Угол в квадрате

А.БЛИНКОВ, Ю.БЛИНКОВ

Речь пойдет об удивительной геометрической конструкции, возникшей на основе ряда задач замечательного математика Вячеслава Викторовича Произволова. Большая часть этих задач была придумана автором для турниров математических боев имени А.П.Савина, а три задачи есть в его книжке «Задачи на вырост». В статье использованы также материалы геометрических кружков Ю.А.Блинкова и Д.В.Швецова (http://www.geometry.ru/kruzhki_big.htm).

Мы постараемся проследить несколько «сюжетных линий» и показать не только тесные связи между разными задачами, но и богатство геометрических методов, которые позволяют их решить.

Начнем с задачи, которая уже давно стала классикой.

Задача 1. *На сторонах BC и CD квадрата ABCD выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45° (рис. 1). Докажите, что расстояние от точки A до прямой MN равно стороне квадрата.*

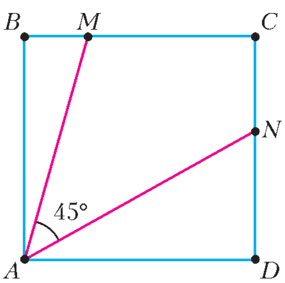

Рис. 1

Рассмотрим три способа решения этой задачи (последний способ – авторский).

Решение. Проведем отрезок MN и опустим на него перпендикуляр AE (рис. 2).

Первый способ. Проведем диагональ AC квадрата и рассмотрим треугольник CMN (рис.2,*а*). Точка A лежит на биссектрисе угла C этого треугольника, точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой MN, а сторона MN видна из этой точки под углом MAN, который равен $90° - \frac{1}{2}\angle C$.

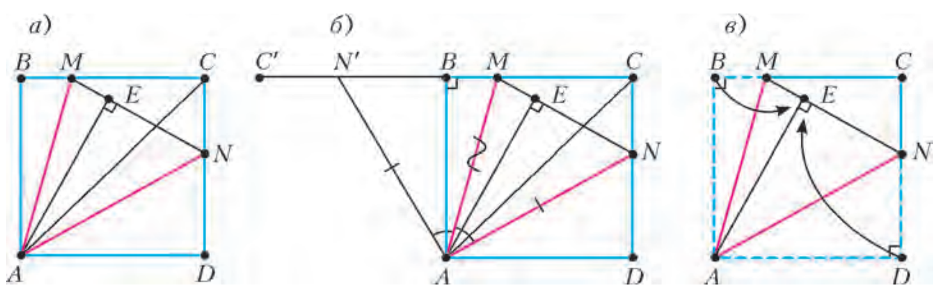

Рис. 2

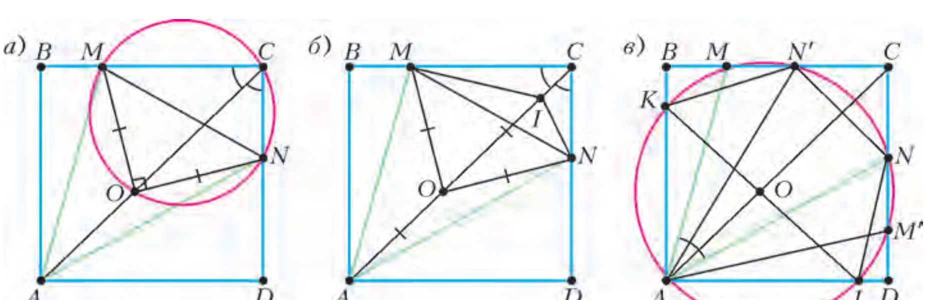

Рис. 3

Таким свойством обладает единственная точка – центр вневписанной окружности треугольника CMN (подробнее – см. статью «Вневписанная окружность» в «Кванте» №2 за 2009 г.). Следовательно, $AE = AB = AD$ (радиусы этой окружности).

