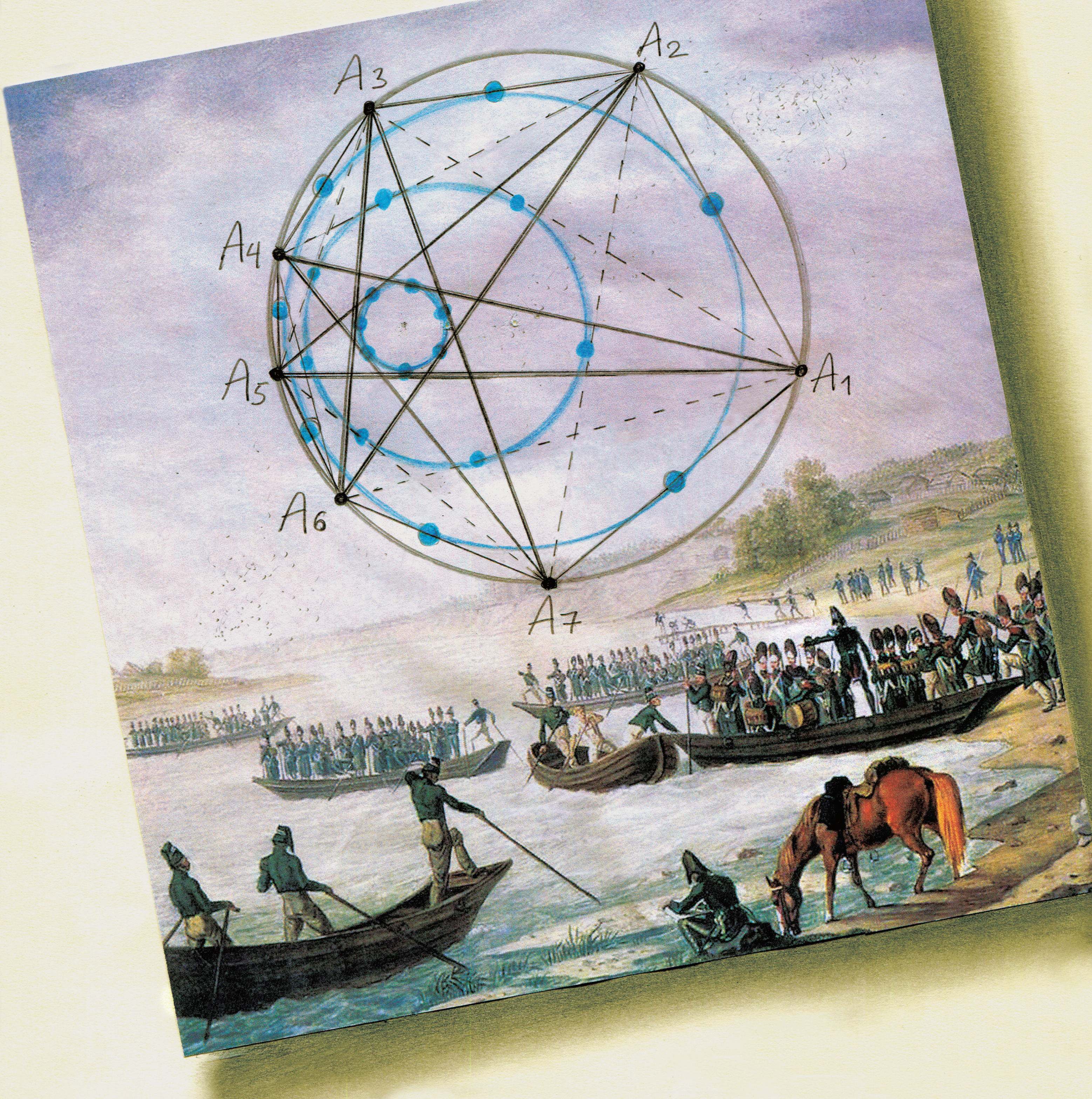
СЕНТЯБРЬ / ДЕКАБРЬ
ISSN 0130-2221
2014 • №5-6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



КВАНТ СЕНТЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2014 № 5-6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Два века теоремы Понселе

В.ПРОТАСОВ

Одной из важнейших и в то же время красивейших теорем классической геометрии является теорема Понселе.

Ф.Гриффитс, Дж.Харрис (1977)

В деревню, к тетке, в глушь, в Саратов,
Там будешь горе горевать!

А.С.Грибоедов. Горе от ума (1824)

ЭТА ТЕОРЕМА – ОДНА ИЗ ЖЕМЧУЖИН ЭЛЕМЕНтарной геометрии. За 200 лет существования ее блеск не потускнел, а ценность увеличилась многократно. Каждый год ученые находят все новые ее доказательства и обобщения, открывают глубокие, порой неожиданные, связи с различными областями математики.

История ее появления уводит нас в начало XIX века, в грозную эпоху наполеоновских войн.

1. Спасение

В ноябре 1812 года русские войска под командованием Кутузова преследовали остатки Великой Армии, отступавшие на запад по смоленской дороге. Решающие бои начались 15 ноября под поселком Красный. За четыре дня французы понесли ужасные потери. Корпус маршала Нея и корпус принца Богарне были разгромлены, а сам Наполеон чудом избежал окружения и отошел с отрядами гвардии, оставив умирать на поле боя несколько тысяч раненых. Вечером 18 ноября дозорные, обходя заснеженное поле вчерашнего сражения, заметили среди множества мертвых тел лежащего без движения француза в форме лейтенанта инженерных войск. Рядом была убитая под ним лошадь. Лейтенант еще дышал. Его подобрали и отвезли в расположение русских войск. Это был двадцатитрехлетний военный инженер Жан Виктор Понселе.

За два года до войны, в 1810 году талантливый юноша закончил престижнейшую парижскую Техническую школу, где его наставниками были Гаспар Монж, Лазар Карно, Андре Мари Ампер, Шарль Брианшон. Ему прочили блестящую научную карьеру, но Жан Виктор выбрал профессию военного инженера. Он вернулся в родной город Мец, где поступил в инженерную школу. По окончании ее, летом 1812 года, он немедленно был командирован в действующую армию, развивавшую наступление в России.

После сражения под Красным Понселе оказался в числе более 20 тысяч французских военнопленных. Последовал изнурительный переход в тысячу верст (четыре месяца по разбитым дорогам, в условиях русской зимы), и в марте 1813 года колонна прибыла в Саратов. Провинциальный русский город на Волге, не избалованный вниманием иностранцев, благосклонно отнесся к бывшим врагам. Работой их не утруждали, если не считать посадки дубовой аллеи на загородной даче губернатора А.Д.Панчулидзева. Несколько дубов из этой аллеи, на территории нынешнего саратовского парка культуры и отдыха, живы до сих пор. Возможно, один из них посажен руками Понселе! Молодой инженер активно занимается наукой. Сначала он повторяет по памяти университетские курсы лекций (научной литературы в Саратове было не достать: ни университета, ни библиотек не было). Затем приступает к самостоятельным исследованиям. За 14 месяцев ссылки Понселе написал несколько фундаментальных трудов, в которых заложил основы проективной геометрии (придумав при этом сам термин), динамики машин и т.д. Одним из достижений его саратовского периода является теорема о замыкании вписанно-описанных ломаных – знаменитая теорема Понселе.

