Теорема об изогоналях

А.КУЛИКОВА, Д.ПРОКОПЕНКО

Прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, мы будем называть изогоналями относительно этого угла. В статье пойдет речь о следующей важной теореме и ее применениях.

Теорема об изогоналях. *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD. Прямые AC и BD пересекаются в точке Q, прямые AB и CD – в точке P. Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.*

На рисунке 1 приведены два из возможных случаев расположения изогоналей *OP* и *OQ* относительно угла *AOD*. Для удобства синим цветом мы будем выделять стороны исходного угла, а красным и зеленым цветом – отрезки, лежащие внутри равных углов (отрезки *AB* и *CD* или *AC* и *BD*).

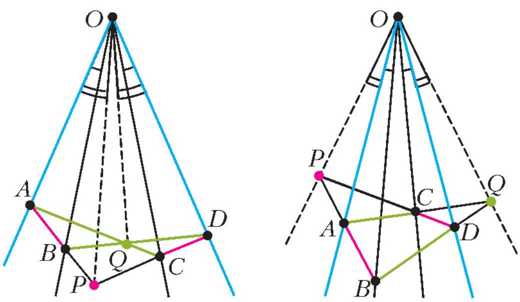

Рис. 1

В конце статьи приведем одну полезную лемму о свойстве и признаке изогоналей и докажем теорему. А сначала покажем, как работает эта теорема.

Перейдем к задачам. Начнем с частного случая, когда изогонали *OB* и *OC* совпали.

Эта статья является переработанным вариантом доклада ученицы 11 класса А.Куликовой на Московской математической конференции школьников (ММКШ) в 2016 году. Второй автор статьи был руководителем этой работы.

Биссектриса как совпавшие изогонали

Первая задача эквивалентна задаче М141 из «Задачника «Кванта».

Задача 1. *В треугольнике ABC чевианы* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *пересекаются в одной точке (рис.2). Оказалось, что* $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. *Докажите, что* AA_1 *– высота.*

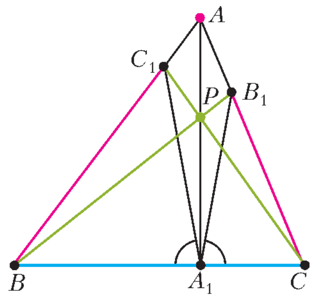

Рис. 2

Решение. Применим теорему об изогоналях к развернутому углу BA_1C и изогоналям A_1C_1 и A_1B_1. Тогда A_1A и A_1P – совпавшие изогонали угла BA_1C, т.е. A_1A – биссектриса угла BA_1C. Следовательно, A_1A – высота треугольника *ABC*.

Задача 2 (Санкт-Петербургская олимпиада, 2008). *Дан вписанный четырехугольник ABCD. Диагонали AC и DB пересекаются в точке E, а прямые, содержащие противолежащие стороны, пересекаются в точке F (рис.3). На прямой EF взяли такую точку*

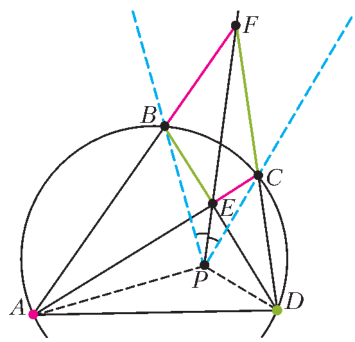

Рис. 3

P, что $\angle BPE = \angle EPC$. *Докажите, что* $\angle APE = \angle DPE$.

Решение. Заметим, что *PE* – совпавшие изогонали угла *BPC*. Точки *E* и *F* – точки на этой изогонали. Точки *A* и *D* – пересечение прямых *FB* и *CE*, *FC* и *BE* соответственно. По теореме об изогоналях, *PA* и *PD* также являются изогоналями угла *BPC*. Следовательно, прямые PA и PD симметричны относительно биссектрисы угла BPC. Можно показать, что случай $\angle APE + \angle DPE = 180°$ не реализуется, т.е. $\angle APE = \angle DPE$, что и требовалось доказать.

Интересно, что при решении задачи не использовалось то, что четырехугольник вписанный, значит, утверждение задачи верно для любых выпуклых четырехугольников.

Упражнение 1. В треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что A_1A – биссектриса угла $C_1A_1B_1$. Докажите, что AA_1 – высота.

