Салфетки «Кванта» и теорема Пифагора

М.ПЕТКОВА

В РАЗНОЕ ВРЕМЯ В «ЗАДАЧНИКЕ «КВАНТА» ПРЕДлагались задачи о покрытиях квадратного стола бумажными салфетками в несколько слоев. Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать на части (это требование будет сохраняться на протяжении всей статьи). Мы обсудим способ, который позволяет решить эти задачи, а заодно исследовать и другие подобные покрытия.

Начнем с известной (почти) каждому теоремы Пифагора. По-видимому, о ней – одной из важнейших теорем планиметрии – знали еще во втором тысячелетии до новой эры. Неудивительно, что сейчас известно несколько сотен различных ее доказательств. Есть и весьма экзотические: например, английскому математику первой половины XX века Г.Х. Харди приписывают доказательство, использующее дифференциальные уравнения. К счастью, нам оно не понадобится. Итак…

Теорема Пифагора. *Квадрат гипотенузы с прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов a и b:*

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

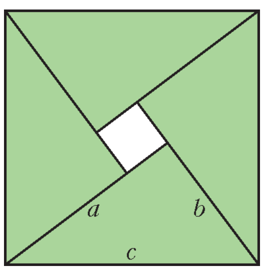

Рис. 1

Доказательство. Сложим четыре копии прямоугольного треугольника с катетами $a > b$ и гипотенузой c, как на рисунке 1, чтобы получился квадрат со стороной c. Тогда в центре останется квадратная дырка со сторонами $a - b$. Осталось посчитать площади:

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2 .$$

Если треугольник равнобедренный, то дырки не получится, но на подсчет это не влияет. Теорема доказана.

Но расставаться с рисунком 1 рано: он даст нам ключ к решению задач о салфетках. Отразим каждый из зеленых треугольников относительно его гипотенузы. Получится квадрат со стороной $a + b$, в который вписан квадрат со стороной c. На рисунке 2 отраженные треугольники покрашены желтым, а вся картинка повернута для удобства. Сумма площадей желтых треугольников равна сумме площадей зеленых – ведь при отражении площадь фигуры не меняется. Но тогда *удвоенная площадь вписанного квадрата равна сумме площадей большого квадрата и белого квадратика*.

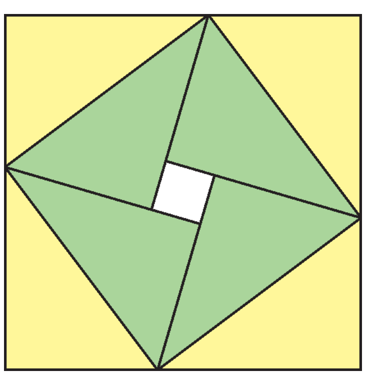
Рис. 2

Упражнение 1. Докажите этот факт алгебраически.

Теперь посмотрим, как сделанные наблюдения помогают решить задачи про покрытия.

Задача М1755* (В.Произволов). *Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя.*

Решение. Укладываем 9 салфеток в виде (желтого) квадрата размером 3×3 (рис.3). В этот квадрат вписываем (зеленый) стол площади 5 и загибаем четыре желтых треугольника. Площадь центрального (голубого) квадрата равна $2 \cdot 5 - 9$, т.е. равна 1. Стол, кроме центрального квадрата, уже покрыт в два слоя. Осталось покрыть центральный квадрат десятой салфеткой.

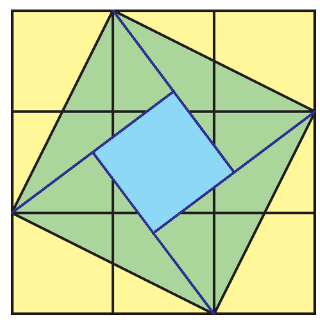
Рис. 3

В.Произволов решал эту задачу несколько иначе: он расположил пять салфеток, как на рисунке 4 (голубым цветом показаны лицевые стороны салфеток, зеленым – изнанки), а другие пять – как на рисунке 5, полученном из рисунка 4 симметрией относительно пунктирной линии (проведенной через середины сторон квадрата площади 5). Если совместить на одном столе эти два расположения салфеток, получится искомое покрытие.

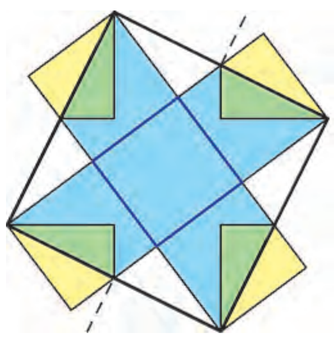
Рис. 4

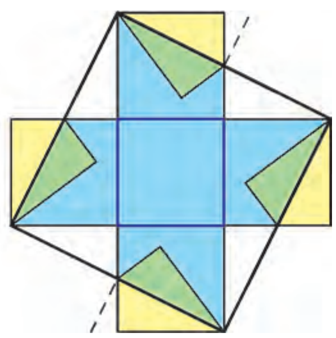
Рис. 5

Упражнение 2 (задача М1905, В.Произволов). Покройте квадратный стол размером 5×5 в два слоя 50 квадратными салфетками 1×1 так, чтобы никакой отрезок края любой салфетки не лежал на краю стола.

Задача М1944 (В.Произволов). *Квадратный стол площади 5 можно покрыть в четыре слоя пятью квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 4. Как это сделать?*

Решение. Укладываем 4 салфетки в виде квадрата размером 4×4 (рис.6), вписываем в него квадрат площади 10 и загибаем четыре треугольника. Площадь центрального квадратика равна $2\cdot 10-16$, т.е. 4. На его место кладем пятую салфетку и получаем квадрат площади 10, покрытый в два слоя. Если соединить середины сторон этого квадрата (на рисунке 7 он окрашен желтым), образуется квадрат площади 5 (он окрашен зеленым). Загнем у него желтые уголки и получим искомое покрытие в четыре слоя.

