КВАНТ

МАРТ АПРЕЛЬ 2012 № 2

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Пространство L_p и замечательные точки треугольника

В.ПРОТАСОВ, В.ТИХОМИРОВ

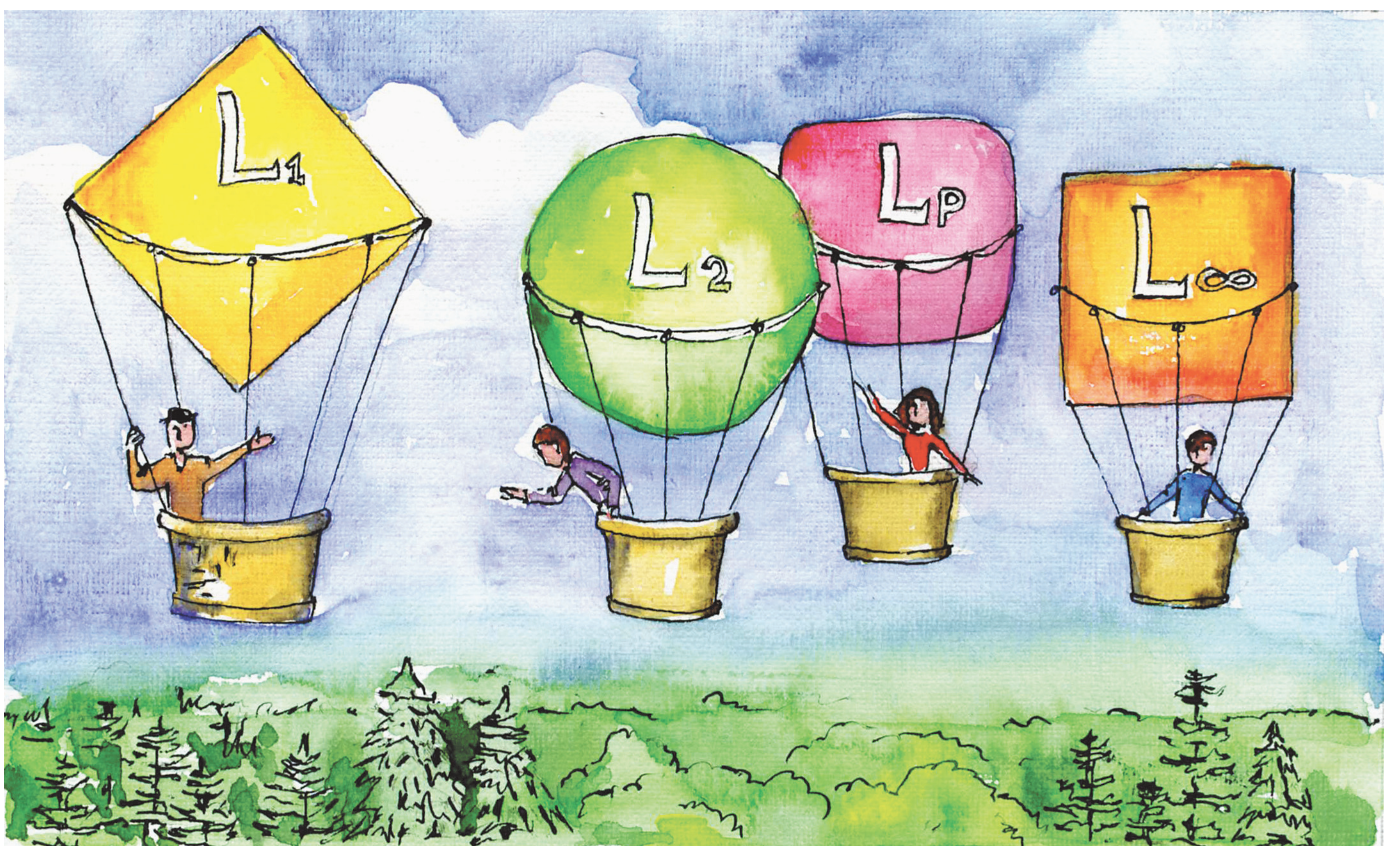
Теория функций – это когда лектор говорит: «Рассмотрим круг», – и рисует на доске квадрат.

Студенческий фольклор

Как сравнивать наборы чисел?

Если нам даны два числа, мы можем легко их сравнить и выяснить, какое больше. А как сравнить два набора чисел? Пусть есть наборы чисел $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$. Какой из них больше? Например, простая ситуация: есть двое весов, нам нужно понять, какие работают лучше. Провели три контрольных взвешивания. Первые весы сначала ошиблись на 10 граммов (в какую сторону – не важно), потом на 3 грамма, потом на 4. Вторые весы – соответственно, на 5, 8 и 6 граммов. Получается, что у нас есть два набора чисел $\vec{a} = (10, 3, 4)$ и $\vec{b} = (5, 8, 6)$. Какой из них меньше, те весы точнее. Так какие же? Первое, что можно сделать, – найти максимум трех чисел. У первого набора это 10, у второго 8. По такому измерению больше набор $\vec{a}$, и, значит, первые весы хуже (они сделали самую большую ошибку). Можно поступить по другому: сложить числа каждого набора. Здесь получается наоборот: первый набор меньше второго (17 против 19), значит, первые весы лучше. Математикам часто удобнее иметь дело не с суммой чисел и не с максимумом, а со средним квадратическим, т.е. с корнем из суммы квадратов. По этому показателю в каждом наборе получаем $\sqrt{125}$, т.е. весы работают одинаково. Результат зависит от того, как сравнивать. Меры, которые мы при этом использовали, называются L_p-нормами наборов чисел.

Определение 1. *Пусть у нас есть набор чисел $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и число $p \geq 1$. Тогда L_p-нормой данного*



набора называется величина $\|\vec{a}\|_p = \left(|a_1|^p + \ldots + |a_n|^p\right)^{1/p}$.
L_∞*-нормой называется* $\|\vec{a}\|_\infty = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}$.

Символ ∞ здесь не случаен: L_p-норма $\|\vec{a}\|_p$ стремится к числу $\|\vec{a}\|_\infty$, если увеличивать p до бесконечности (попробуйте доказать!). А буква L в названии – в честь французского математика Анри Лебега (1875 – 1941), одного из основоположников теории функций.