Второй способ. Расположив квадрат так, как показано на рисунке 2,*б*, рассмотрим поворот с центром A на угол 90° против часовой стрелки. Образом вершины D будет являться вершина B, образом прямой DC – прямая BC', ей перпендикулярная, поэтому точка N' (образ точки N) будет лежать на отрезке BC'. Так как $\angle NAN' = 90°$, то $\angle MAN' = \angle MAN$, значит, треугольник AMN' равен треугольнику AMN (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, равны и их соответствующие высоты, т.е. $AE = AB$.

Третий способ. «Перегнем» квадрат по прямым AM и AN. Так как $\angle BAM + \angle DAN = \angle MAN$ и $AB = AD$, то после перегибания отрезки AB и AD совместятся (рис. 2,*в*). Кроме того, $\angle ABM = \angle ADN = 90°$, значит, из точки, в которой оказались вершины B и D, отрезки AM и AN видны под прямым углом, а этому условию удовлетворяет только точка E. Значит, $AE = AB = AD$.

Замечание. Этот авторский прием, который В.В.Произволов назвал «свертыванием», конечно, имеет и «научное» обоснование. Он основан на том, что композиция двух осевых симметрий с пересекающимися осями является поворотом на удвоенный угол между осями с центром в точке их пересечения. В данном случае речь идет о повороте с центром A на угол 90°, который является композицией симметрий относительно прямых AM и AN.

Упражнения

1. Докажите, что в условиях задачи 1 периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата.

2. Докажите обратное утверждение: если точки M и N на сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ таковы, что периметр треугольника CMN равен половине периметра квадрата, то угол MAN равен 45°.

Следующая задача, содержащая два взаимно обратных утверждения, иллюстрируют еще одно свойство рассматриваемой конструкции.

Задача 2. а) (X Турнир имени А.П.Савина, 2004) *На сторонах BC и CD квадрата ABCD выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен 45°. Докажите, что центр описанной окружности треугольника MAN лежит на диагонали AC.*

б) (XIV Турнир имени А.П.Савина, 2008) *Окружность с центром на диагонали AC квадрата ABCD проходит через вершину A и пересекает стороны BC и CD в точках M и N, не симметричных относительно AC. Докажите, что угол MAN равен 45°.*

И опять – три способа решения.

Решение. *Первый способ*. Пусть O – центр данной окружности, тогда $OM = ON$ (рис. 3,*а*). а) Так как $\angle MON = 2\angle MAN = 90°$ и $\angle MCN = 90°$, то четырехугольник $OMCN$ – вписанный. Тогда из равенства $OM = ON$ следует, что CO – биссектриса угла MCN, поэтому точка O лежит на AC.

б) Воспользуемся тем, что *серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса его противолежащего угла пересекаются на окружности, описан-*

ной около треугольника (докажите!). Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN и на биссектрисе угла MCN, значит, она является серединой дуги MN окружности, описанной около треугольника CMN. Так как $\angle MCN = 90°$, то и $\angle MON = 90°$, значит, $\angle MAN = 45°$.

Второй способ. Пусть I – центр окружности, вписанной в треугольник CMN (рис.3,*б*). а) Так как A – центр вневписанной окружности этого треугольника, то $\angle AMI = \angle ANI = 90°$, значит, точки M и N лежат на окружности с диаметром AI. Следовательно, центр O окружности, описанной около треугольника AMN, является серединой AI, т.е. лежит на AC. б) Точки O и A лежат на биссектрисе угла C треугольника CMN и $OM = ON = OA$, значит, A – центр вневписанной окружности этого треугольника. Следовательно, $\angle MAN = 90° - \frac{1}{2}\angle MCN = 45°$.