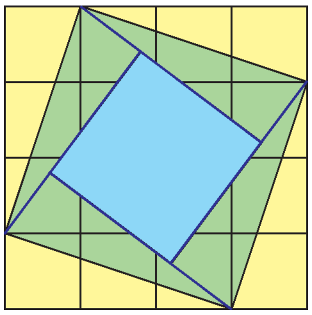
Рис. 6

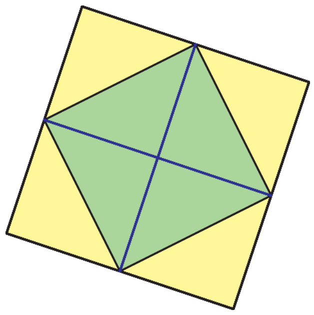
Рис. 7

Упражнение 3. Решите задачу М1944 при помощи рисунка 4.

Указание. Перегните систему салфеток сначала относительно одной средней линии квадрата, а затем относительно другой (пунктирной линии рисунка 4). Площадь квадрата до перегибаний равнялась 5. После двух перегибаний она уменьшится вчетверо, так что получится квадратный стол площади $\frac{5}{4}$, покрытый в четыре слоя салфетками размера 1×1. Осталось увеличить вдвое стороны салфеток и стола!

Цель достигнута – все перечисленные задачи решены нашим способом. Но мы пойдем немного дальше.

Общий вопрос. *При каких натуральных n квадратный стол площади n можно покрыть в два слоя $2n$ квадратными салфетками, площадь каждой из которых равна 1?*

Ответ. При n, которые можно записать в виде a^2+b^2, где a и b – целые.

Доказательство. Любое допустимое покрытие стола можно представлять как оклеивание такими же салфетками с двух сторон тонкого картонного квадратного листа (размером, естественно, с крышку стола). Удобнее рассуждать именно с этой точки зрения.

Сначала проверим, что если квадратный лист площади n удалось оклеить с двух сторон $2n$ салфетками площади 1, то n является суммой квадратов целых чисел. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Нанесем краску на границы квадратиков-салфеток, наклеенных на картонный лист. Положим лист на плоскость и будем «перекатывать» его, поворачивая вокруг сторон квадрата. Когда лист ложится на плоскость, краска отпечатывается в тех местах, где к плоскости прилегают границы единичных квадратиков. При этом отпечатки границ перегибающихся салфеток тоже будут составлять целые единичные квадратики. Если «перекатывать» квадрат сколько угодно раз во все стороны, получится рисунок – примыкающие друг к другу единичные квадратики, покрывающие всю плоскость. Будем называть такое покрытие *паркетом*.

Шаг 2. Периодом паркета называется любой сдвиг (в каком-то направлении и на какое-то расстояние), который переводит паркет в себя. По построению, получившийся у нас паркет имеет два периода. Это сдвиги вдоль сторон исходного квадрата на расстояние, в 2 раза больше, чем длина стороны квадрата, т.е. сдвиги в двух взаимно перпендикулярных направлениях, каждый – на расстояние $2\sqrt{n}$.

Шаг 3. Но у любого паркета, состоящего из единичных квадратиков, есть период длины 1. В самом деле, если два квадратика примыкают по части стороны, как, например, на рисунке 8, то дальше прямые углы заполняются однозначно и получаются две горизонтальные полоски (рис.9). Рассматривая, как квадратики примыкают к этим полоскам сверху и снизу, получаем, что там тоже будут полоски, и т.д. Значит, весь паркет состоит из горизонтальных полосок и поэтому имеет период – горизонтальный сдвиг на 1.

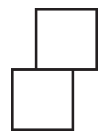
Рис. 8

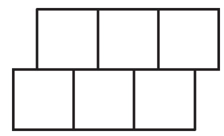
Рис. 9

Если нет пары квадратиков, которые примыкают по части стороны, получается обычный клетчатый паркет, у которого даже два периода единичной длины.

Шаг 4. Введем систему координат так, чтобы все полоски, полученные на предыдущем шаге, были горизонтальными, а начало координат совпадало с вершиной одного из квадратиков паркета. Тогда любая вершина любого квадратика паркета имеет целую ординату. Представим один из периодов, найденных на шаге 2, как сдвиг на s вправо и на t вверх. Тогда второй период – сдвиг на то же расстояние, но в перпендикулярном направлении, – будет сдвигом на t вправо и на s вниз (или на t влево и на s вверх). Так как при этих сдвигах начало координат должно переходить в вершину квадратика, смещение по вертикали должно быть на целое число, откуда оба числа s и t – целые.

По теореме Пифагора, $s^2+t^2=\left(2\sqrt{n}\right)^2=4n$. Из этого равенства следует, что s и t четные: $s=2a$, $t=2b$, а значит, число n представимо в виде a^2+b^2, где a и b – целые, что и требовалось доказать.

Осталось проверить, что если $n=a^2+b^2$, где a и b – целые, то квадратный лист площади n можно оклеить с двух сторон $2n$ квадратиками площади 1. Пример такой оклейки строится по приведенному доказательству. Рассмотрим обычный паркет, составленный из единичных квадратиков. Если $n=a^2+b^2$, то на этот паркет можно положить квадратный лист площади n так, чтобы его вершины попали в вершины паркета. Тогда одна сторона листа покрывается той частью паркета, которую он занимает, а противоположная сторона покрывается отраженной частью паркета.