Анри Лебег

В примере с весами мы обнаружили, что $\|\vec{a}\|_\infty > \|\vec{b}\|_\infty$, $\|\vec{a}\|_1 < \|\vec{b}\|_1$ и $\|\vec{a}\|_2 = \|\vec{b}\|_2$. Необходимость сравнивать наборы чисел возникает в математике постоянно, в самых разных задачах. И в большинстве случаев это делается с помощью L_p-нормы. При этом вопрос, какое взять p, решается, исходя из конкретной задачи. В теории вероятностей часто удобнее брать L_1-норму, в теории приближений – L_∞-норму, при изучении рядов Фурье пользуются L_2-нормой, и т.д.

Пространство L_p

С помощью L_p-нормы можно не только сравнивать наборы чисел, но и по-новому измерять расстояния между точками. Мы подходим к одному из фундаментальных понятий математики – пространству L_p. Общего определения мы здесь дать не сможем, а рассмотрим только простейший случай: *двумерное пространство* L_p. Это обычная плоскость, в которой задана обычная декартова система координат, а расстояния между точками определяются как L_p-норма разностей их координат. L_p-*расстоянием между точками* A *и* B – его обозначают $d_p(A, B)$ – называется L_p-норма набора из двух чисел: разность абсцисс точек A и B и разность ординат. Таким образом, расстояние между точками $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ – это $d_p(A, B) = \|(a_1 - b_1, a_2 - b_2)\|_p$.

При $p = 2$ получаем $d_2(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$, т.е. L_2-расстояние – это не что иное, как обычное расстояние между точками (его называют *евклидовым*). При других p получаем иную картину. Например, L_1-расстоянием будет величина $d_1(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$. Посмотрим, как выглядит единичная окружность в пространстве L_1. Окружность радиусом 1 с центром в начале координат – это множество точек $M(x, y)$, расстояние от которых до точки $(0, 0)$ равно 1. Это значит, что $|x| + |y| = 1$. Множество точек плоскости, удовлетворяющих этому уравнению, – это квадрат с вершинами на осях координат (рис.1). Да-да, окружность в пространстве L_1 является квадратом (см. эпиграф)! Как и на обычной плоскости, у каждого треугольника есть описанная окружность, т.е. окружность, проходящая через его вершины, но она может быть не единственной (упражнение 2). В пространстве L_1 бывают равносторонние прямоугольные треугольники, а серединный перпендикуляр к отрезку может не быть прямой линией (упражнения 1 и 3). Геометрия пространств L_p и множества других пространств изучается в *теории функций*.

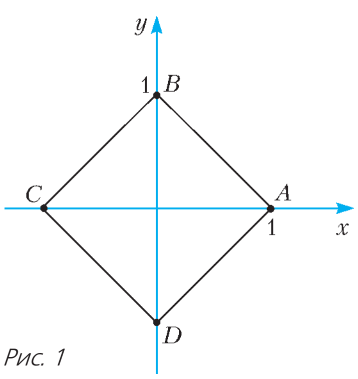


Рис. 1

Упражнения[1]

1. В пространстве L_1 треугольник ABC на рисунке 1 – равносторонний (и прямоугольный!).[2] У четырехугольника $ABCD$ длины всех сторон и всех диагоналей равны 2.

2. Вокруг любого треугольника в L_1 можно описать окружность. Приведите пример треугольника, у которого бесконечно много описанных окружностей.

3. Постройте геометрическое место точек M, для которых $d_1(K_1, M) = d_1(K_2, M)$, если: а) $K_1 = (0, 0)$, $K_2 = (0, 2)$; б) $K_1 = (2, 0)$, $K_2 = (0, 1)$.

4. В L_1 выполнено неравенство треугольника: $d_1(K, N) \le d_1(K, M) + d_1(M, N)$ для любых точек K, M, N. При этом существуют невырожденные треугольники, у которых наибольшая сторона равна сумме двух других сторон.

5. Сформулируйте и докажите аналоги упражнений 2–4 для пространства L_∞.

Две геометрические задачи

Мы возвращаемся в родную евклидову плоскость и исследуем две геометрические задачи на минимум. В первой задаче нужно найти точку, наименее удаленную от вершин данного треугольника, во второй – в данный треугольник вписать треугольник с наименьшими сторонами. Во всех случаях длина – обычная (евклидова). Постановка задач выглядит несколько непривычно: что значит «точка, наименее удаленная от вершин треугольника»? У треугольника три вершины, значит, есть три расстояния от точки до этих вершин. Какое из них должно быть наименьшим? Или все три сразу? Эти вопросы могли бы поставить нас в тупик, но теперь мы знаем, как естественно и корректно сформулировать задачу. На помощь приходит L_p-норма. Мы будем искать точку с наименьшей L_p-нормой трех расстояний до вершин треугольника. Выбирая при этом различные значения p, мы будем получать в качестве ответов различные замечательные точки треугольника. Некоторые из них хорошо нам знакомы (и тем интереснее встретить их в новых задачах), другие – менее знакомы. Вторую задачу, о вписанном треугольнике с наименьшими сторонами, нужно, конечно же, тоже ставить с помощью L_p-нормы: для каждого p найти вписанный треугольник с наименьшей L_p-нормой сторон. Решая ее, мы также встретим несколько замечательных линий и точек треугольника. Для про-

[1] Упражнения мы, как правило, будем формулировать в виде утверждений, которые надо доказать. Слова «докажите, что» будем опускать.

[2] Расстояние между точками мы измеряем в L_p-норме, а углы – как обычно.

стоты мы будем решать все задачи только для остроугольных треугольников.

Главным для нас будет разобраться, как решаются подобные задачи на минимум, как находить ответ и как правильно его обосновывать. Поэтому решения первых задач мы рассмотрим особенно подробно.

Точка, наименее удаленная от вершин треугольника

Общая задача. *Для данного остроугольного треугольника найти точку с наименьшей L_p-нормой трех расстояний от нее до вершин треугольника.*

Итак, для произвольного $p \ge 1$ нужно найти точку M, для которой величина $\left(MA^p + MB^p + MC^p\right)^{1/p}$ наименьшая. Для каждого p получается своя задача. И у каждой задачи, по-видимому, будет свой особый ответ. Мы приведем решение, конечно же, не для всех p, а только для трех: для $p = 1$, 2 и ∞.

Задача 1. $p = 1$. *Найти точку, сумма расстояний от которой до вершин данного остроугольного треугольника наименьшая (задача Ферма–Торричелли–Штейнера).*

В решении мы воспользуемся задачей, известной каждому восьмикласснику: *для данных точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой l, найти точку M на прямой, для которой сумма AM + BM наименьшая.* Иными словами, нужно найти кратчайший путь между двумя точками с заходом на прямую линию. Ответ известен: точка M такова, что отрезки AM и BM образуют равные углы с прямой l («угол падения равен углу отражения»). Для построения точки M нужно отразить симметрично точку B относительно прямой l (получим точку B', рис.2). Тогда M – это точка пересечения отрезка AB' с прямой l.