Третий способ. а) Пусть N' – вторая точка пересечения данной окружности и стороны BC (рис.3,*в*). Так как четырехугольник $AMN'N$ – вписанный, то $\angle CN'N = \angle MAN = 45°$. Тогда AC является серединным перпендикуляром к отрезку NN', поэтому центр O рассматриваемой окружности лежит на AC. б) Диагональ AC квадрата является как его осью симметрии, так и осью симметрии данной окружности, поэтому точка N', симметричная N относительно AC, является еще одной точкой пересечения окружности со стороной BC (см. рис. 3,*в*). Так как $NN' \perp AC$, то $\angle CN'N = 45°$. Четырехугольник $AMN'N$ – вписанный, следовательно, $\angle MAN = \angle CN'N = 45°$.

Замечание. Утверждение задачи 2,а можно также доказать, используя изогональное сопряжение центра описанной окружности и ортоцентра треугольника. Подробнее об изогональном сопряжении см., например, в книге В.В.Прасолова «Задачи по планиметрии», ч.1, гл.5.

Упражнение 3. Пусть K и L – точки пересечения окружности, проходящей через точки A, M и N, со сторонами AB и AD соответственно (см. рис. 3,*в*). Докажите, что KL – диаметр окружности и $AK = AL$.

Продолжим изучение конструкции, рассмотрев точки пересечения сторон угла MAN с диагональю BD. В этом нам поможет задача, в условии которой квадрата нет, но «незримо» он присутствует.

Задача 3 («Задачи на вырост»). *В равнобедренном прямоугольном треугольнике BAD на гипотенузе BD выбраны точки P и Q так, что $\angle PAQ = 45°$ (P лежит между B и Q). Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + DQ^2$.*

Решение. *Первый способ*. Расположим треугольник BAD так, как на рисунке 4,*а*, и рассмотрим поворот с центром A на угол $90°$ против часовой стрелки. Образом вершины D будет являться вершина B, а образом точки Q – точка Q', значит, $DQ = BQ'$ и $DQ \perp BQ'$. Кроме того, $\angle Q'AP = \angle Q'AQ - \angle PAQ = 45° = \angle PAQ$, поэтому равны треугольники APQ и APQ', откуда $PQ = PQ'$. Тогда доказываемое утверждение есть не что иное как теорема Пифагора в прямоугольном треугольнике $BQ'P$.

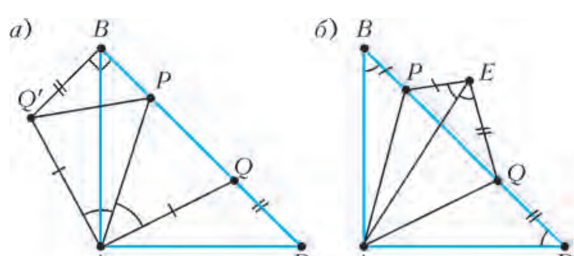

Рис. 4

Второй способ. Перегнем чертеж по прямым AP и AQ (т.е. опять используем «свертывание»), тогда точки B и D совместятся в точке E (рис.4,*б*). Так как $\angle PEA = \angle PBA = \angle PDA = \angle QEA = 45°$, то $\angle PEQ = 90°$. Тогда из прямоугольного треугольника PEQ: $PQ^2 = EP^2 + EQ^2 = BP^2 + DQ^2$.

Отметим, что точка E нам уже знакома. Действительно, если данный треугольник достроить до квадрата $ABCD$, а отрезки AP и AQ продолжить до пересечения с BC и CD в точках M и N соответственно, то E – основание перпендикуляра, опущенного из A на MN (см. рис. 2,*а–в*). Теперь логично рассмотреть следующую задачу.