Задача 3 (Турнир городов, 2006). *В треугольнике ABC проведена биссектриса AA', на отрезке AA' выбрана точка X (рис.4). Прямая BX пересекает AC в точке B', а прямая CX пересекает AB в точке C'.*

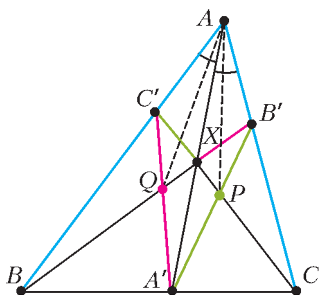

Рис. 4

Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P, а отрезки $A'C'$ и BB' пересекаются в точке Q. Докажите, что углы PAC и QAB равны.

Решение. Для решения задачи опять удобно рассматривать биссектрису $A'A$ как две совпавшие изогонали угла BAC. Точки X и A' лежат на изогонали, а C' и B' – на сторонах угла. Точки Q и P – пересечение прямых XB' и $A'C'$, XC' и $A'B'$ соответственно. По теореме об изогоналях, AQ и AP – тоже изогонали угла BAC, т.е. $\angle PAC = \angle QAB$.

Упражнения

2 (Украина, отбор на Международную олимпиаду, 2004). Пусть M – точка на биссектрисе AL треугольника ABC. Через L провели прямую, пересекающую AB в точке P, а продолжение AC за точку C – в точке Q. Пусть N – пересечение BM и PQ, а K – пересечение QM и BC. Докажите, что $\angle NAL = \angle KAL$.

3. На прямой, содержащей биссектрису угла B треугольника ABC, выбраны две точки K и L так, что B лежит между K и L. Прямые CK и AL пересекаются в точке M, прямые AK и CL – в точке N. Докажите, что $\angle MBA = \angle NBC$.

4 (Санкт-Петербург, Олимпиада ФМЛ 239, 2016). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке P, а лучи BC и AD – в точке Q. На диагонали AC нашлась такая точка T, что треугольники BTP и DTQ соответственно подобны. Докажите, что $BD \parallel PQ$.

Указание. Из подобия треугольников следует, что TB и TD – изогонали угла PTQ. Точки A и C – пересечение прямых PB и QD, BQ и PD соответственно. По теореме об изогоналях, TA и TC – совпавшие изогонали. Следовательно, TC – биссектриса угла PTQ. Осталось заметить, что треугольники ATP и ATQ подобны по двум углам (почему равны углы P и Q?) и имеют общую сторону, поэтому они равны.

Общий случай

Интересно, что в следующих двух задачах используются, на первый взгляд, совершенно разные конструкции. Задача 4 про треугольник, а задача 5 про параллелограмм.

Задача 4. *На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$ (рис.5). Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1.*

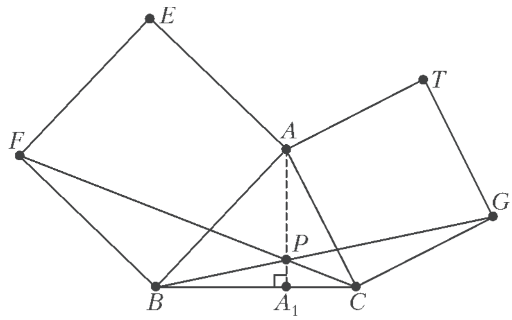

Рис. 5

Задача 5 (А.Полянский, Московская устная олимпиада по геометрии, 2010). *Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD, P – точка пересечения BN и DM (рис.6). Докажите, что прямые AP и MN перпендикулярны.*

Оказывается, что обе эти задачи являются частным случаем следующей конструкции.

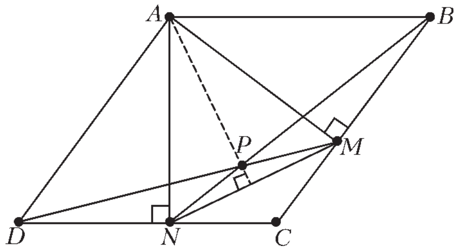

Рис. 6

Задача 6. *На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю (внутреннюю) сторону построены прямоугольные треугольники ABK и ACL с гипотенузами AK и AL, так что $\angle KAB = \angle LAC$ (рис.7). Докажите, что прямые KC и LB пересекаются на высоте AH.*