Жан Виктор Понселе

2. Теорема Понселе

Теорема 1 (Понселе, 1814). *На плоскости даны две окружности. Если существует n-угольник, вписанный в первую окружность, все стороны которого (или их продолжения) касаются второй, то таких n-угольников бесконечно много, причем любая точка первой окружности может быть его вершиной.*

Первую окружность мы будем обозначать через ω, вторую через γ. Выберем произвольную точку $A_1 \in \omega$ и проведем из нее касательную к окружности γ. Эта прямая имеет вторую точку пересечения с окружностью ω, обозначим ее A_2. Из точки A_2 можно провести две касательные к γ. Одна из них уже есть, это A_2A_1. Проведем вторую. Она пересекает окружность ω второй раз в некоторой точке A_3. Проведем вторую касательную из точки A_3 и т.д. Так выглядит *процесс Понселе* построения ломаной, вписанной в окружность ω и описанной около γ. Теорема Понселе утверждает, что *если процесс Понселе замкнулся через n шагов, т.е. $A_{n+1} = A_1$, то он для любой начальной точки $A_1 \in \omega$, из которой можно провести касательную к γ, замкнется через n шагов.*

Самый наглядный случай теоремы Понселе получается, когда окружность γ лежит внутри ω. В этом случае ω мы будем называть внешней окружностью, а γ – внутренней. На рисунке 1 изображено замыкание

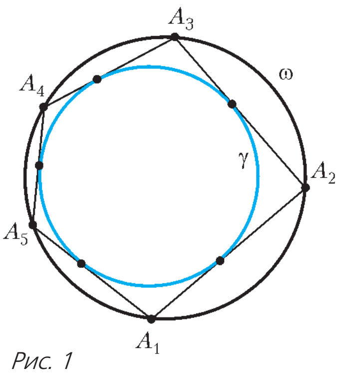


Рис. 1

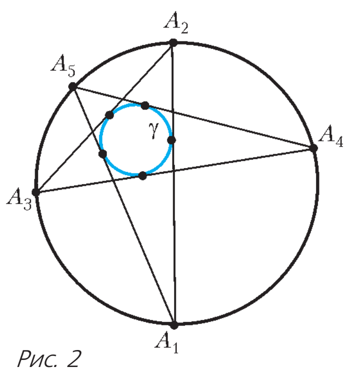


Рис. 2

через $n = 5$ шагов. У нас есть выпуклый пятиугольник $A_1 \ldots A_5$, вписанный в окружность ω и описанный около γ. Согласно теореме Понселе, его можно «вращать» в кольце между окружностями. При этом длины его сторон и величины углов будут изменяться, но сам пятиугольник всегда будет оставаться вписанным в окружность ω и описанным около γ. А на рисунке 2 показан случай, когда $n = 5$, но ломаная делает два оборота вокруг окружности γ. В этом случае многоугольник Понселе будут самопересекающимся.

Для простоты мы в основном будем рассматривать именно этот случай – когда γ лежит внутри ω. Но не будем забывать и про другие два: когда окружности лежат вне друг друга (рис.3, случай $n = 4$) и

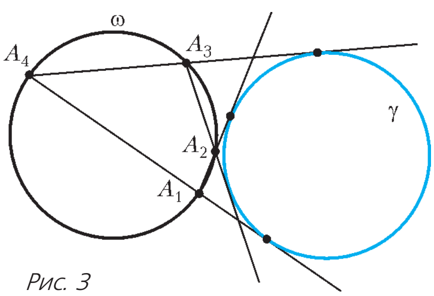


Рис. 3

когда они пересекаются (рис.4). Теорема Понселе, конечно же, верна и для этих случаев, но доказательства будут отличаться. Поэтому мы разберем эти два случая отдельно и сделаем такую оговорку:

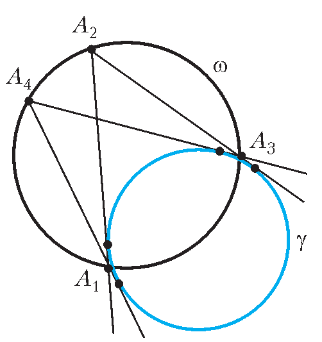


Рис. 4

Ни одна из сторон многоугольника $A_1 \ldots A_n$ не касается окружности ω. Иначе говоря, никакие соседние вершины многоугольника не совпадают.

Разные источники называют датой открытия теоремы 1813 или 1814 год. Опубликовал Понселе ее в «Трактате о проективных свойствах фигур» в 1822 году, через 8 лет после возвращения во Францию, заодно снабдив ее новым, геометрическим доказательством (первое было аналитическим). Теорема Понселе занимает в геометрии особое место. Она, несомненно, является рекордсменом по числу выдающихся математиков, к ней обращавшихся: как классических (Якоби, Бертран, Кэли, Лебег, Боттема, Стремберг), так и современных (Гриффитс, Харрис, Хованский, Козлов – мы назвали лишь малую часть). Это было бы неудивительно, если бы она не была доказана. Интрига нерешенных гипотез всегда привлекала умы. Великую теорему Ферма не могли доказать более 320 лет, а когда доказали, интерес к ней стал ослабевать. Но теорема Понселе сразу была доказана – 200 лет назад, самим Понселе. И даже, как мы знаем, двумя способами. Тем не менее, интерес к ней только растет год от года. Серьезные математические журналы побликуют все новые работы о связи теоремы Понселе с задачами из самых разных областей математики. Возможно, дело заключается именно в этих неожиданных связях, а также в отсутствии геометрического доказательства, которое было бы столь же простым и наглядным, как и сама теорема. Все найденные доказательства либо достаточно сложны и громоздки, либо используют идеи и методы, далекие от элементарной геометрии. «Школьные» доказательства есть для малых n – три и четыре. С них мы и начнем. А доказательство для общего n мы осуществим с помощью идеи, предложенной Якоби и Бертраном полтора века назад. Но сначала вспомним несколько фактов из школьного учебника.

3. Вспомним немного геометрии

Нам понадобятся три простых факта про окружность.

1. Пусть AB и CD – хорды окружности. Если они пересекаются, то угол между ними равен полусумме дуг AC и DB; если они не пересекаются, то этот угол равен полуразности дуг (рис.5).

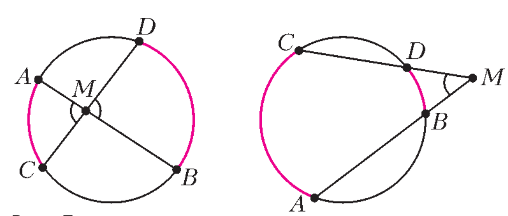


Рис. 5

2. Пусть хорды окружности AB и CD пересекаются в точке M. Тогда треугольники AMC и DMB подобны.

3. Если точка M не лежит на окружности, то для любой прямой, проходящей через M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение длин отрезков $AM \cdot BM$ равно $\left|d^2 - R^2\right|$, где d – расстояние от M до центра окружности.

Число $d^2 - R^2$ называется *степенью точки* M относительно окружности. Для точек внутри окружности степень отрицательна, на окружности – равна нулю, а вне – положительна, и равна, квадрату касательной, проведенной из точки M (это следует из свойства 3, когда точки A и B совпадают). Если M лежит внутри окружности, то для любой хорды AB, проходящей через M, произведение отрезков AM и BM равно степени точки M, взятой со знаком минус. Для того чтобы это доказать, проведем через точку M диаметр CD и предположим, что $CM > DM$. Тогда $CM = R + d$, $DM = R - d$, следовательно, $CM \cdot DM = R^2 - d^2$. Но по свойству 2 треугольники AMC и DMB подобны, значит, $AM \cdot BM = CM \cdot DM = R^2 - d^2$.

4. Случай $n = 3$. Треугольники Понселе

Дана окружность ω и окружность γ внутри нее (рассматриваем пока только этот случай). Теорема Понселе для треугольников утверждает, что если для какой-то точки A существует треугольник ABC, вписанный во внешнюю окружность и описанный относительно внутренней, то такой треугольник существует для каждой точки $A \in \omega$.

Доказать это можно с помощью формулы, выражающей расстояние d между центрами описанной и вписанной окружностей треугольника (точки O и I соответственно) через радиусы R и r этих окружностей.

Формула Эйлера–Чаппела. *Для любого треугольника выполнено равенство:*

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Что замечательно в этой формуле: расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей зависит только от их радиусов и не зависит явно от сторон треугольника. Скажем, если взять несколько различных треугольников – остроугольных, тупоугольных, равнобедренных и т.д., у которых $R = 3$ и $r = 1$, то у них у всех d будет равно $\sqrt{3}$.

Комментарий. Обычно эту формулу называют в честь величайшего математика Леонарда Эйлера (1707–1783), что в данном случае не совсем справедливо. Среди более чем 800 работ, написанных Эйлером и посвященных самым разным областям математики, нет работы, где бы эта формула доказывалась (хотя Эйлер, по-видимому, ее знал). А доказана она была английским математиком Уильямом Чаппелом в 1746 году, его статья «An essay on the properties of triangles inscribed in and circumscribed about two given circles» была напечатана в журнале *Miscellanea Curiosa Mathematica*.

Доказательство формулы. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC (рис.6). Биссектрисы углов B и C пересекают описанную окружность в точках B_1 и C_1; угол BIC_1, будучи углом между хордами BB_1 и CC_1, равен полусумме дуг $\overset{\smile}{C_1B}$ и $\overset{\smile}{CB_1}$.