Задача 4. *На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен $45°$. Диагональ BD пересекает AM и AN в точках P и Q соответственно, E – основание перпендикуляра, опущенного из A на MN. Докажите, что отрезки MQ, NP и AE пересекаются в одной точке.*

Решение. Так как $\angle MAQ = \angle MBQ = 45°$, то точки A, B, M и Q лежат на одной окружности. Кроме того, $\angle ABM = 90°$, значит, AM – диаметр этой окружности, а $\angle AQM = 90°$, т.е. MQ – высота треугольника MAN (рис. 5). Аналогично, точки A, D, N и P лежат на окружности с диаметром AN, а NP – высота треугольника MAN. Учитывая, что AE – еще одна высота того же треугольника, получим, что указанные отрезки пересекаются в точке H – ортоцентре треугольника MAN.

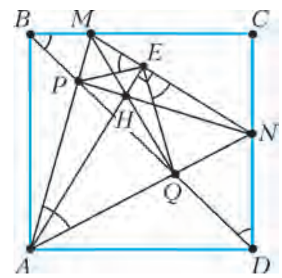

Рис. 5

Замечание. Попутно отметим, что на обеих рассмотренных окружностях лежит также и точка E, т.е. общая хорда AE рассмотренных окружностей перпендикулярна MN. Кроме того, высоты MQ и NP треугольника MAN равны отрезкам AQ и AP соответственно (так как $\angle MAN = 45°$).

Упражнение 4. Докажите, что в условиях задачи 4: а) четырехугольник $PQNM$ – вписанный; б) $\angle PCQ = 45°$; в) $S_{\Delta MAN} = 2S_{\Delta PAQ}$; г) $AH = MN = PQ\sqrt{2}$; д) $MN^2 = 2\left(BP^2 + DQ^2\right)$.

В задаче 2 мы рассматривали окружность, описанную около треугольника MAN, и точки ее пересечения со сторонами квадрата. В силу симметрии, образовалась ломаная $KMANL$ с вершинами на окружности и углом $45°$ между соседними звеньями (см. рис. 3,*в* и упражнение 3). Рассмотрим эту ломаную подробнее.

Задача 5 («Задачи на вырост»). *Вершины ломаной $KMANL$ лежат на окружности и $\angle KMA = \angle MAN = \angle ANL = 45°$ (рис.6). Докажите, что площадь закрашенной части равна половине площади круга.*

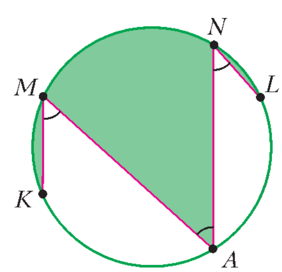

Рис. 6

Решение. Проведем отрезок KL (рис. 7,*а*,*б*). Он является диаметром окружности, так как сумма угловых величин дуг KA и LA равна 180°. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Проведем через точку L прямую, параллельную MK, до пересечения с окружностью в точке Z (см. рис. 7,*а*). Тогда $ML = KZ$, а так как KL – диаметр окружности, то углы KML и KZL – прямые, поэтому $KMLZ$ – прямоугольник. Пусть U – точка пересечения KN и ML, V – точка пересечения MA и KZ, тогда $UV \parallel LZ$ (в силу симметрии относительно горизонтального диаметра).

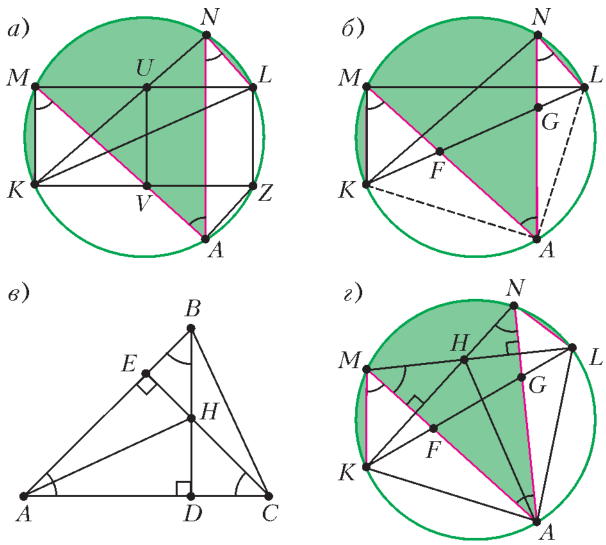

Рис. 7

Проведем также отрезок AZ, после чего утверждение задачи становится практически очевидным: для каждого «куска» закрашенной части найдется симметричный ему не закрашенный «кусок». Действительно, равны сегменты, ограниченные хордами MK и LZ, NL и AZ, равны трапеции $UVAN$ и $LZAN$, равны треугольники MUV и VKM, а также − криволинейные треугольники MUN и KVA.