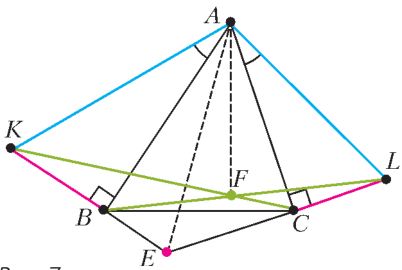

Рис. 7

Решение. Рассмотрим угол KAL; K и L – точки на сторонах угла, B и C – точки на изогоналях. Точки E и F – пересечение прямых KB и CL, KC и BL соответственно. По теореме об изогоналях, AE и AF также являются изогоналями. Заметим, что $\angle ABE = \angle ACE = 90^\circ$ (рис.8), следовательно, AE – диаметр описанной окружности треугольника ABC. Вспомним, что в любом треугольнике высота и диаметр описанной окружности, проведенные из одной вершины, являются изогоналями. Тогда точка F лежит на высоте.

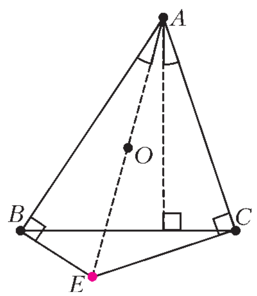

Рис. 8

Упражнения

5. Решите задачи 4 и 5.

6 (М.Тимохин, финал Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, 2016). Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а ее диагонали – в точке Q. Точка M на меньшем основании BC такова, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

Указание. Заметим, что $\angle AMB = \angle DMC$. Теперь можно применить теорему об изогоналях для развернутого угла BMC, для которого MA и MD – изогонали.

Следующая задача на Московской устной олимпиаде по геометрии в 2014 году в варианте 10–11 классов была самой сложной.

Задача 7 (А.Акопян, П.Кожевников). *Дан выпуклый четырехугольник ABCD (рис.9). Пусть I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a – центры вневписанных окружностей треугольников ABC и ADC соответственно (вписанных в углы BAC и DAC соответственно). Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD.*

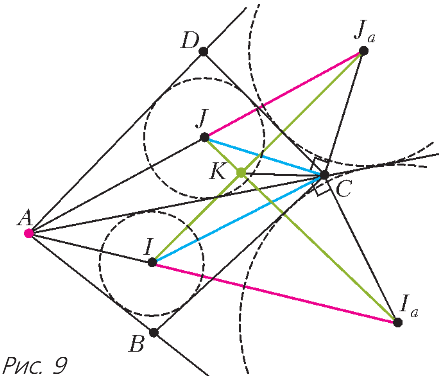

Рис. 9

Решение. Биссектриса треугольника перпендикулярна внешней биссектрисе, следовательно, углы ICI_a и JCJ_a – прямые. Пусть прямые IJ_a и JI_a пересекаются в точке K, прямые I_aI и J_aJ – в точке A. Для угла ICJ лучи CI_a и CJ_a – изогонали, следовательно, по теореме об изогоналях, CK и CA – изогонали угла ICJ.

Пусть $\angle ACD = 2\alpha$ и $\angle ACB = 2\beta$. Тогда $\angle ICK = \angle ACJ = \alpha$. В первом равенстве мы учли, что CA и CK – изогонали угла JCI. Теперь получим

$$\angle BCK = \angle BCI + \angle ICK = \beta + \alpha = \frac{1}{2}\angle BCD.$$

Следовательно, CK – биссектриса угла BCD.

Прежде чем перейти к задаче 8, попробуйте самостоятельно решить такое упражнение.

Упражнение 7 (П.Кожевников). На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC взяты точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K – точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

Задача 8 (В.Ясинский, Олимпиада по геометрии имени И.Ф.Шарыгина, заочный тур, 2013). *На стороне AB треугольника ABC взята произвольная точка C_1 (рис.10).*

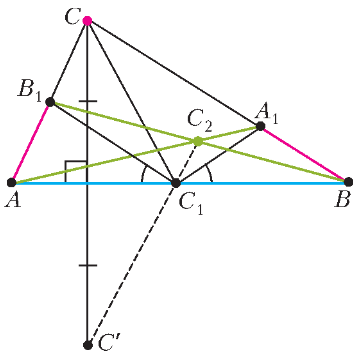

Рис. 10

Точки A_1, B_1 на лучах BC и AC таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2.