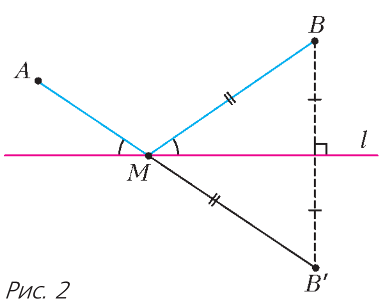


Рис. 2

Решение. Начнем с того, что попробуем отыскать точку M, для которой сумма расстояний до вершин треугольника ABC наименьшая. Во-первых, M не может лежать вне треугольника и не может совпадать с его вершиной. Докажите это самостоятельно (это просто!). Таким образом, M находится внутри треугольника или на его стороне. Проведем через M прямую l таким образом, чтобы M была точкой с наименьшей суммой расстояний до A и B (среди всех точек прямой l). Это значит, что l образует равные углы с отрезками AM и BM (рис.3,*а*). Предположим, что прямая l не перпендикулярна отрезку CM, т.е. CM образует с l острый угол. Повернем немного прямую l так, чтобы этот угол увеличился, но остался острым. Получим прямую l'. Решим для нее задачу о кратчайшем пути из A в B с заходом на прямую. Получим точку M' на прямой l' (рис.3,*б*). Если угол поворота достаточно маленький, то M' находится очень близко к M, а угол $CM'M$ – тупой. Значит, $CM' < CM$, так как в треугольнике CMM' сторона CM лежит напротив тупого угла. Кроме того, $AM' + BM' < AM + BM$. Таким образом, $AM' + BM' + CM' < AM + BM + CM$, что противоречит предположению. Это значит, что $CM \perp l$, и, следовательно, $\angle BMC = \angle AMC$. Повторив те же рассуждения для другой пары углов, получаем, что все три угла с вершиной M равны, а значит, каждый из них равен $120°$.

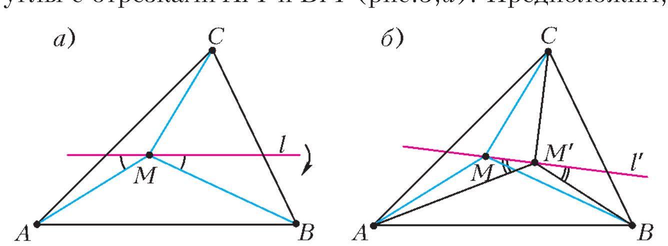


Рис. 3

Точка Торричелли. Итак, ответом в задаче служит точка внутри треугольника, из которой все три стороны видны под равными углами в $120°$. Она называется *точкой Торричелли*. У любого остроугольного треугольника есть единственная точка Торричелли. Для доказательства построим на каждой стороне треугольника во внешнюю сторону равносторонний треугольник. Описанные окружности этих трех треугольников пересекаются в одной точке (рис.4). Действительно, пусть две из этих окружностей, построенные на сторонах AB и AC, пересекаются повторно в некоторой точке T (если окружности касаются, то $T = A$). По теореме о вписанном угле $\angle ATB = 180° - 60° = 120°$ и, аналогично, $\angle ATC = 120°$. Следовательно, $\angle BTC = 360° - 2 \cdot 120° = 120°$, значит, третья окружность также проходит через T. Верно и обратное: если некоторая точка M такова, что $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120°$, то M лежит на каждой из трех окружностей, а значит, совпадает с точкой T. Впредь будем обозначать точку Торричелли через T.


Эванджелиста Торричелли

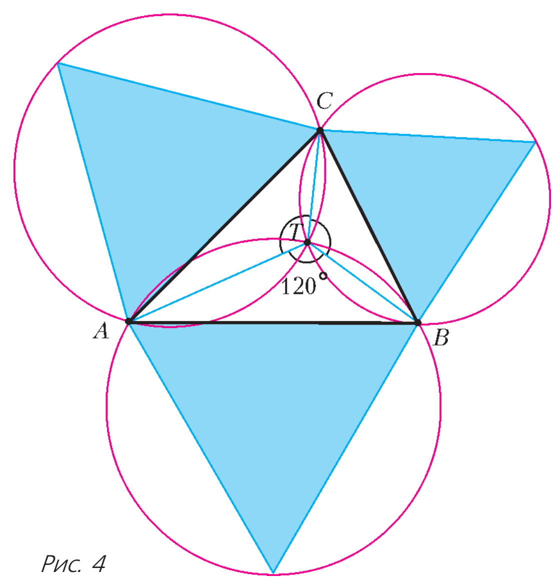


Рис. 4

Где ошибка? Минимум суммы расстояний до вершин остроугольного треугольника достигается в точке Торричелли. Однако решение, которое мы привели, неверно. И ошибка весьма серьезная! Но найти ее не так-то просто.

Все рассуждения – правильные, ошибка находится в первой фразе: «Пусть M – точка, для которой сумма расстояний … наименьшая». А почему такая точка существует? Мы показали (строго и правильно!), что *если минимум в задаче* « $MA + MB + MC \to \min$ » *достигается*, то он достигается в точке Торричелли. Но он может не достигаться ни в какой точке! Этот небольшой, на первый взгляд, недочет иногда приводит к неверным, а порой и к совершенно абсурдным выводам. Вот пример.

«Теорема». *На плоскости дан отрезок AB и параллельная ему прямая l. Тогда любая точка этой прямой равноудалена от A и B.*

Из этого можно получить разные «следствия». Например, что любой треугольник – равносторонний. В самом деле, возьмем произвольный треугольник ABC и проведем через вершину C прямую l, параллельную AB. Тогда из «теоремы» следует, что $AC = BC$. Аналогично доказываем, что $BC = AB$.

«Доказательство.» Для любой точки M прямой l рассмотрим величину $|AM - BM|$. Заметим, что эта величина не может расти неограниченно: она никогда не превосходит длины AB (по неравенству треугольника). Возьмем точку M, для которой эта величина достигает своего максимума на прямой l. Предположим, что $AM > BM$, т.е. что M находится справа от серединного перпендикуляра к отрезку AB (рис.5). Тогда, немного сдвинув точку M вправо, мы увеличим разность $AM - BM$. Действительно, в четырехугольнике $AMM'B$ сумма диагоналей больше суммы противоположных сторон (это следует из неравенства треугольника), поэтому $AM' + BM > AM + BM'$, откуда $AM' - BM' > AM - BM$, что противоречит выбору точки M. Значит, неравенство $AM > BM$ невозможно. Аналогично, неравенство $AM < BM$ невозможно. Следовательно, $AM = BM$. Значит, максимум выражения $|AM - BM|$ равен нулю. Поэтому оно равно нулю для всех точек прямой l.