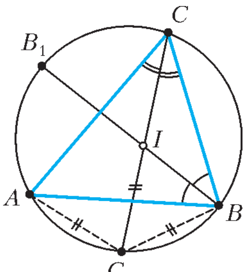


Рис. 6

Но $\overset{\smile}{C_1B} = \overset{\smile}{AC_1}$ и $\overset{\smile}{CB_1} = \overset{\smile}{B_1A}$, поэтому угол BIC_1 равен полусумме дуг $\overset{\smile}{AC_1}$ и $\overset{\smile}{B_1A}$, т.е. половине дуги $\overset{\smile}{B_1C_1}$, т.е. углу B_1BC_1. Получаем, что треугольник IC_1B равнобедренный, и $C_1B = C_1I$. Так же доказывается, что $C_1I = C_1A$. Мы пришли к очень полезному факту, который называют **леммой о трезубце (или о трилистнике)**:

Точка пересечения биссектрисы треугольника с описанной окружностью равноудалена от концов противоположной стороны и от центра вписанной окружности.

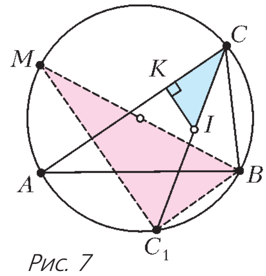


Рис. 7

Проведем диаметр BM и опустим перпендикуляр IK на сторону AC (рис.7). Прямоугольные треугольники IKC и BC_1M подобны, поскольку их острые углы ICK и BMC_1 равны половине угла C. Поэтому $\frac{BC_1}{BM} = \frac{IK}{IC}$, или $BC_1 \cdot IC = BM \cdot IK = 2R \cdot r$. Но так как $C_1B = C_1I$, то $C_1I \cdot IC = 2R \cdot r$. Наконец, воспользовавшись свойством 3, получаем, что произведение $C_1I \cdot IC$ равно $R^2 - d^2$. Итак, $2Rr = R^2 - d^2$.

Теперь приступим к **доказательству теоремы Понселе для $n = 3$.** Пусть, начав из вершины A, мы получили треугольник ABC, вписанный во внешнюю окружность и описанный вокруг внутренней (рис.8). Возьмем теперь произвольную точку A' описанной окружности и начнем процесс из этой точки: проводим последовательно хорды $A'B'$ и $B'C'$, касающиеся внутренней окружности. Что дальше? Почему хорда $C'A'$ будет также ее касаться? Можно применить формулу Эйлера–Чаппела к треугольнику $A'B'C'$. Но беда в том, что у него только значение R такое же, как и у треугольника ABC, а значения r и d могут быть другими. Попробуем рассуждать иначе и решим сначала следующее простое упражнение.[1]

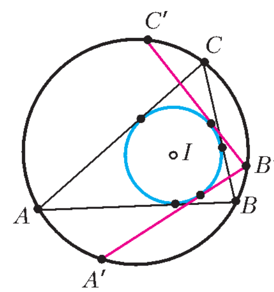


Рис. 8

Упражнение 1. Дана окружность, точка A на ней и точка I внутри нее. Постройте треугольник ABC, вписанный в данную окружность, для которого I – центр вписанной окружности. Сколько решений, в зависимости от расположения точек A и I, имеет задача?

С помощью леммы о трезубце легко осуществить построение и доказать, что задача всегда имеет единственное решение (с точностью до симметрии).

Вернемся к теореме Понселе. Взяли произвольную точку A' на внешней окружности. Построили с помощью циркуля и линейки вписанный треугольник $A'B'C'$, у которого I – центр вписанной окружности. У этого треугольника значения R и d такие же, как у ABC. Применив теперь к нему формулу Эйлера–Чаппела, получаем, что у него и значение r такое же. Значит, $A'B'C'$ имеет ту же вписанную окружность, что и ABC.

Строго говоря, мы доказали теорему Понселе при $n = 3$ только для случая вложенных окружностей. Осталось два других случая: когда окружности пересе-

[1] В этой статье много упражнений. Решать их необязательно (статья будет понятна и без них), но полезно.

каются и когда они расположены вне друг друга. Это мы оставляем читателю в качестве упражнений. Первый случай делается примерно так же, с заменой вписанной окружности на вневписанную, а второй, оказывается, невозможен вовсе.

Упражнения

2.[2] Каждая из вневписанных окружностей треугольника пересекает описанную окружность.

3. Воспользовавшись предыдущим упражнением, докажите, что для пары окружностей, расположенных вне друг друга, не существует треугольников, вписанных в одну окружность, стороны которых (или их продолжения) касаются другой.

4. Сформулируйте и докажите аналог формулы Эйлера–Чаппела для вневписанной окружности.

5. Решите упражнение 1 для случая, когда точка I лежит вне окружности и должна быть центром вневписанной окружности.

6. Пользуясь результатами двух предыдущих упражнений, докажите теорему Понселе для случая $n = 3$ для двух пересекающихся окружностей.

5. Случай n = 4, далее везде

Теперь, на волне успеха, примемся за случай $n = 4$. В отличие от треугольника, четырехугольник не всегда имеет вписанную и описанную окружности. Вписанно-описанные четырехугольники – особые объекты, многие интересные факты связаны с ними (упражнения 9–14). В частности, для них верен аналог формулы Эйлера–Чаппела. Перепишем сначала эту формулу так:

$$\frac{1}{R-d}+\frac{1}{R+d}=\frac{1}{r}.$$

Если каждую из трех дробей возвести в квадрат, получим формулу для четырехугольника:

Формула Фусса. *Если четырехугольник вписан в окружность радиусом R и описан около окружности радиусом r, а d – расстояние между их центрами, то*

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

Николай Иванович Фусс

Формула доказана в 1792 году Николаем Ивановичем Фуссом (1755–1825), академиком Санкт-Петербургской академии наук, учеником и помощником Л.Эйлера. Доказательство сложнее, чем у формулы Эйлера–Чаппела. Мы оставляем его в виде упражнения «со звездочкой».

Упражнение 7*. Докажите формулу Фусса.

[2] В этом и в других упражнениях мы будем опускать слова «Докажите, что».

Если вам не удастся доказать формулу самостоятельно, то можно заглянуть в один из популярных задачников. Однако следующее упражнение является еще большим вызовом.

Упражнение 8*. Дана окружность, точка A на ней и точка I внутри нее. Постройте четырехугольник $ABCD$, вписанный в данную окружность и описанный около некоторой окружности с центром I. Сколько решений, в зависимости от расположения точек A и I, имеет задача?

Не пытайтесь решить эту задачу с помощью формулы Фусса, построив отрезок длины r по известным R и d! Формула Фусса утверждает, что *если есть* вписанно-описанный четырехугольник, то для него числа R, r и d связаны таким соотношением. Она не утверждает обратного, что если числа R, r и d связаны этим соотношением, то для них найдется вписанно-описанный четырехугольник (а нам нужно именно это!). Упражнение 8 – сложная задача. В конце статьи мы укажем один из способов решения. А пока попытаемся обойти эту сложность и доказать теорему без нее.

Что нам нужно от этой задачи? Только существование четырехугольника с вершиной A, вписанного в данную окружность и описанного около некоторой окружности с заданным центром I. Сам четырехугольник при этом не нужен, поэтому строить его излишне. А чтобы доказать существование, воспользуемся непрерывностью. Проведем сначала внутреннюю окружность с центром I и радиусом $r = R - d$ (рис.9). Она

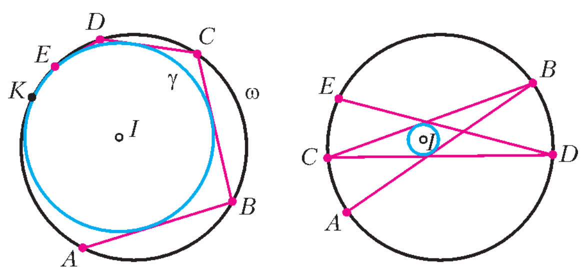
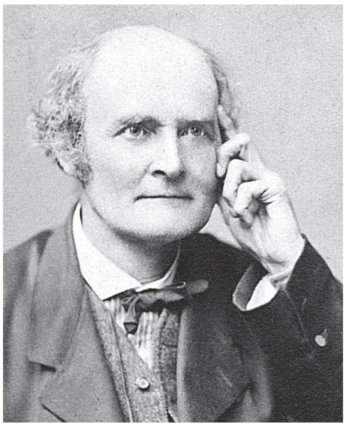


Рис. 9

будут касаться внешней окружности в некоторой точке K. Построим последовательно хорды AB, BC, CD, DE, касающиеся внутренней окружности. Точка E при этом не дойдет до точки касания и будет лежать на дуге AK. Теперь начнем непрерывно уменьшать радиус r. Если сделать его очень маленьким, то точка C вплотную приблизится к точке A, а точка E уже перейдет за точку A. Таким образом, обязательно настанет момент, когда $E = A$, т.е. четырехугольник $ABCD$ будет описан около окружности с центром I.