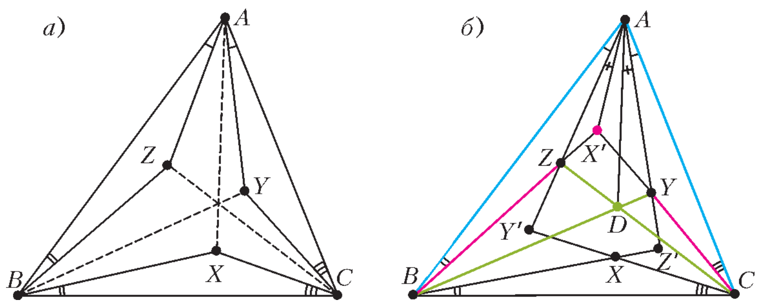

Рис. 11

Докажите, что все прямые C_1C_2 проходят через одну фиксированную точку.

Решение. Рассмотрим развернутый угол AC_1B, для которого C_1B_1 и C_1A_1 – изогонали. Точки C и C_2 – пересечение прямых AB_1 и BA_1, AA_1 и BB_1 соответственно. По теореме об изогоналях, C_1C_2 и C_1C – изогонали угла AC_1B. Тогда прямые C_2C_1 и CC_1 симметричны относительно прямой AB. Следовательно, прямая C_2C_1 всегда проходит через точку C', симметричную точке C относительно прямой AB.

Интересно, что условие

$$\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$$

использовалось не полностью. Мы пользовались только равенством $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$.

Следующая задача взята из книги А.Акопяна «Геометрия в картинках», поэтому и мы дадим ее почти без текста. В решении будет использовано понятие изогонально сопряженных точек. «Квант» уже писал об этом – например, в статье П.Кожевникова «Изогонально сопряженные точки» в №1 за 2016 год.

Задача 9. *Докажите, что AX, BY, CZ пересекаются в одной точке (рис.11,а).*

Решение. Рассмотрим угол BAC, изогонали этого угла AZ и AY. Пусть BY пересекает CZ в точке D (рис.11,*б*). По теореме об изогоналях AX' и AD – изогонали угла BAC. Заметим, что X и X' – изогонально сопряженные точки. Следовательно, AX' и AX – тоже изогонали. Значит, прямые AX и AD совпали. Прямые AX, BY, CZ проходят через точку D.

Упражнение 8. Докажите, что в условиях задачи 9 (см. рис.11,*б*) прямые $X'Z'$, XZ, AC пересекаются в одной точке.

Указание. Рассмотрим угол ZAZ'. Из задачи 9 мы знаем, что AX' и AX – изогонали этого угла. Прямые $X'Z$ и $Z'X$ пересекаются в точке B. Тогда прямые XZ и $X'Z'$ пересекаются в некоторой точке Q так, что AB и AQ – изогонали угла ZAZ'.

(Продолжение следует)

Теорема об изогоналях

А.КУЛИКОВА, Д.ПРОКОПЕНКО

Доказательство основных фактов

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма (свойство и признак изогоналей).

Свойство. *Пусть OP и OQ – изогонали угла MON, x_P и y_P (x_Q и y_Q) – расстояния от точки P (Q) до прямых OM и ON соответственно (рис.12). Тогда*

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}.$$

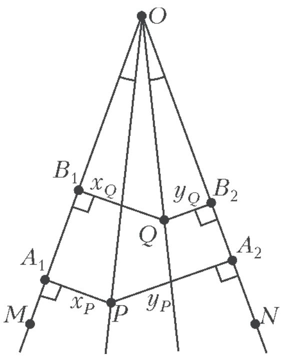

Рис. 12

Признак. *Пусть x_P и y_P (x_Q и y_Q) – расстояния от точки P (Q) до прямых OM и ON соответственно и $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$. Тогда OP и OQ – изогонали угла MON.*

Доказательство свойства. Пусть A_1 и A_2 – проекции точки P на прямые OM и ON соответственно (см. рис.12). Аналогично определим B_1 и B_2 – проекции точки Q.

Из подобных треугольников OPA_1 и OQB_2 следует

$$\frac{x_P}{y_Q} = \frac{OP}{OQ}. \qquad (1)$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

Аналогично из треугольников OQB_1 и OPA_2 найдем

$$\frac{x_Q}{y_P} = \frac{OQ}{OP}. \qquad (2)$$

Перемножим (1) и (2) и получим $\frac{x_P}{y_Q} \cdot \frac{x_Q}{y_P} = 1$. Следовательно, $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}$. Свойство изогоналей доказано.