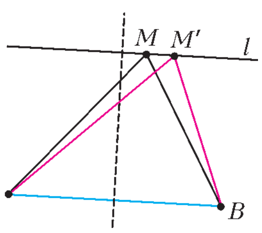


Рис. 5

Единственная ошибка в этом рассуждении заключается в том, что точки M не существует. Максимум выражения $|AM - BM|$ на прямой l не достигается. Если отодвигать точку M все дальше и дальше по прямой, то это выражение будет все время увеличиваться и стремиться к длине AB, но никогда ее не достигнет. Поэтому наше решение задачи неверно.

А что же с точкой Торричелли ? Будет ли она давать ответ? Да. Но это нужно строго обосновать. Можно доказать, что минимум в задаче « $AM + BM + CM \to \min$ » достигается. Тогда все будет сделано. Но это заведет нас слишком далеко, к свойствам компактных множеств и к теореме Вейерштрасса. Все это вы будете проходить в институте. Мы же, оставаясь в рамках школьной программы, просто найдем другое, верное решение. Причем мы в нем используем тот предполагаемый ответ, который до этого получили, но не смогли строго обосновать.

Правильное решение. Нам понадобится один несложный факт, который мы сформулируем в виде упражнения.

Упражнение 6. Для любой точки внутри равностороннего треугольника сумма расстояний от нее до сторон постоянна и равна высоте треугольника. Если же точка находится вне треугольника, то эта сумма больше высоты.

Указание. Соедините данную точку с вершинами треугольника и выразите площади трех образовавшихся треугольников.

Пусть M – любая точка плоскости, отличная от T. Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему эту вершину с точкой T. Эти три прямые образуют равносторонний треугольник (рис.6). Назовем его Δ.

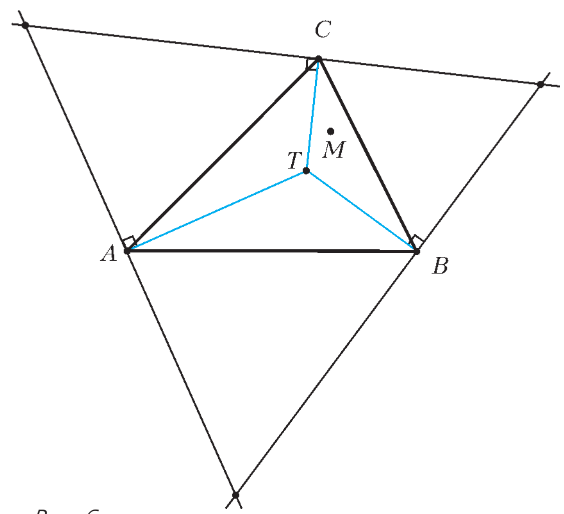


Рис. 6

Сумма отрезков TA, TB и TC равна высоте треугольника Δ. А сумма отрезков MA, MB и MC больше суммы расстояний от точки M до сторон Δ, а значит, больше высоты Δ.

Только теперь, после строгого доказательства, мы можем, наконец, написать ответ.

Ответ. Точка Торричелли T.

Задача решена полностью. Первое решение оказалось ненужным. Во втором мы все строго доказали, от начала и до конца. К тому же, второе решение гораздо короче! Но додуматься до него самостоятельно – совсем не просто. Для этого надо было хотя бы предполагать правильный ответ с точкой Торричелли, а затем им воспользоваться. Вот для этого и было необходимо первое рассуждение, пусть оно и было нестрогим.

Итак, мы будем решать задачи на минимум в два шага. Сначала, в первом шаге, пробуем угадать правильный ответ. Для этого мы решаем задачу, предполагая, что минимум достигается. Далее, во втором шаге, мы строго обосновываем этот ответ. И всякий раз знание ответа, полученного на первом шаге, будет помогать нам найти правильное решение. Хотя формально первый шаг не нужен: все решение целиком содержится во втором шаге.

Примечание. Задача 1 известна уже более 350 лет. Впервые она была опубликована в 1659 году Винченцо Вивиани (1622–1703), итальянским физиком и математиком, учеником Галилея. Но еще до этого она была решена другим учеником Галилея, Эванджелиста Торричелли (1608–1647), тем самым, который открыл законы давления жидкости. По некоторым сведениям, Торричелли узнал об этой задаче от великого французского математика Пьера Ферма (1601–1665), с которым состоял в переписке. По этой причине точку Торричелли называют также точкой Ферма. Позже швейцарский геометр Якоб Штейнер (1796–1863) нашел чисто геометрическое решение задачи 1.

Упражнения

7. На сторонах остроугольного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Каждая вершина исходного треугольника соединена отрезком с противоположной вершиной равностороннего треугольника. Тогда эти три отрезка пересекаются в точке Торричелли. Их длины равны сумме расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника.

8 (теорема Помпею). Дан равносторонний треугольник ABC и точка M. Если M лежит на описанной окружности треугольника ABC, то один из трех отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других. Если M не лежит на описанной окружности, то каждый из отрезов меньше суммы двух других.

Указание. Сделайте поворот на $60°$ вокруг одной из вершин треугольника.

9. С помощью упражнения 8 получите другое решение задачи 1.

Задача 2. $\boldsymbol{p = 2}$. *Найти точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин треугольника наименьшая.*

Как мы договорились, решение будет состоять из двух шагов.

Шаг 1. Ищем точку. Мы начнем с одного полезного факта.

Факт 1. *Геометрическим местом точек, сумма квадратов расстояний от которых до данных точек A и B постоянна, является окружность с центром в середине AB.*

Доказательство. Пусть M – произвольная точка. Обозначив через O середину отрезка AB и применив формулу длины медианы, получаем $OM^2 = \frac{1}{4}\left(2AM^2 + 2BM^2 - AB^2\right)$. Поэтому если величина $AM^2 + BM^2$ постоянна, то и расстояние OM постоянно, и наоборот.