Теперь **доказываем теорему Понселе для n = 4**. Взяли произвольную точку A' внешней окружности, для нее существует вписанно-описанный четырехугольник $A'B'C'D'$ с центром вписанной окружности I. Применив формулу Фусса, приходим к выводу, что у этого четырехугольника значение радиуса r такое же, как у четырехугольника $ABCD$, поскольку у него такие же R и d. Таким образом, он описан около той же окружности.

Это доказательство можно было бы применить к другим n, если бы у нас были формулы для вписанно-описанных n-угольников, связывающие R, r и d. Например, для $n = 5$. Мы взяли формулу для $n = 3$, возвели каждое слагаемое в квадрат, получили формулу для $n = 4$. Если возвести каждое слагаемое в куб, получится ли формула для $n = 5$? Увы, нет. Для пятиугольников формула сложнее, для $n = 6$ еще сложнее, и т.д. Формулы для произвольных n могут быть получены с помощью различных рекуррентных соотношений либо выведены из единой формулы Кэли, которая дает условия замыкания ломаных Понселе через n шагов. Эта формула была доказана в 1854 году английским математиком Артуром Кэли (1821–1895) и по праву считается большим достижением. Она отнюдь не является громоздкой, а, напротив, вполне красива и логична. Но, к сожалению, в ней используются понятия, лежащие далеко за рамками школьной программы, и мы не будем ее здесь воспроизводить. Мы докажем теорему Понселе по-другому, а пока завершим этот параграф несколькими задачами о вписанно-описанных четырехугольниках.



Артур Кэли

Упражнения

9. Во вписанном четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями проекции точки пересечения диагоналей на стороны являются вершинами вписанно-описанного четырехугольника. Более того, все вписанно-описанные четырехугольники получаются таким способом.

10. Окружности, построенные на боковых сторонах вписанно-описанной трапеции, как на диаметрах, касаются.

11. Площадь вписанно-описанного четырехугольника равна корню из произведения его сторон.

12. Во вписанно-описанном четырехугольнике отрезки, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, перпендикулярны.

13. Внутри окружности дана точка M и взята произвольная хорда AB такая, что $\angle AMB = 90°$. Найдите геометрическое место: а) середин хорд AB; б) точек пересечения касательных к окружности, проведенных в точках A и B.

14. Выведите теорему Понселе для $n = 4$ из результата предыдущего упражнения.

6. Массы и плотности. Доказательство теоремы Понселе

Начнем с простого вопроса. Как доказать теорему Понселе для концентрических окружностей? Да тут и доказывать нечего! Повернем пару окружностей вокруг их общего центра так, чтобы точка A_1 перешла в точку A_1', тогда вся цепочка $A_1A_2\ldots$ перейдет в $A_1'A_2'\ldots$, поэтому если первая замкнется, то замкнется и вторая. Можно и по-другому: все хорды внешней окружности, касающиеся внутренней, стягивают одинаковые дуги. Если длина всей окружности l, а длина дуги равна $\frac{l}{n}$, то цепочка замыкается через n шагов, сделав один оборот. А если длина дуги равна $\frac{lk}{n}$, то цепочка тоже замыкается через n шагов, но сделает уже k оборотов. Итак, *замыкание произойдет тогда и только тогда, когда длина дуги соизмерима (т.е. имеет отношение, выраженное рациональным числом) с длиной всей окружности*.

Это все, конечно же, верно, но только если окружности концентрические. А если нет, то хорды, касающиеся внутренней окружности, будут стягивать дуги разной длины. Тем не менее, эти рассуждения можно исправить, если вместо длины дуги измерять ее массу. Представим себе, что окружность ω сделана из проволоки, которая неоднородна: в каждой точке M она имеет некоторую плотность $\rho(M)$. Если плотность во всех точках одинакова, то масса дуги будет пропорциональны длине. А если плотность разная в разных точках, то мы получим нечто новое. Вопрос: можно ли распределить плотность на окружности так, чтобы все дуги, хорды которых касаются внутренней окружности, имели бы одинаковую массу? Если можно, то доказательство теоремы Понселе ничем не будет отличается от случая концентрических окружностей, просто слово «длина» заменяем везде словом «масса».

Для построения плотности нам будет удобнее ввести координаты. Начало координат O поместим в центр окружности γ, направления перпендикулярных осей OX и OY выбираем произвольно, а радиус γ принимаем за единицу. Возьмем функцию двух переменных $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Она определяет окружность γ, т.е. обращается в ноль ровно в точках этой окружности. Внутри окружности $f(x,y) < 0$, а вне нее $f(x,y) > 0$. Поэтому в каждой точке $M = (x,y)$ окружности ω можно определить плотность $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}$.

Доказательство теоремы Понселе. Если мы покажем, что с такой плотностью ρ все хорды, касающиеся окружности γ, отрезают от окружности ω одинаковую массу, то теорема будет доказана. Возьмем произвольную хорду AB, касающуюся γ в некоторой точке P (рис.10). Если ограничить функцию f на прямую AB,

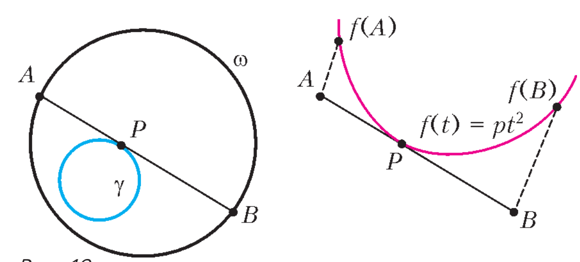


Рис. 10

что за функцию мы получим? Поскольку f – квадратичная функция, ее ограничение на прямую – тоже квадратичная функция, т.е. f на прямой AB представляет собой квадратный трехчлен, его график – парабола. Заметим, что $f(P) = 0$, а во всех остальных точках прямой AB функция f положительна, потому что эти точки лежат вне окружности γ. Значит, парабола имеет вершину в точке P. Введем на прямой AB

координату t, выбрав единичный отрезок произвольно, а начало координат поместив в точку P. Тогда парабола задается уравнением $f(t) = pt^2$, где $p > 0$. Поэтому для любых двух точек t_1, t_2 прямой AB получим $\left|\frac{t_1}{t_2}\right| = \frac{\sqrt{f(t_1)}}{\sqrt{f(t_2)}}$. В частности, для точек A и B получаем $\frac{AP}{BP} = \frac{\sqrt{f(A)}}{\sqrt{f(B)}} = \frac{\rho(B)}{\rho(A)}$. Итак,

для любой хорды, касающейся γ в точке P, выполнено равенство $AP \cdot \rho(A) = BP \cdot \rho(B)$.

Это – ключевое свойство нашей плотности, из которого следует постоянство масс. Проведем хорду $A'B'$, очень близкую к AB (рис.11). Тогда масса маленькой дуги AA' примерно равна ее длине, помноженной на плотность $\rho(A)$. Длина же дуги AA' примерно равна длине хорды AA'. Таким образом, масса дуги AA' примерно равна $AA' \cdot \rho(A)$, а масса дуги BB' примерно равна $BB' \cdot \rho(B)$. Отношение этих масс при приближении $A'B'$ к AB стремится к $\frac{AA'}{BB'} \cdot \frac{\rho(A)}{\rho(B)} = \frac{AA'}{BB'} : \frac{AP}{BP}$. Но отношение $\frac{AA'}{BB'}$ равно коэффициенту подобия треугольников ANA' и $B'NB$, что равно $AN : B'N$ и стремится к $AP : BP$ при $AB \to A'B'$. Значит, отношение масс дуг AA' и BB' стремится к 1. Таким образом, эти массы примерно (математики говорят: «с точностью до бесконечно малых более высокого порядка») равны. Поэтому масса дуги AB не меняется при ее малых изменениях («производная равна нулю»), следовательно, она постоянна.