Упражнение 9. Докажите признак.

Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников A_1PA_2 и B_1QB_2.

Перейдем к доказательству основной теоремы.

Теорема об изогоналях. *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD (рис.13,а). Прямые AC и BD пересекаются в точке Q, прямые AB и CD – в точке P. Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.*

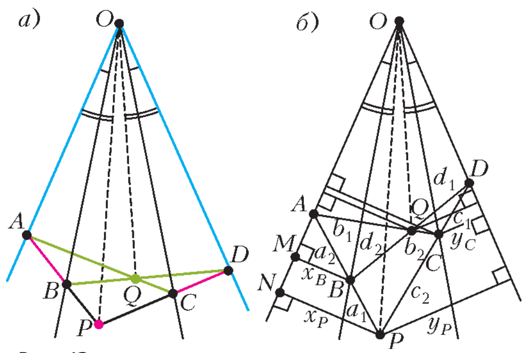

Рис. 13

Доказательство. Пусть x_P и y_P – расстояния от точки P до прямых OA и OD соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния от точек Q, B и C.

Обозначим также для краткости длины сторон выпуклого четырехугольника $PBQC$ так: $PB = a_1$, $BQ = d_2$, $QC = b_2$, $CP = c_2$; отрезки $BA = a_2$, $AQ = b_1$, $QD = d_1$, $DC = c_1$ (рис.13,*б*).

Условие, что OP и OQ – изогонали, по лемме равносильно равенству

$$\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1.$$

Будем доказывать это равенство.

Для точек B и P из подобных прямоугольных треугольников APN и ABM получим равенство

$$\frac{x_P}{x_B} = \frac{a_1 + a_2}{a_2}. \qquad (4)$$

Далее аналогично для пар точек P и C, B и Q, Q и C получим соответственно

$$\frac{y_C}{y_P} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}, \qquad (5)$$

$$\frac{y_Q}{y_B} = \frac{d_1}{d_1 + d_2}, \qquad (6)$$

$$\frac{x_C}{x_Q} = \frac{b_1 + b_2}{b_1}. \qquad (7)$$

Из равенств (4)–(7) найдем выражение $M = \frac{x_P x_Q}{y_P y_Q}$ и докажем, что $M = 1$, а это равносильно (3).

Действительно,

$$M = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{\frac{a_1 + a_2}{a_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2}}{\frac{d_1}{d_1 + d_2} \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1}} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_2)(d_1 + d_2) b_1 c_1}{d_1 a_2 (c_1 + c_2)(b_1 + b_2)}. \qquad (8)$$

Точки B и C лежат на изогоналях, поэтому по лемме

$$\frac{x_B x_C}{y_B y_C} = 1.$$

По теореме Менелая для треугольника APC и прямой BD

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} = 1.$$

Аналогично для треугольника ABQ и прямой PD

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1} \cdot \frac{d_1 + d_2}{d_1} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} = 1.$$

Перемножим почленно два последних равенства и получим равенство (8). Следовательно, $M = 1$, а по лемме это равносильно тому, что OP и OQ – изогонали.

Теорема доказана.

Интересно, а что будет, если в условиях теоремы прямые AB и CD не пересекаются? Ответ дает такой вариант теоремы об изогоналях.

Обобщение теоремы об изогоналях (включая случай параллельных прямых). *Пусть OB и OC – изогонали угла AOD. Прямые AC и BD пересекаются в точке Q.*

1) Пусть AB пересекает CD в точке P.

2) Если $AB \parallel CD$, то рассмотрим луч OP, параллельный AB (рис.14).

Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD.

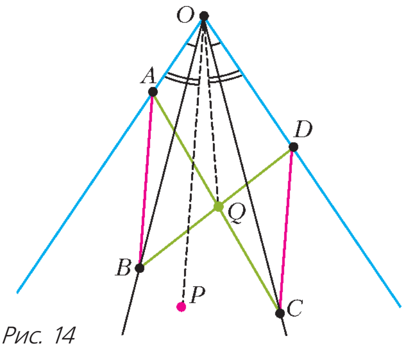

Рис. 14

Доказательство. Пункт первый мы уже доказали, рассмотрим теперь второй случай, когда $AB \parallel CD$. Пусть OP_1 и OQ – изогонали. Предположим, что прямая OP_1 пересекает прямую AB в точке P'. Тогда по пункту 1 нашей теоремы P' лежит на CD, т.е. AB пересекает CD в точке P', что противоречит условию $AB \| CD$. Следовательно, $OP_1 \| AB \| CD$, т.е. изогональ к OQ совпала с OP.