Второй способ. Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно (см. рис. 7,*б*). Тогда утверждение задачи равносильно равенству $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$.

Так как KL − диаметр окружности, а дуги AK и AL равны, то треугольник KAL − прямоугольный и равнобедренный. Используя результат задачи 3, получим

$$FG^2 = KF^2 + LG^2.$$

Заметим также, что треугольники FMK и LNG подобны треугольнику FAG (по двум углам) с коэффициентами $k_1 = \frac{KF}{FG}$ и $k_2 = \frac{LG}{FG}$ соответственно. Тогда $\frac{S_{\Delta KMF}}{S_{\Delta FAG}} = k_1^2 = \frac{KF^2}{FG^2}$ и $\frac{S_{\Delta LNG}}{S_{\Delta FAG}} = k_2^2 = \frac{LG^2}{FG^2}$. Складывая эти равенства почленно, получим

$$\frac{S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG}}{S_{\Delta FAG}} = \frac{KF^2 + LG^2}{FG^2} = 1.$$

Равенство $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$ можно доказать иначе, используя ту же идею «свертывания». Для этого потребуется вспомнить еще одну классическую задачу.

Лемма. *Дан невыпуклый четырехугольник $ABHC$, в котором углы A, B и C равны по $45°$. Докажите, что: а) отрезки AH и BC равны и перпендикулярны; б) $S_{ABHC} = \frac{1}{2}AH^2$.*

Доказательство. а) Продлим отрезки BH и CH до пересечения с AC и AB в точках D и E соответственно (рис. 7,*в*). Тогда $\angle ADB = \angle AEC = 90°$. Так как BD и CE − высоты треугольника ABC, то H − ортоцентр этого треугольника, значит, $AH \perp BC$. Кроме того, треугольники ABD и CHD − равнобедренные и прямоугольные, значит, $AD = BD$ и $HD = CD$. Следовательно, прямоугольные треугольники AHD и BCD равны (по двум катетам), откуда $AH = BC$.

Замечание. Оба утверждения можно также получить, рассмотрев поворот с центром D на угол $90°$. Заодно отметим, что доказанный факт можно эффективно использовать для решения упражнения 4,*г*.

б) AH и BC − диагонали невыпуклого четырехугольника. Так как *площадь любого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними*, то

$$S_{ABHC} = \frac{1}{2}AH \cdot BS \sin 90° = \frac{1}{2}AH^2.$$

Теперь вернемся к решению задачи 5 и покажем, что и ее можно решить, используя «свертывание».

Третий способ. Прибавив к обеим частям доказываемого равенства площади треугольников AFK и AGL, получим, что оно равносильно равенству $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta KAL}$ (рис. 7,*г*). Пусть H − точка пересечения KN и ML. Так как KL − диаметр окружности, то угол KMH прямой. Тогда $\angle HMA = \angle KMA = 45°$, и $\angle MKH = \angle MAN = 45°$, поэтому $AM \perp KH$. Значит, при «свертывании» по прямой AM точка K совместится с точкой H. Аналогично, при «свертывании» по прямой AN точка L совместится с точкой H. Следовательно, $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta HMA} + S_{\Delta HNA} = S_{AMHN}$.