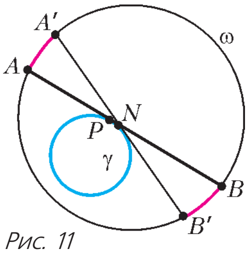
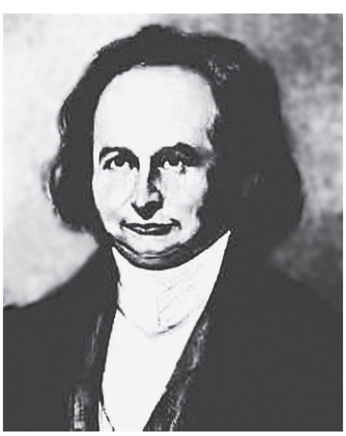


Рис. 11

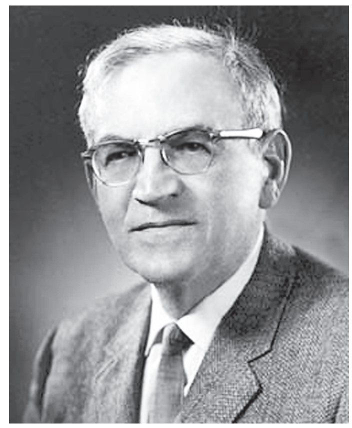
Теорема Понселе доказана. Пока только для случая вложенных окружностей (γ лежит внутри ω). Доказательства в двух других случаях мы отложим до параграфа 9. В них используется та же самая плотность $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}}$, но дальнейшие рассуждения несколько иные.



Карл Густав Якоби

Комментарий. Идею доказательства теоремы Понселе с помощью распределения плотности на окружности предложили независимо два выдающихся математика XIX века: немецкий – Карл Густав Якоби (1804–1851) и французский – Жозеф Бертран (1822–1900). Их рассуждения были несколько более сложными и использовали понятие эллиптического интеграла. Столетие спустя они были переосмыслены и дополнены американцем Исааком Шёнбергом (1903–1990), прославившимся, прежде всего, работами по прикладной математике. Определение плотности через квадратичную функцию f, задающую окружность (или конику) γ, предложил современный российский математик Аскольд Георгиевич Хованский. Интересное развитие эта идея получила в работах А.А. и А.Д.Пановых («Мат. просвещение» №5, 2001 г.) и Е.А.Авксентьева («Мат. сборник», №5, 2014 г.).

Жозеф Бертран



Исаак Шёнберг

На самом деле, функция $f(M)$ – это не что иное, как степень точки M относительно окружности γ. Поэтому плотность $\rho(M)$ равна единице, деленной на корень из степени точки M, т.е. единице, деленной на длину касательной к окружности γ из точки M. Как видим, эту плотность можно определить и без координат. Мы, однако, нарочно ввели координаты, поскольку с ними удобнее делать обобщения этой конструкции, чем мы сейчас и займемся.

7. Обобщения и следствия

Теорема Понселе для коник. Мы нигде в доказательстве не пользовались тем, что внутренняя кривая – это окружность. Внешней окружностью пользовались (пользовались тем, что при пересечении двух хорд образуются подобные треугольники). А внутренней – нет. В качестве внутренней кривой γ подойдет любая, уравнение которой задается квадратичной функцией. Последнее важно потому, что при ограничении на прямую AB должна появиться парабола. Например, подойдет эллипс, который задается уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Для него функция $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ определит плотность по той же формуле $\rho(M) = 1/\sqrt{f(M)}$, и далее все доказательство повторится. Более того, вместо окружности ω тоже можно взять эллипс. Известно, что любой эллипс можно перевести в окружность с помощью проекции на подходящую плоскость. При этом прямые перейдут в прямые, касательные – в касательные и т.д. Чтобы доказать теорему Понселе для двух эллипсов, мы сначала эллипс ω переведем в окружность (проекцией) и на этой окружности построим плотность массы, соответствующей внутреннему эллипсу γ (который при проекции остался эллипсом). Далее доказательство совпадает дословно со случаем двух окружностей. Итак:

теорема Понселе верна для двух эллипсов.

А какие еще линии задаются квадратичными функциями? Квадратичной называется функция вида

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + q, \quad (1)$$

где из трех чисел a, b, c хотя бы одно не ноль. Двойки при коэффициентах b, d и e принято ставить, так удобнее. Линия на плоскости, задающаяся уравнением $f(x,y) = 0$, называется *квадрикой* или *коникой*. Кроме окружности и эллипса, коникой также является гипербола. Она задается функцией $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. Более знакомое нам определение гиперболы, с помощью функции $f(x,y) = xy - 1$, приводится к данному поворотом осей координат на $45°$. Наконец, парабола тоже является коникой. Для нее $f(x,y) = px^2 - y$. Есть еще *вырожденные* коники: пара прямых (например, при $f(x,y) = x^2 - y^2$), одна точка или вовсе пустое множество. Мы не будем их рассматривать. А вот среди невырожденных других коник нет. Только гипербола, парабола и эллипс (и его частный случай – окружность). Все невырожденные коники приводятся к одной из этих трех с помощью поворота и параллельного переноса системы координат. Каждая коника, так же как и эллипс, определяет плотность на окружности ω, и все доказательство теоремы Понселе проходит без изменений. Правда, в отличие от эллипса, гипербола или парабола не могут целиком располагаться внутри окружности ω. Поэтому ни та ни другая не могут выполнять роль «внутренней кривой» γ. Для того чтобы аккуратно доказать теорему Понселе для коник, мы должны сначала привести доказательства для окружностей в оставшихся двух случаях: когда окружности лежат вне друг друга и когда они пересекаются. Это мы сделаем в разделе 9. А теорему все равно сформулируем сейчас – не откажем себе в удовольствии.

Теорема 2. *Теорема Понселе верна для любой пары невырожденных коник.*

Диагонали многоугольников Понселе. Вернемся к случаю двух окружностей. Внутренняя окружность γ задана уравнением $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, она определяет плотность $\rho(M) = 1/\sqrt{f(M)}$ на внешней окружности ω. Все прямые, касающиеся γ, отсекают от ω дуги одинаковой массы m. На этом основано доказательство теоремы Понселе. Конечно же, верно и обратное: каждая хорда, отсекающая от окружности ω дугу массой m, касается окружности γ. А верно ли, что все хорды, отсекающие от нее дуги другой массы $m_1 \neq m$, тоже касаются одной окружности?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к квадратичной функции f общего вида (1). Когда уравнение $f(x,y) = 0$ определяет окружность? Ответ: когда $b = 0$ и $a = c \neq 0$. В этом случае можно все уравнение разделить на a, затем выделить полные квадраты, получив уравнение окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = L$. Оно, правда, может не иметь решений (если $L < 0$), но мы не будем рассматривать этот случай. А если $L > 0$, то получаем окружность радиусом $R = \sqrt{L}$. Если две квадратичные функции f и g удовлетворяют соотношениям $b = 0$ и $a = c$, то им удовлетворяет и функция $f + \lambda g$ для любого числа λ. Значит, для любого λ уравнение $f(x,y) + \lambda g(x,y) = 0$ задает окружность[3] (если имеет решения). Итак, *можно сложить с коэффициентом λ любые две окружности и при этом снова получить окружность.*

Пусть наши окружности γ и ω задаются квадратичными функциями f и g соответственно. Так как на окружности ω имеем $g(x,y) = 0$, то функция $f + \lambda g$ на этой окружности равна функции f, а значит, определяет на ней ту же самую плотность $\rho(M) = \frac{1}{\sqrt{f(M)}} = \frac{1}{\sqrt{f(M) + \lambda g(M)}}$. Подчеркнем, что f и $f + \lambda g$ – разные функции, но в точках окружности ω они совпадают. Возьмем теперь произвольную дугу AB массы m_1. Подберем число λ так, чтобы окружность, заданная уравнением $f + \lambda g = 0$, касалась прямой AB. Это возможно, например, из соображений непрерывности. Функция g отрицательна во всех точках интервала (A,B), поскольку эти точки лежат внутри ω. Поэтому при больших положительных λ функция $f + \lambda g$ будет отрицательна на этом интервале, а при больших отрицательных λ – положительна. Значит, найдется λ, при котором она будет обращаться в ноль ровно в одной точке интервала, и окружность $f + \lambda g = 0$ будет касаться прямой AB в этой точке. Итак, одна хорда окружности ω, отсекающая заданную массу и касающаяся окружности $f + \lambda g$, найдется. Значит, все хорды, касающиеся этой окружности, будут отсекать ту же самую массу.