Теперь будем определять положение точки M, для которой сумма $AM^2 + BM^2 + CM^2$ наименьшая. Проведем окружность через точку M с центром в точке C_1 – середине AB. Если перемещать точку M по этой окружности, то сумма $AM^2 + BM^2$ не меняется, а меняется только последнее слагаемое CM^2. Надо минимизировать это слагаемое, т.е. найти на окружности точку, ближайшую к точке C. Это – точка пересечения окружности с отрезком CC_1 (рис.7). Таким образом, M должна лежать на медиане CC_1. Аналогично, она лежит и на двух других медианах. Следовательно, M – точка пересечения медиан, или центр тяжести треугольника ABC.

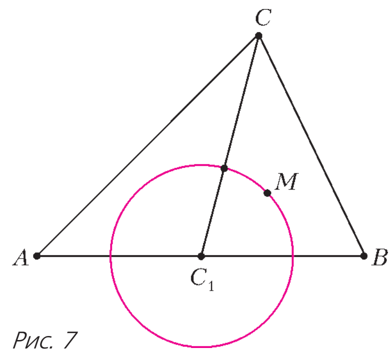


Рис. 7

Шаг 2. Доказываем. Итак, мы выдвигаем гипотезу, что для центра тяжести – здесь и далее обозначаем его через G – сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна. Какие свойства точки G мы знаем? Одно из главных: сумма векторов $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ равна нулю. Для произвольной точки M, обозначив $\vec{x} = \overrightarrow{MG}$, получим (рис.8)

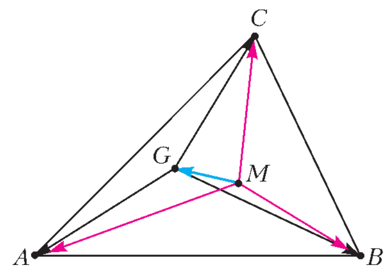


Рис. 8

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 =$$
$$= \left(\vec{x} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\vec{x} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\vec{x} + \overrightarrow{GC}\right)^2 =$$
$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\vec{x}\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) + 3\left|\vec{x}\right|^2 =$$
$$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\left|\vec{x}\right|^2 .$$

Мы доказали такой факт, интересный сам по себе:

Факт 2. *Сумма квадратов расстояний от произвольной точки M до вершин треугольника равна сумме квадратов расстояний от точки G до этих вершин, плюс* $3GM^2$.

Следовательно, сумма квадратов наименьшая, когда $GM = 0$, т.е. $M = G$.

Ответ. Точка пересечения медиан G.

Задача 3. $\boldsymbol{p = \infty}$. *Найти точку, для которой наибольшее из трех расстояний до вершин данного остроугольного треугольника минимально.*

Шаг 1. Ищем точку. Самое большое из трех расстояний MA, MB и MC должно быть минимально. Интуиция подсказывает, что для этого все три расстояния должны быть равны. В самом деле, пусть, например, MA – наибольшее из трех расстояний. Если не все они равны, то какое-нибудь из двух оставшихся расстояний будет меньше MA. Например, $MB < MA$. Немного сдвинем точку M к прямой AC в направлении, перпендикулярном этой прямой (рис.9). Тогда оба расстояния MA и MC уменьшаться (это следует, например, из теоремы Пифагора). При этом сдвинем ее

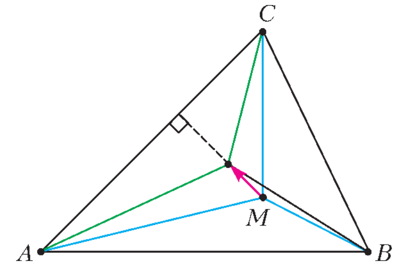


Рис. 9

настолько мало, чтобы неравенство $MB < MA$ по-прежнему выполнялось. Тогда наибольшее из трех расстояний MA, MB, MC уменьшится. Следовательно, если точка M дает решение задачи, то она должна быть равноудалена от вершин треугольника, т.е. совпадать с центром описанной окружности O.

Шаг 2. Доказываем. Рассмотрим произвольную точку M. Хотя бы один из отрезков OA, OB, OC образует с отрезком OM тупой угол (рис.10). Иначе все три вершины треугольника ABC лежали бы по одну сторону от прямой a, перпендикулярной OM и проходящей через точку O. Значит, прямая a не пересекает треугольник, что невозможно, поскольку O лежит внутри треугольника. Пусть, например, $\angle MOA > 90°$. Тогда $MA > OA = R$, где R – радиус описанной окружности. Следовательно, $\max\{MA, MB, MC\} > R$. Поэтому для точки O наибольшее из расстояний до вершин равно R, а для любой другой точки оно больше R.

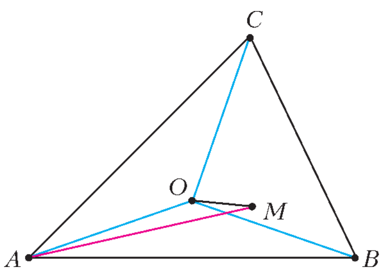


Рис. 10

Ответ. Центр описанной окружности O.

Вписанный треугольник с наименьшими сторонами

Общая задача. *В данный остроугольный треугольник вписать треугольник с наименьшей L_p-нормой длин сторон.*

Таким образом, при каждом $p \geq 1$ нужно минимизировать величину $a^p + b^p + c^p$, где a, b, c – длины сторон вписанного треугольника; при $p = \infty$ минимизируем величину $\max\{a, b, c\}$. Далее мы обозначаем через ABC исходный треугольник, через $A'B'C'$ – вписанный треугольник, при этом $B'C' = a$, $C'A' = b$, $A'B' = c$ (рис.11). Для каждого p получается отдельная задача. Снова у нас бесконечно много задач. В каждой задаче будет возникать свой вписанный треугольник. И своя замечательная точка! При чем здесь замечательные точки, спросите вы? Ведь на сей раз речь идет только о вписанных треугольниках. Дело в том, что каждой точке внутри треугольника ABC соответствует свой вписанный треугольник. Он называется *педальным* треугольником.

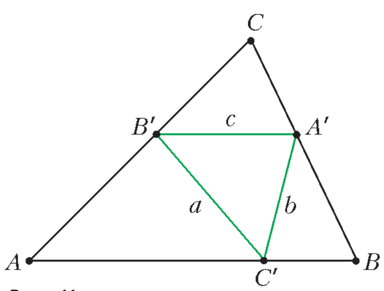


Рис. 11

Определение 2. *Педальным треугольником точки M называется треугольник с вершинами в основаниях перпендикуляров, опущенных из M на стороны треугольника ABC или на их продолжения.*

Название произошло от итальянского *piede* либо от французского *pied*, что означает «ступня» (отсюда – «педаль»), а в математике так еще называют основание перпендикуляра (*il piede della perpendicolare*). Иногда в литературе встречается другой термин, «подерный треугольник» (то же, но от греческого слова).