В невыпуклом четырехугольнике $AMHN$ три угла по $45°$, значит, $S_{AMHN} = \frac{1}{2}AH^2 = \frac{1}{2}AK \cdot AL = S_{\Delta KAL}$, что и требовалось.

Упражнение 5 (конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8», 1996). Докажите, что в условиях задачи 5 выполняется равенство $KM^2 + AN^2 = AM^2 + LN^2$.

А теперь – задача, в которой будет присутствовать квадрат, точки M и N из задач 1 и 2, точки F и G (P и Q) из задач 3 и 4. А еще окружность, описанная около треугольника AMN из задачи 2 и ломаная в этой окружности из задачи 5, хотя про них в условии ничего не сказано.

Задача 6 (XII Турнир имени А.П.Савина, 2006). *На сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки K, M, N и L так, что $KMA = MAN = LNA = 45°$. Пусть KL пересекает AM и AN в точках F и G соответственно. Докажите, что $S_{\Delta KMF} + S_{\Delta LNG} = S_{\Delta FAG}$.*

Покажем, что эта трудная задача нами уже практически решена, причем не одним способом. Для ее решения достаточно доказать равенство $AK = AL$, из которого будет следовать, что точки A, K, L, M и N лежат на одной окружности (см. упражнение 3).

Действительно, доказываемое равенство равносильно равенству площадей из задачи 5 (см. второй способ решения этой задачи).

Решение. *Первый способ.* Пусть окружность, описанная около треугольника AMN, пересекает стороны AB и AD квадрата в точках K' и L' соответственно (рис. 8,*а*). Так как $\angle MAN = 45°$, то центр O этой окружности лежит на AC (см. задачу 2, а). Значит, точки K' и L' симметричны относительно AC, т.е. $\angle K'L'A = 45°$. Из равенства вписанных углов следует, что $\angle K'MA = \angle K'L'A = 45°$, т.е. точка K' совпадает с точкой K из условия задачи. Аналогично доказывается совпадение точек L и L'.

Второй способ. При перегибании квадрата по прямым AM и AN точки K и L совместятся в точке H − ортоцентре

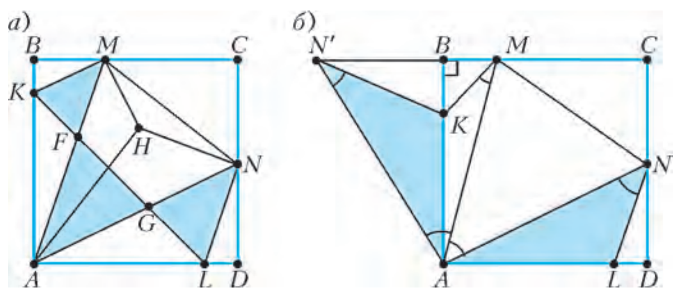

Рис. 8

треугольника MAN (см. рис.8,*а*). Это следует из того, что точки B и D совмещаются в основании E высоты AE этого треугольника (см. задачу 1), а $\angle AMH = \angle ANH = 45°$ (см. лемму). Значит, $AK = AL$, что и требовалось.

Упражнение 6. Докажите, что в условиях задачи 6 точки пересечения диагоналей трапеций $AKMN$ и $ALNM$ лежат на BD.

Третий способ. Расположив квадрат так, как показано на рисунке 8,*б*, рассмотрим поворот с центром A на угол $90°$ против часовой стрелки. Аналогично второму способу решения задачи 1 получим, что образом треугольника AND является треугольник $AN'B$.

Докажем, что при таком повороте образом точки L является точка K. Для этого достаточно доказать, что $\angle AN'K = \angle ANL = 45°$. Так как $\angle N'AM = \angle AMK = 45°$, то прямая MK содержит высоту треугольника AMN'. Поскольку AB – еще одна высота этого треугольника, то K – его ортоцентр. Значит, третья высота лежит на прямой $N'K$ и $\angle AN'K = 45°$. Таким образом, $AK = AL$, что и требовалось.