Теорема 3. *Все хорды, отсекающие от окружности дуги одинаковой массы, касаются одной окружности.*

Теперь начинаем пожинать плоды. Много красивых и полезных фактов следуют из этой теоремы. Например, если начать процесс Понселе из любой точки A_1 и построить k-звенную ломаную $A_1 \ldots A_k$, вписанную в окружность ω и описанную относительно γ, то каждая дуга $A_i A_{i+1}$ имеет массу m, а значит, дуга $A_1 A_k$ имеет массу km, независимо от начальной точки A_1. Следовательно, хорда $A_1 A_k$ касается некоторой фиксированной окружности. Независимо от того, замыкается ломаная Понселе или нет!

Следствие 1. *Для всех k-звенных ломаных $A_1 \ldots A_k$, вписанных в одну окружность и описанных относительно другой, прямая $A_1 A_k$ касается фиксированной окружности с центром на линии центров данных окружностей.*

Доказательство. То, что $A_1 A_k$ касается фиксированной окружности, мы уже доказали. То, что ее центр лежит на линии центров данных окружностей, следует из симметрии.

---

[3] При некотором λ у этого уравнения будет $a = c = 0$, и тогда оно определяет не окружность, а прямую. Мы будем считать эту прямую частным случаем окружности.

Построим теперь бесконечную вписанно-описанную ломаную $A_1A_2\ldots$ Если она замыкается через n шагов, то последовательность $A_1, A_2, \ldots$ периодическая с периодом n, т.е. $A_{i+n} = A_i$ для любого i. Отрезок A_iA_{i+k} назовем диагональю k-го порядка многоугольника $A_1\ldots A_n$. Диагональ первого порядка – это сторона, второго – это диагональ, отделяющая одну вершину. Максимальный порядок k равен $\left[\frac{n}{2}\right]$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Следствие 2. *Для всех вписанно-описанных ломаных $A_1A_2\ldots$ (замкнутых или нет) и для каждого $k \geq 1$ отрезки A_iA_{i+k}, $i = 1, 2, \ldots$, касаются одной окружности. В частности, у любого вписанно-описанного n-угольника все диагонали k-го порядка касаются одной окружности. Центры всех этих окружностей лежат на линии центров вписанной и описанной окружностей (рис.12).*

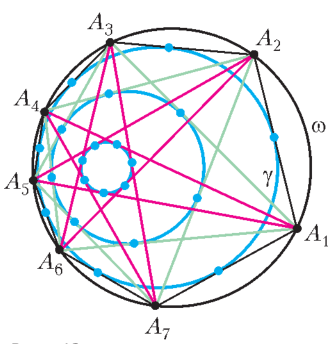


Рис. 12

Например, если число n четно, т.е. $n = 2r$ для некоторого целого r, то диагональ r-го порядка называется *главной*. У n-угольника ровно n главных диагоналей. Все они касаются одной окружности. Посмотрим, что это за окружность. Берем диагональ A_1A_{r+1} и начинаем двигать вершину A_1 по описанной окружности до точки A_{r+1}. Отрезок A_1A_{r+1} поворачивается на $180°$ и переходит в $A_{r+1}A_1$. При этом он все время касается некоторой окружности. Значит, эта окружность помещается между двумя совпадающими прямыми, т.е. является точкой. Таким образом, мы доказали

Следствие 3. *У вписанно-описанного многоугольника с четным числом сторон все главные диагонали пересекаются в одной точке, лежащей на линии центров вписанной и описанной окружностей.*

Если у двух данных окружностей существует один вписанно-описанный n-угольник, то их будет бесконечно много и у них всех будет одна и та же точка пересечения главных диагоналей. Уже для $n = 4$ получается интересное следствие:

Следствие 4. *Точка пересечения диагоналей вписанно-описанного четырехугольника лежит на линии центров окружностей. Для всех четырехугольников с данными вписанной и описанной окружностями эта точка одна и та же.*

С помощью этого факта несложно решить упражнение 8 о построении четырехугольника по его описанной окружности, центру вписанной окружности и одной вершине. Попробуйте это сделать!

8. Пучки окружностей и Большая теорема Понселе

В теореме 3 мы доказали, что все хорды окружности ω, стягивающие дуги одной массы, касаются одной окружности. И смотрите, сколько замечательных фактов, помимо теоремы Понселе, отсюда следует! Но если внимательно посмотреть доказательство теоремы, станет ясно, что доказали мы немножко больше, но не воспользовались этим. Ведь окружность, которой касаются все хорды, имеет весьма специальный вид: она задается уравнением $f + \lambda g = 0$, где, напомним, f и g – квадратичные функции, задающие окружности γ и ω соответственно, λ – некоторое число. Мы подошли к одному из важных понятий геометрии.

Определение 1. *Пучком окружностей называется множество окружностей, задающихся уравнениями $f + \lambda g = 0$ для всевозможных $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda = \infty$, где f и g – две квадратичные функции, задающие разные окружности.*

При $\lambda = \infty$ считается, что уравнение $f + \lambda g = 0$ принимает вид $g = 0$. Таким образом, обе окружности γ и ω, определяющие пучок, принадлежат ему: первая при $\lambda = 0$ и вторая при $\lambda = \infty$. Как мы заметили ранее, ровно при одном значении λ функция $f + \lambda g$ будет не квадратичная, а линейная и будет определять прямую. Таким образом, в любом пучке есть ровно одна прямая, которую мы, для простоты, будем также называть окружностью. Множество окружностей, проходящих через две заданные точки плоскости, образует пучок. Множество окружностей, касающихся друг друга в одной точке, также образует пучок. Наконец, если две окружности, определяющие пучок, не пересекаются, то и все окружности пучка не имеют общих точек. У пучков есть много замечательных свойств. Например, все окружности пучка ортогональны двум заданным окружностям, а их центры всегда лежат на одной прямой. Эти и другие свойства пучков – в упражнениях 15–18.

Следствие 5. *Все окружности, о которых идет речь в теореме 3 и следствиях 1–4, принадлежат одному пучку, определяемому вписанной и описанной окружностями.*

В доказательстве теоремы 3 мы установили важнейшее свойство:

Следствие 6. *Если в пучке выбрать одну окружность ω, то все остальные окружности этого пучка определяют на ω одну и ту же плотность.*

Возьмем n произвольных окружностей (не обязательно различных) этого пучка $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Для простоты будем считать, что все они лежат внутри ω. Возьмем произвольную точку A_1 окружности ω, проведем хорду A_1A_2, касающуюся ω_1, затем проведем хорду A_2A_3, касающуюся ω_2, и т.д. Все хорды проводятся в одном направлении. Получим ломаную $A_1\ldots A_{n+1}$, вписанную в окружность ω, каждая ее сторона A_kA_{k+1} касается своей окружности ω_k.

Теорема 4 (Большая теорема Понселе). *Пусть окружности $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_n$ (не обязательно различные) принадлежат одному пучку (рис.13). Если для некоторой точки $A_1 \in \omega$ существует n-угольник $A_1, \ldots, A_n$, вписанный в ω, стороны которого последовательно касаются окружностей $\omega_1, \ldots, \omega_n$, а все дуги A_iA_{i+1} одинаково направлены, то он существует для любой начальной точки $A_1 \in \omega$, при этом можно как угодно менять порядок окружностей ω_k.*

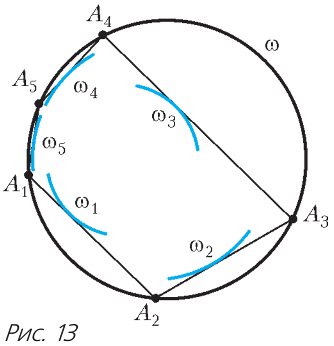


Рис. 13

Доказательство. В самом деле, любая хорда окружности ω, касающаяся окружности ω_k, стягивает дугу окружности ω фиксированной массы m_k. Поэтому замыкание будет, если сумма масс $m_1 + \ldots + m_n$ в целое число раз больше массы всей окружности ω. Это свойство не зависит ни от начальной точки A_1, ни от порядка окружностей ω_k.