Случай параллельных прямых

Теперь мы можем рассмотреть применение теоремы об изогоналях, когда прямые AB и CD в условиях теоремы не пересекаются.

Задача 10. *Пусть BA_1 и BC_1 – внешние биссектрисы угла B треугольника ABC, $\angle AA_1B = \angle CC_1B = 90°$ (рис.15). Докажите, что A_1C и C_1A пересекаются на биссектрисе угла ABC.*

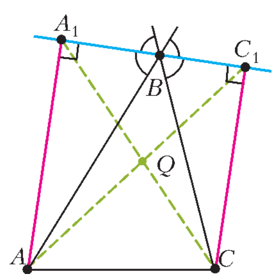

Рис. 15

Решение. Заметим, что углы A_1BA и C_1BC равны. Тогда BA и BC – изогонали развернутого угла A_1BC_1. Пусть A_1C пересекает AC_1 в точке Q. Поскольку $A_1A \parallel C_1C$, то по теореме об изогоналях вторая изогональ к BQ должна быть параллельна A_1A. Но биссектриса угла ABC перпендикулярна внешним биссектрисам, поэтому она параллельна прямым A_1A и C_1C и является второй изогональю к BQ. Тогда изогональ BQ тоже должна совпасть с биссектрисой угла ABC, т.е. точка Q лежит на биссектрисе угла ABC.

Следующая задача предлагалась на Международную олимпиаду 2007 года (ShortList), но не вошла в основной список.

Задача 11. *Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P (рис.16). Точка Q*

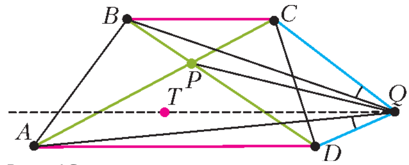

Рис. 16

лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ и прямая CD разделяет точки P и Q. Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

Решение. По теореме об изогоналях для угла CQD, изогональ QT к лучу QP должна быть параллельна AD. Но тогда $\angle BQP = \angle AQT = \angle DAQ$, что и требовалось доказать.

Следующая задача была в 2011/12 учебном году на региональном этапе Всероссийской олимпиады в 10 классе под №8, т.е. считалась самой сложной.

Задача 12. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O – точка пересечения диагоналей (рис. 17,а). На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.*

Решение. Предположим, что углы BSC и ASD не равны. Рассмотрим точку E на стороне AD такую, что $\angle BSC = \angle ESD$ (рис. 17,*б*). Пусть AD пересекает CE в точке O_1. Тогда, по теореме об изогоналях, SO_1 и SH – изогонали. Вспомним, что высота SH и диаметр SO описанной окружности треугольника CSD – тоже изогонали угла CSD. Следовательно, точка O_1 совпадает с точкой O, точка E совпадет с A, и $\angle BSC = \angle ASD$.

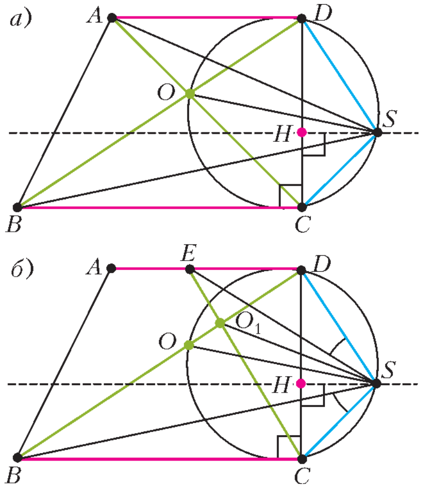

Рис. 17

Добавление

Приведем еще одно обобщение основной теоремы – из книги А.В.Акопяна, А.А.Заславского «Геометрические свойства кривых второго порядка» [6].