Возникает естественный вопрос: а как решать эту задачу, если не знать задачу 5? Оказывается, можно использовать все то же свертывание или поворот и получить четырехугольник из леммы!

Например, третий способ решения можно продолжить так (см. рис.8,*б*). Докажем равенство $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta KAL}$, равносильное требуемому. Заметим, что $S_{\Delta KMA} + S_{\Delta LNA} = S_{\Delta KMA} + S_{\Delta KN'A} = S_{AMKN'}$. Четырехугольник $AMKN'$ – это все тот же четырехугольник, три угла которого равны по $45°$, поэтому его площадь равна $\frac{1}{2}AK^2$, что, в свою очередь, равно площади треугольника KAL.

Другие свойства этой замечательной конструкции и развитие некоторых рассмотренных методов можно получить при решении следующих задач (автором задач 7–9 также является В.В.Произволов, а автором задачи 10 – Д.В.Швецов).

Задачи для самостоятельного решения

7 («Задачи на вырост»). На полосу наложили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, причем его граница пересекает границы полосы в четырех точках. Докажите, что две прямые, проходящие крест-накрест через эти точки, пересекаются под углом $45°$.

8. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно так, что угол MAN равен $45°$. Лучи AM и AN пересекают окружность, описанную около квадрата, в точках M_1 и N_1 соответственно. Докажите, что $M_1N_1 \parallel MN$.

9 (IX Турнир имени А.П.Савина, 2003). В квадрате $ABCD$ выбраны точки S и T внутри треугольников ABC и ADC соответственно так, что $\angle SAT = \angle SCT = 45°$. Докажите, что $BS \parallel DT$.

10 (XX Турнир имени А.П.Савина, 2014). Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается продолжений его катетов CA и CB в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника ABC пересекает A_1B_1 в точках P и Q. Найдите угол PCQ.

Об одной конструкции с касающимися окружностями

И.БОГДАНОВ

Недавно автор статьи обнаружил следующее забавное утверждение, которое мы сформулируем как задачу (эта задача предлагалась участникам Первого турнира математических боев «Лига Победителей»).

Задача 1. *Пусть H – точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Пусть ω_1 и ω_2 – окружности, описанные около треугольников AHB и AHC соответственно. Рассмотрим произвольную окружность Γ, проходящую через точки B, C и пересекающую отрезки BH и CH вторично в точках B' и C' соответственно. Пусть, наконец, окружность γ касается ω_1 и ω_2 внешним образом, а также касается внутренним образом малой дуги BC окружности Γ в точке T (рис.1). Докажите, что точка T является серединой дуги $B'C'$ окружности Γ.*

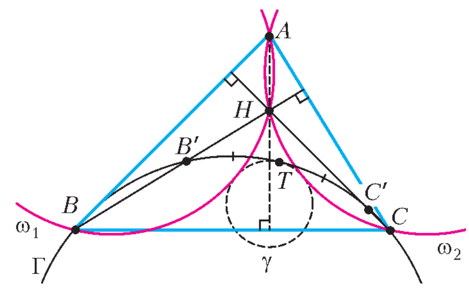

Рис. 1

Опытные любители геометрии знают, что задачи, в которых речь идет об окружностях, касающихся нескольких окружностей и прямых, бывают весьма трудны. Описание данной конструкции тоже не предвещает легкого пути. Тем не менее, достаточно короткое решение существует, и мы его сейчас приведем.

Заодно мы проиллюстрируем тезис, что некий факт порой труднее обнаружить, чем доказать. Именно, мы увидим, что условие задачи в некотором смысле диктует, что именно надо сделать для ее решения.

Анализ и решение задачи 1. Для начала хорошо бы немного разобраться в картинке, а для этого полезно вспомнить несколько общеизвестных фактов.

Как известно, окружности ω_1 и ω_2 симметричны окружности ω, описанной около треугольника ABC, относительно