Комментарий. Теорема Понселе – это частный случай теоремы 4, когда $\omega_1 = \ldots = \omega_n$. Идея теоремы о замыкании с пучками окружностей восходит к самому Понселе (1822). В окончательной формулировке теорема 4 появилась, по-видимому, в 1942 году в книге «Коники» великого французского математика, основоположника современной теории меры и интеграла Анри Лебега (1875–1941).

Упражнения

15. Центры всех окружностей пучка лежат на одной прямой.

16. Все окружности пучка ортогональны двум фиксированным окружностям. Обратно: множество всех окружностей, ортогональных двум фиксированным окружностям, является пучком (напомним, что две окружности называются ортогональными, если касательные к ним, проведенные в точке их пересечения, перпендикулярны).

17. Сферы, содержащие фиксированную окружность, высекают на произвольной плоскости окружности одного пучка. Более того, любой пучок окружностей на плоскости может быть получен таким способом.

18. Даны две окружности и число $k \neq 1$. Множество точек на плоскости, отношение степеней которых относительно данных окружностей равно k, является окружностью, принадлежащей пучку, порожденному двумя данными окружностями.

Указание. Воспользуйтесь методом координат.

19. Две окружности касаются, на одной из них берется произвольная точка A и проводятся хорды AB и AC, касающиеся второй окружности. Тогда прямая BC касается фиксированной окружности, которая, к тому же, касается двух данных окружностей.

20. Пусть окружность γ лежит внутри окружности ω. Если $A_1A_2\ldots$ и $B_1B_2\ldots$ – две вписанно-описанные ломаные с одинаковым направлением обхода, то все хорды A_iB_i касаются одной окружности, лежащей в пучке, порожденном γ и ω.

9. Выравнивающее отображение

Настало время доказать теорему Понселе в двух оставшихся случаях расположения окружностей. Нас, однако, ожидает неприятный сюрприз: схема доказательства теоремы 1 здесь не работает. Если, скажем, окружности ω и γ расположены вне друг друга, то функция $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, определяющая окружность γ, по-прежнему будет положительна на ω, а значит, будет определять на ней плотность $\rho(M) = \dfrac{1}{\sqrt{f(M)}}$. Но эта плотность уже не обладает свойством постоянства масс. Рассмотрим произвольную хорду AB окружности ω, продолжение которой касается γ. Если вращать прямую AB так, чтобы она все время касалась γ, то дуга AB будет уменьшаться (на рисунке14 дуга $A'B'$ лежит строго внутри AB), пока не превратится в точку K_1 (в этот момент прямая станет общей внешней касательной γ и ω), а затем вовсе исчезнет. Поэтому длина дуги AB не может быть постоянной. А что же будет? Для любого положения касательной $A'B'$ дуги AA' и BB' имеют одинаковую массу. Доказательство такое же (дословно!), как в теореме 1. В частности, дуги AK_1 и BK_1 имеют одинаковую массу. Как это свойство докажет теорему Понселе? Для того чтобы сделать все рассуждения наглядными, мы применим *выравнивающее отображение*. Оно отображает одну окружность на другую, при этом массы дуг переводит в длины.

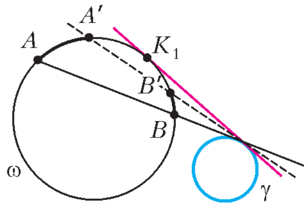


Рис. 14

Пусть нам дана окружность ω, на которой задана некоторая плотность ρ (рис.15). Обозначим через m массу всей окружности. Выберем на ней произвольную точку A. Возьмем теперь окружность α длины m и произвольную точку a на ней. Далее условимся, что все дуги проходятся в положительном направлении, а точки окружности α обозначаются маленькими буквами.

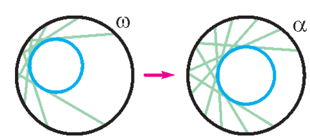


Рис. 15

Определение 2. *Отображение окружности ω на окружность α, при котором каждой точке $B \in \omega$ ставится в соответствие точка $b \in \alpha$ такая, что длина дуги ab равна массе дуги AB, называется выравнивающим.*

Таким образом, все дуги окружности ω, имеющие одинаковую массу, переходят в равные дуги окружности α. Поэтому мы и назвали такое отображение выравнивающим: оно выравнивает плотность на окружности.

Например, если на ω задана плотность $\rho(M) = 1/\sqrt{f(M)}$, порожденная окружностью γ, лежащей внутри ω (f – квадратичная функция, задающая окружность γ), то все хорды окружности ω, касающиеся γ, переходят в равные хорды окружности α. Таким образом, *после выравнивающего отображения теорема Понселе для произвольной пары вложенных окружностей переходит в теорему Понселе для концентрических окружностей, где она очевидна*. Более того, то же верно и для хорд, касающихся какой-либо окружности пучка, порожденного ω и γ: они также переходят в равные хорды окружности α. Поэтому и Большая теорема Понселе приводится к случаю концентрических окружностей и становится очевидной.

Наша задача состоит в том, чтобы применить выравнивающее отображение для двух других случаев расположения окружностей.

Доказательство теоремы Понселе для окружностей, расположенных вне друг друга. Проведем общую внешнюю касательную к нашим окружностям, обозначим через K_1 точку ее касания с окружностью ω (рис.16). Будем поворачивать эту прямую так, чтобы

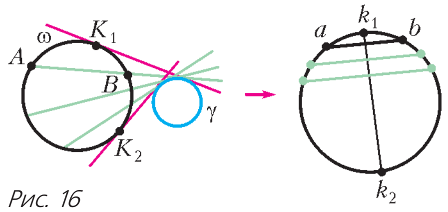


Рис. 16

она все время касалась окружности γ и пересекала окружность ω (в некоторых точках A и B), пока она не коснется ее в некоторой точке K_2. Как мы установили, при любом положении этой прямой массы дуг AK_1 и K_1B равны. В частности, точки K_1 и K_2 делят массу окружности ω пополам. Применяем выравнивающее отображение: на окружности α образуется диаметр k_1k_2 и симметричные относительно него точки a и b. Итак, каждая хорда AB из данного семейства касательных переходит в хорду ab окружности α, перпендикулярную диаметру k_1k_2. Так же поступаем со вторым семейством касающихся хорд, начинающимся со второй общей внешней касательной окружностей ω и γ и заканчивающимся их второй общей внутренней касательной (пусть L_1 и L_2 – точки их касания с ω). Эти хорды переходят в семейство хорд окружности α, перпендикулярных диаметру l_1l_2. Таким образом, выравнивающее отображение превращает теорему Понселе для этого случая в такое утверждение:

В окружности α проведено два диаметра. Из произвольной точки $a_1 \in \alpha$ проводим хорду a_1a_2, перпендикулярную первому диаметру, затем хорду a_2a_3, перпендикулярную второму, и т.д. (первый и второй диаметры чередуются). Тогда если все проведенные хорды невырожденные (отличны от точек) и $a_{n+1} = a_1$ для некоторого n, то n четно и замыкание будет выполнено для любой начальной точки $a_1 \in \alpha$.

Для доказательства при четном n достаточно вспомнить, что композиция двух симметрий относительно прямых – это поворот на угол 2β, где β – угол между прямыми. Мы каждый раз отражаем точку относительно первого диаметра, затем – относительно второго. И делаем так $r = \dfrac{n}{2}$ раз. Поэтому точка a_n получается из точки a_1 поворотом на угол $r \cdot 2\beta = n\beta$ относительно центра окружности. Значит, замыкание происходит, если $n\beta = 360°k$ для некоторого целого k, и это не зависит от выбора начальной точки. Если же n нечетно, то одна из хорд будет вырожденной (докажите это!), поэтому этот случай невозможен.