Педальный треугольник центра описанной окружности – это треугольник с вершинами в серединах сторон треугольника ABC. Педальный треугольник *ортоцентра* (точки пересечения высот) – это треугольник с вершинами в основаниях высот. Он называется *ортотреугольником* треугольника ABC. Строго говоря, не для любой точки M педальный треугольник будет треугольником: он может выродиться в прямую. Но произойдет это, только если точка M лежит на описанной окружности (упражнение 12).

Разумеется, не любой вписанный треугольник является педальным. Но оказывается, что в нашей задаче только педальные треугольники могут давать решения.

Теорема. *Для каждого p вписанный треугольник с наименьшей L_p-нормой сторон является педальным треугольником.*

Доказательство. Путь $A'B'C'$ – произвольный треугольник, вписанный в треугольник ABC (рис.12).

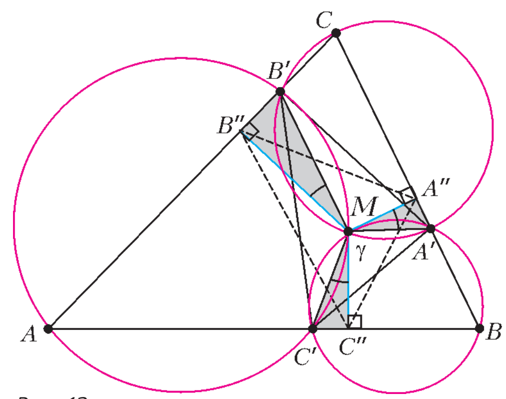


Рис. 12

Покажем, что описанные окружности треугольников $A'B'C$, $B'C'A$ и $C'A'B$ пересекаются в одной точке. Если M – точка повторного пересечения окружностей $A'B'C$ и $B'C'A$, то $\angle A'MB' = 180° - \angle C$ и, аналогично, $\angle B'MC' = 180° - \angle A$. Следовательно,

$$\angle C'MA' = 360° - \angle A'MB' - \angle B'MC' = \\ = \angle C + \angle A = 180° - \angle B.$$

Значит, точка M лежит на окружности $C'A'B$. Опустим теперь перпендикуляры MA'', MB'' и MC'' на стороны треугольника ABC. Угол $A''MB''$ равен углу $A'MB'$ (они оба равны $180° - \angle C$). Следовательно, $\angle A''MA' = \angle B''MB'$. Обозначим через γ величину этих равных углов. Аналогично, $\angle C''MC' = \gamma$. Если теперь повернуть треугольник $A'B'C'$ на угол γ и сжать его гомотетично относительно точки M с коэффициентом $\cos\gamma$, то получится треугольник $A''B''C''$. Итак, педальный треугольник точки M (это треугольник $A''B''C''$) подобен треугольнику $A'B'C'$, причем коэффициент подобия $\cos\gamma$ меньше единицы. Следовательно, он имеет меньшую L_p-норму длин сторон.

Таким образом, для любого вписанного треугольника найдется педальный треугольник с такой же или меньшей L_p-нормой длин сторон. Поэтому решение задачи следует искать только среди педальных треугольников.

Упражнения

10. На плоскости дан равносторонний треугольник. Найти геометрическое место точек, педальные треугольники которых – прямоугольные.

11. Для данного треугольника найдите максимальную возможную площадь педального треугольника.

12. Педальный треугольник вырождается в прямую тогда и только тогда, когда точка лежит на описанной окружности. Эта прямая называется *прямой Симсона* данной точки.

13. Прямые Симсона диаметрально противоположных точек описанной окружности перпендикулярны.

14. Вокруг треугольника ABC описана окружность. Прямая Симсона середины дуги AB, содержащей точку C, делит пополам периметр треугольника.

15. Прямая Симсона данной точки делит пополам отрезок между этой точкой и ортоцентром.

Примечание. Прямая носит имя шотландского математика Роберта Симсона (1687–1768), хотя открыта она была другим шотландцем, Вильямом Уоллесом (1768–1843).

Задача 4. $p = 1$. *В данный остроугольный треугольник вписать треугольник наименьшего периметра (задача Фаньяно).*

Шаг 1. Ищем треугольник. Пусть $A'B'C'$ – вписанный треугольник наименьшего периметра.

Зафиксируем две его вершины A' и B'. Если перемещать третью вершину по стороне AB, то периметр треугольника $A'B'C'$ может только увеличиться. Поэтому, сумма $A'C' + B'C'$ является наименьшей суммой расстояний от точек A' и B' до точки на AB. Следовательно, точка C' дает решение задачи о кратчайшем пути из A' до B' с заходом на прямую AB. Это значит, что $\angle A'C'B = \angle B'C'A$ (угол падения равен углу отражения). Рассуждая так же с двумя другими вершинами, получаем:

стороны треугольника $A'B'C'$ образуют попарно равные углы со сторонами треугольника ABC.

Ортотреугольник и ортоцентр. Мы охарактеризовали треугольник $A'B'C'$. Осталось его найти. Из равенства углов при вершине A' получаем, что $A'C$ – биссектриса внешнего угла треугольника $A'B'C'$ (рис.13). Аналогично, $B'C$ – биссектриса внешнего угла при вершине B'. Как мы знаем, биссектрисы двух внешних углов треугольника пересекаются на биссектрисе третьего (внутреннего) угла. Биссектрисы $A'C$ и $B'C$ пересекаются в точке C, а биссектриса угла при вершине C' – это перпендикуляр к стороне AB. Получаем, что этот перпендикуляр проходит через вершину C, т.е. CC' – высота. Таким образом, вершины треугольника $A'B'C'$ – это основания высот треугольника ABC, т.е. $A'B'C'$ – ортотреугольник.

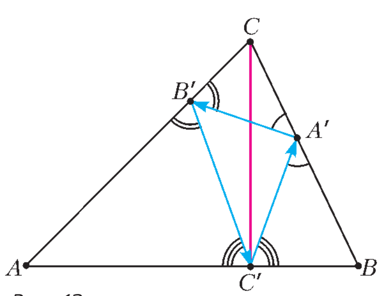


Рис. 13

Стороны ортотреугольника образуют замкнутый путь луча света, бесконечно отражающегося от сторон треугольника ABC. Можно сказать иначе: маленький шарик, последовательно отражаясь от сторон треугольника в точках A', B' и C', будет вечно двигаться по этой замкнутой траектории. Математики в таких случаях говорят, что стороны треугольника $A'B'C'$ образуют *замкнутый бильярд* для внешнего треугольника ABC.