Теорема. *Пусть в треугольнике ABC даны две пары изогонально сопряженных точек X, X' и Y, Y' (рис.18). Тогда точки*

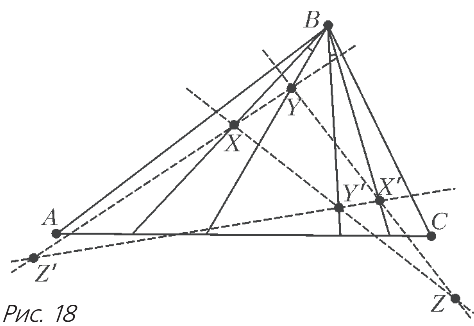

Рис. 18

пересечения XY с $X'Y'$ и XY' с $X'Y$ тоже изогонально сопряжены.

Доказательство. Рассмотрим угол XBX', Y и Y' – точки на изогоналях угла XBX' ($\angle ABX = \angle CBX'$ и $\angle ABY = \angle CBY'$, следовательно, BY и BY' – изогонали в $\angle XBX'$), а X и X' – точки на сторонах угла XBX'. Точки Z и Z' – пересечение прямых $X'Y$ и $Y'X$, $Y'X'$ и XY. По теореме об изогоналях, BZ и BZ' – изогонали угла XBX', а также и угла ABC. Аналогично, AZ, AZ' и CZ, CZ' – изогонали в углах BAC и BCA соответственно. Следовательно, точки Z и Z' изогонально сопряжены.

Существуют и другие идеи доказательства основной теоремы. Например, в докладе А.Куликовой на ММКШ [1] использовались двойные отношения точек и свойства центрального проектирования, что позволило сильно сократить доказательство.

И.Фролов сообщил нам, что после полярного преобразования с центром O теорема об изогоналях превращается в следующий факт:

Пусть в четырехугольнике KLMN биссектрисы углов между парами прямых KL и MN, KM и LN параллельны (это условие эквивалентно вписанности четырехугольника). Тогда им параллельна и биссектриса угла между прямыми KN и ML.

От П.Кожевникова мы узнали, что при подходящей центральной проекции в пространстве точка O уйдет на бесконечность, а пары прямых OA и OD, OB и OC, OP и OQ (рис.19) станут параллельными прямыми, симметричными относительно фиксированной прямой (прямой Гаусса), которая проходит через середины отрезков AD, BC, PQ.

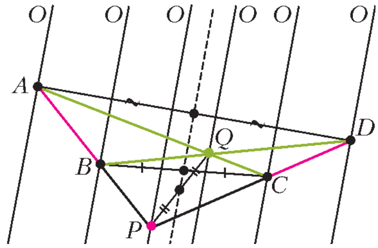

Рис. 19

Список литературы

1. Московская математическая конференция школьников (ММКШ). (https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/notes.htm)

2. *П.Кожевников.* Изогонально сопряженные точки. – «Квант», 2016, №1.

3. *Д.Прокопенко.* Изогональное сопряжение и педальные треугольники. – «Квант», 2017, №9.

4. Сайт Олимпиады по геометрии имени И.Ф.Шарыгина: geometry.ru.

5. *А.В.Акопян.* Геометрия в картинках. – М., 2017.

6. *А.В.Акопян, А.А.Заславский.* Геометрические свойства кривых второго порядка. – М.: МЦНМО, 2007.

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

Маятник Капицы

С.ДВОРЯНИНОВ

Удивление – мать познания.

Приписывается Аристотелю

СЕЙЧАС МЫ РАССКАЖЕМ ОБ ОДНОМ ИНтересном физическом явлении. Более того – оно удивительно, и на этом основании попало в книгу В.И.Арнольда «Математическое понимание природы. Очерки удивительных физических явлений и их понимание математиками (с рисунками автора)». Речь пойдет о маятнике.

Обычно маятник рисуют так, как показано на рисунке 1. На длинной нити подвешено небольшое тело, которое совершает колебания. Такой маятник называют математическим. Нижнее положение равновесия маятника устойчиво. Вместо нити можно взять стержень – у нас будет именно такой маятник.

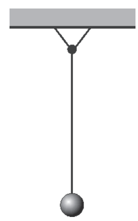

Рис. 1

А теперь перевернем маятник, заставим его стоять, как пишет Арнольд, «вверх ногами» (рис.2). У такого маятника прежняя точка подвеса превращается в точку опоры, но мы по традиции будем называть ее точкой подвеса. Хорошо известно, что поставить такой маятник вертикально не удается – или влево, или вправо он обязательно упадет. Если все же получится зафиксировать его в вертикальном положении, то малейшее сотрясе-

Рис. 2