Доказательство теоремы Понселе для пересекающихся окружностей. Пусть окружности пересекаются в точках P_1 и P_2. Нас интересует только та дуга P_1P_2 окружности ω, которая находится все окружности γ. Из остальных точек окружности ω просто нельзя провести касательные к γ. Поэтому мы определим выравнивающее отображение не всей окружности ω, а только ее дуги P_1P_2 и не на окружность, а на отрезок p_1p_2, который мы также будем называть α. Проведем общую касательную к окружностям ω и γ, назовем точки касания K_1 и H_1 соответственно (рис.17). Будем

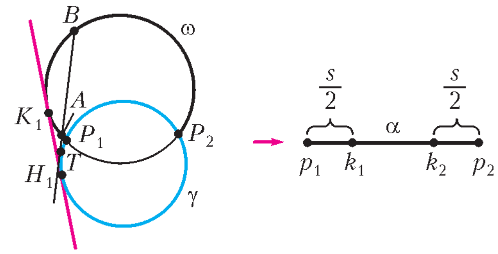


Рис. 17

поворачивать эту прямую так, чтобы она все время касалась окружности γ и пересекала окружность ω (в некоторых точках A и B). Пока точка касания T, вышедшая из точки H_1, не дошла до P_1, дуги AK_1 и K_1B имеют одинаковые массы. Когда T совпала с точкой P_1, эти массы стали максимальны. Обозначим через s массу дуги AB в этом положении, тогда дуги AK_1 и K_1B имеют массу $s/2$. Далее точка T движется по дуге P_1P_2, масса дуги AB при этом остается постоянной и равной s. Когда T переходит за точку P_2 масса дуги AB вновь уменьшается до нуля и в каждый момент делится пополам точкой K_2 (точкой касания второй общей касательной с ω). Выравнивающее отображение переводит дугу P_1P_2 в отрезок $\alpha = p_1p_2$ длины m, на котором расположены точки k_1 и k_2 так, что $p_1k_1 = p_2k_2 = \dfrac{s}{2} < \dfrac{m}{2}$. Хорда AB переходит в отрезок ab такой, что либо $ab = s$ (если точка касания T лежит на дуге P_1P_2), либо $ap_1 + bp_1 = s$ (если T лежит на дуге H_1P_1), либо $ap_2 + bp_2 = s$ (если T лежит на дуге H_2P_2). Итак, выравнивающее отображение превращает теорему Понселе для этого случая в такое утверждение:

Дан отрезок длины m и число $s < m$. В концах отрезка поставлены стенки, а между ними прыгает кузнечик. Начиная из некоторой точки a_1, он совершает прыжки длины s вдоль отрезка в одном направлении. Когда он сталкивается со стенкой, он отскакивает от нее, при этом сумма длин, которые он пролетел до и после столкновения, равна s. Затем он продолжает прыгать в противоположном направлении, пока не столкнется со второй стенкой, и т.д. Если через n прыжков кузнечик вернется в точку a_1, побывав при этом в каждой из n точек по одному разу, то его путь всегда будет замыкаться через n прыжков, независимо от начальной точки.

Для доказательства достаточно «раздвоить» отрезок α, сделав из двух его копий окружность длиной $2m$. Получим две полуокружности с общим диаметром p_1p_2. Когда кузнечик скачет в одном направлении, он двигается по одной полуокружности, когда в противоположном – по другой. Получается, что по окружности кузнечик двигается все время в одном направлении, с постоянной длиной прыжка s. Поэтому замыкание через n прыжков происходит, когда $sn = 2mk$ для некоторого целого k.

Всё. Теорема Понселе полностью доказана. Причем не только для окружностей, но и для коник.

Доказательство теоремы 2 мы провели для двух эллипсов, расположенных один внутри другого. Теперь возьмем две произвольные коники ω и γ. Применим стереографическую проекцию, переводящую ω в окружность. Напомним, что стереографическая проекция определяется так: выбирается центр проекции O и плоскость проекции σ (рис.18). Проекция точки A – это точка пересечения прямой OA с плоскостью σ. Известно, что стереографическая проекция переводит конику в конику, причем можно так подобрать центр и плоскость, чтобы она перевела данную невырожденную конику в окружность. Итак, мы переведем ω в окружность ω', а коника γ при этом перейдет в какую-то конику γ'. Теперь определим на окружности ω' плотность с помощью коники γ', и повторяем наше доказательство теоремы Понселе.

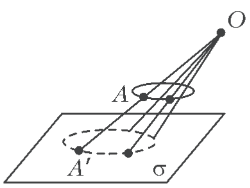


Рис. 18

Комментарий. Эйлер и Фусс жили в России, Понселе был членом Петербургской Академии наук, отец Кэли родился и провел детство в Петербурге, родной брат Якоби – российский физик, академик Борис Семенович Якоби. Степень интеграции тогдашней России в европейский мир на примере теоремы Понселе.

10. Послесловие

Знаете ли вы задачу о покрытии круга полосками? Вот она:

Дано несколько длинных прямоугольных полосок различной ширины, сумма их «ширин» меньше 2. Можно ли покрыть ими круг радиуса 1?

Интуиция подсказывает, что нет, но обосновать этот ответ непросто. Через площадь нельзя – сумма площадей, которые полоски покрывают на круге, может быть больше площади круга. Через периметр тоже нельзя – полосками можно покрыть всю окружность, ограничивающую круг. Известное решение этой задачи использует выход в пространство, замену круга – шаром, а полосок – слоями. Но оказывается, можно решить и без этого, если вместо площади использовать массу. Достаточно распределить плотность на круге так, чтобы масса пересечения круга с любой параллельной полоской была пропорциональна ширине полоски. Тогда сумма масс, покрываемых всеми полосками, будет такой же, как и при параллельном покрытии, ставя полоски вплотную одна к другой. Но в последнем случае мы круг не покроем, а значит, сумма масс, покрываемых всеми полосками, меньше массы круга, что и завершает доказательство.

Прием этот часто встречается в олимпиадных задачах о покрытиях фигур. Например: можно ли покрыть правильный треугольник двумя правильными треугольниками с меньшей стороной? Ответ: нет, поскольку каждый из треугольников покрывает не более одной вершины, а их три. Это решение, по сути, также использует массы, правда точечные. В каждую вершину треугольника положим грузик массой 1, тогда каждый из маленьких треугольников покроет массу не более 1, а масса всего треугольника равна 3. В задаче о полосках мы вместо точечных масс используем непрерывные.

В чем же связь с теоремой Понселе? А вот в чем: единственная плотность на круге, обладающая указанным свойством, дается формулой $\rho(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Да-да, та самая плотность, которая используется в теореме Понселе, но только функция $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ взята с обратным знаком. Должна быть причина этой связи, которой пока не видно. Еще одна загадка, связанная с теоремой Понселе. А сколько их еще впереди!..

Упражнения

21. Докажите свойство плотности $\rho(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ в задаче о полосках.

22. Даны две прямые. Кузнечик прыгает с одной на другую и обратно. Длина его прыжка постоянна, и он никогда не возвращается в точку, откуда только что прыгнул. Тогда если через n прыжков он вернется в начальную точку, то это будет выполнено для любой начальной точки, из которой можно сделать первый прыжок.

23. Даны две окружности. Если существует n-угольник, вписанный в первую окружность, середины сторон которого лежат на второй, то таких n-угольников бесконечно много и любая точка первой окружности может быть его вершиной. (*Это утверждение называется Понзаг – от слов «Понселе» и «зигзаг».*)

В упражнениях 24–27 – геометрическое доказательство теоремы Понселе, основанное на авторском рассуждении самого Понселе.

Упражнения

24. Если прямая пересекает прямые a_1 и a_2 под равными углами, то существует окружность, касающаяся a_1 и a_2 в точках их пересечения с этой прямой.

25. Если прямая пересекает диагонали вписанного четырехугольника под равными углами, то она пересекает и каждую пару его противоположных сторон под равными углами.

26. Для прямой из упражнения 25 существует окружность ω_1, касающаяся диагоналей в точках их пересечения с этой прямой, а также окружности ω_2, ω_3, определяемые аналогично для пар противоположных сторон. Эти три окружности и описанная окружность четырехугольника принадлежат одному пучку.

27. Пусть окружность γ лежит внутри окружности ω. Если $A_1A_2\ldots$ и $B_1B_2\ldots$ – две вписанно-описанные ломаные с одинаковым направлением обхода (P_k и Q_k – точки касания окружности γ со сторонами A_kA_{k+1} и B_kB_{k+1} соответственно), то все хорды A_kB_k касаются одной окружности, лежащей в пучке, порожденном γ и ω (N_k – точки касания) и для любого k точки P_k, Q_k, N_k, N_{k+1} лежат на одной прямой.

С автором статьи можно связаться по адресу:
v-protassov@yandex.ru