Шаг 2. Доказываем. По нашему предположению, стороны треугольника наименьшего периметра образуют равные углы в вершинах со сторонами треугольника ABC. Поэтому будет естественным применить симметрию относительно сторон ABC. Пусть $A'B'C'$ – произвольный вписанный треугольник. Отразим точку C' от прямой CA, получив точку K, и от прямой CB, получив точку N (рис.14). Периметр треугольника $A'B'C'$ равен длине ломаной $KB'A'N$. Длина ломаной не

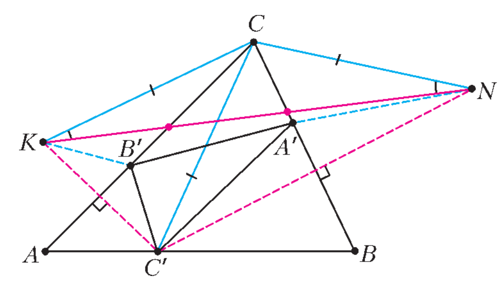


Рис. 14

меньше отрезка KN, равного (из равнобедренного треугольника KCN) $2KC \cdot \sin\dfrac{\angle KCN}{2} = 2CC' \cdot \sin\angle C$. Следовательно, длина ломаной $KB'A'N$ минимальна, когда A' и B' являются точками пересечения сторон CB и CA с отрезком KN, а точка C' является основанием высоты (в этом случае отрезок CC' наименьший). Следовательно, $A'B'C'$ – ортотреугольник.

Ответ. Ортотреугольник, т.е. педальный треугольник ортоцентра.

Задача 4 была впервые поставлена и решена итальянским математиком Джованни Фаньяно в 1775 году. Его решение было аналитическим и достаточно длинным, причем в нем он использовал результаты, полученные ранее его отцом, известным математиком Джулио Карло Фаньяно (1686–1766). Первые геометрические решения появились гораздо позже.

Упражнения

16. Ортоцентр треугольника ABC является центром вписанной окружности ортотреугольника, а точки A, B, C – центрами его вневписанных окружностей.

17. Стороны ортотреугольника равны произведениям сторон исходного треугольника на косинусы противоположных углов. Периметр равен $\dfrac{2S}{R}$, где S и R – соответственно площадь и радиус описанной окружности исходного треугольника. Радиус его описанной окружности равен $\dfrac{1}{2}R$.

Задача 5. $p = 2$. *В данный треугольник вписать треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон.*

Шаг 1. Ищем треугольник. Пусть P – середина стороны $A'B'$ вписанного треугольника. Как мы знаем (факт 1), все точки C', для которых сумма $|B'C'|^2 + |A'C'|^2$ принимает данное значение, есть окружность с центром P. Если треугольник $A'B'C'$ дает решение задачи, то радиус этой окружности нельзя уменьшить, следовательно, она касается прямой AB. Итак, отрезок PC перпендикулярен AB. Получили следующее описание решения:

медианы треугольника $A'B'C'$ перпендикулярны сторонам треугольника ABC.

Иными словами, *треугольник $A'B'C'$ является педальным для своей точки пересечения медиан*. Какие треугольники $A'B'C'$ обладают данным свойством?

Точка Лемуана и симедианы. Пусть L – точка пересечения медиан треугольника $A'B'C'$. Тогда $\overline{LA'} + \overline{LB'} + \overline{LC'} = 0$ (рис.15). После поворота на 90° три данных вектора становятся сонаправлены векторам $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ и $\overline{AB}$ соответственно, сумма которых также равна нулю. Следовательно, длины векторов $\overline{LA'}$, $\overline{LB'}$, $\overline{LC'}$ пропорциональны длинам сторон BC, CA, AB.

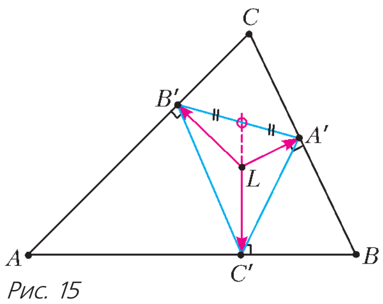


Рис. 15

Итак, *расстояния от точки L до сторон треугольника пропорциональны этим сторонам*. Например, расстояния от L до сторон AC и BC относятся как $AC:BC$. С другой стороны, расстояния от любой точки N медианы треугольника ABC, выходящей из вершины C, до сторон AC и BC обратно пропорциональны длинам этих сторон (это следует из равенства площадей треугольников ACN и BCN). Следовательно, прямая CL симметрична медиане относительно биссектрисы угла C.

Определение 3. *Симедианой треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы того же угла.*

По аналогии с другими замечательными линиями треугольника, мы будем иногда понимать под симедианой всю прямую, а иногда – только ее отрезок от вершины треугольника до точки пересечения с противоположной стороной. Три симедианы треугольника пересекаются в одной точке (упражнение 23), которая называется *точкой Лемуана*. У нее множество интересных свойств. Некоторые из них сформулированы в упражнениях 19–25. Особенно важным для нас будет следующий известный факт, который мы предлагаем вам доказать самостоятельно.

Упражнение 18. Из всех точек плоскости наименьшая сумма квадратов расстояний до сторон треугольника достигается в точке Лемуана.

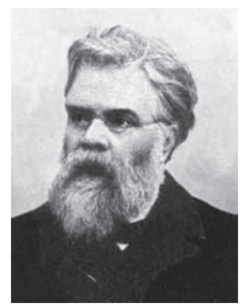
Итак, вписанный треугольник с наименьшей суммой квадратов сторон должен быть педальным треугольником точки Лемуана. Приступаем ко второму шагу.

Шаг 2. Доказываем. Мы воспользуемся сформулированным выше свойством точки Лемуана, а также следующим фактом, уже гораздо более простым: *сумма квадратов сторон треугольника втрое больше суммы квадратов расстояний от точки пересечения медиан до его вершин*. Доказать это можно, например, применив формулу для медианы (см. доказательство факта 1) и воспользовавшись тем, что расстояние от центра тяжести до вершины равно $2/3$ медианы.

Пусть, как всегда, $A'B'C'$ – произвольный вписанный треугольник. Обозначим через G' его точку пересечения медиан. Сумма квадратов сторон треугольника $A'B'C'$ равна утроенной сумме квадратов отрезков $G'A'$, $G'B'$ и $G'C'$, это не меньше, чем утроенная сумма квадратов расстояний от точки G' до сторон треугольника ABC, что, в свою очередь, не меньше, чем утроенная сумма квадратов расстояний от точки L до сторон ABC (упражнение 18). Поскольку точка Лемуана L является точкой пересечения медиан своего педального треугольника, утроенная сумма квадратов расстояний от L до сторон треугольника ABC (т.е. до вершин педального треугольника) равна сумме квадратов сторон педального треугольника. Итак, сумма квадратов сторон произвольного вписанного треугольника $A'B'C'$ не меньше, чем сумма квадратов сторон педального треугольника точки L.

Ответ. Педальный треугольник точки Лемуана.

Точка Лемуана была открыта и подробно исследована в 1874 году французским инженером и математиком Эмилем Лемуаном (1840–1912), который по праву считается одним из родоначальников геометрии треугольника. Лемуан также известен своей гипотезой о простых числах (не доказанной и не опровергнутой до сих пор): каждое нечетное число, начиная с 7, представимо в виде суммы $2p + q$, где p и q – простые числа.


Эмиль Лемуан

Что касается задачи 5, нам не известно, ставилась ли она в литературе ранее.

Упражнения

19. Высота прямоугольного треугольника, выходящая из прямого угла, является его симедианой. Обратно, если симедиана треугольника совпадает с высотой, то она выходит из прямого угла.

20. Симедиана является геометрическим местом точек, расстояния от которых до двух сторон треугольника пропорциональны этим сторонам.

21. Симедиана делит стороны треугольника на отрезки, пропорциональные квадратам прилежащих сторон.

22. Касательные к окружности ABC, проведенные в точках A и B, пересекаются на симедиане, выходящей из вершины C.

23. Три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

24. Точка Лемуана прямоугольного треугольника находится в середине высоты, опущенной из прямого угла.

25. Три прямые, соединяющие середины сторон треугольника с серединами соответствующих высот, пересекаются в точке Лемуана.

Задача 6. $p = \infty$. В данный треугольник вписать треугольник с наименьшей максимальной стороной.

Шаг 1. Ищем треугольник. Интуитивно ясно, что все три стороны должны быть равны, т.е. вписанный треугольник должен быть правильным. Проверим. Во-первых, ни одна из точек A', B', C' не может совпадать с вершиной треугольника ABC. Если, например, $B' = C$, то сторона $B'C$ не меньше высоты треугольника, опущенной из вершины C. Таким образом, максимальная сторона треугольника $A'B'C'$ не меньше наименьшей высоты треугольника ABC. Пусть CC' – наименьшая высота. Окружность с центром C' и радиусом немного меньше отрезка $C'C$ пересекает стороны AC и BC в некоторых точках B' и A' соответственно (рис.16). Тогда у получившегося треугольника $A'B'C'$ максимальная сторона меньше высоты CC'.

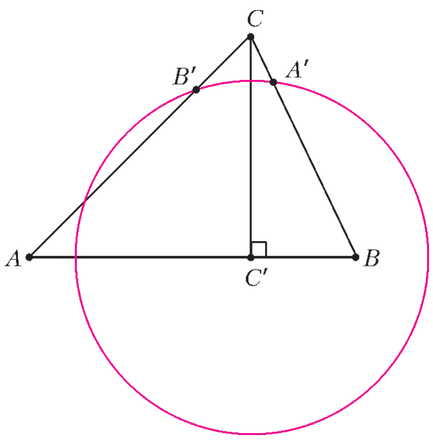


Рис. 16

Итак, у треугольника $A'B'C'$ все вершины лежат внутри сторон исходного треугольника. Пусть $A'B'$ – наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$. Если одна из оставшихся сторон не равна $A'B'$, например $A'C' < A'B'$, то, немного подвинув точку A' по стороне BC в одном из двух направлений, мы уменьшаем длину $A'B'$. Так мы уменьшили максимальную сторону. Проделав то же, при необходимости, со стороной $B'C'$, мы получаем треугольник с меньшим значением максимальной стороны. Значит, треугольник $A'B'C'$, дающий решение задачи, обязан быть равносторонним. Но он еще и педальный! Итак,

если решение задачи существует, то его дает равносторонний педальный треугольник.

Остается выяснить, у каких точек педальные треугольники – равносторонние.

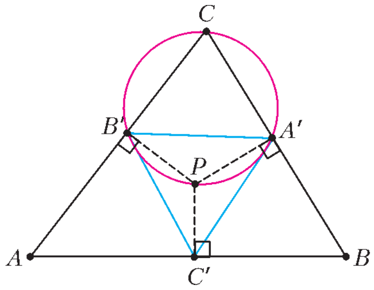


Рис. 17

Окружности Аполлония и точки Аполлония. Пусть у точки P педальный треугольник равносторонний (рис.17). Применив теорему синусов к треугольнику $A'B'C$, получаем, что диаметр его описанной окружности равен $\frac{A'B'}{\sin \angle C}$. Этот диаметр совпадает с отрезком CP. С другой стороны, как мы знаем, $\sin \angle C = \frac{AB}{2R}$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Таким образом, $A'B' = \frac{AB \cdot CP}{2R}$. Так как треугольник $A'B'C'$ – равносторонний, то получаем главное свойство, характеризующее точку P:

$$AB \cdot CP = BC \cdot AP = CA \cdot BP .$$

Иначе говоря, *расстояния от точки P до вершин треугольника обратно пропорциональны длинам сторон.*

Таких точек для неравностороннего треугольника существует две, они называются точками Аполлония. Одна из них лежит внутри описанной окружности (назовем ее внутренней, именно ее будем обозначать буквой P), другая – вне нее (обозначаем буквой Q). В случае остроугольного треугольника точка P лежит не только внутри окружности, но и внутри треугольника. Точки P и Q переходят друг в друга при инверсии относительно описанной окружности (если вы пока не знакомы с инверсией, пропустите эту фразу, в дальнейшем она не используется). Точки Аполлония являются точками пересечения трех *окружностей Аполлония* треугольника. Оказывается, что внутренняя точка Аполлония P и дает решение задачи. Свойства точек и окружностей Аполлония мы докажем в упражнениях 26–32, а пока закончим решение.

Шаг 2. Доказываем. Пусть $A'B'C'$ – педальный треугольник точки P. Он равносторонний, обозначим его сторону через a. Достаточно доказать, что для любой другой точки M наибольшая сторона педального треугольника будет больше a. Хотя бы один из отрезков PA, PB, PC образует тупой угол с отрезком PM. Пусть это будет PA. Тогда $PA < MA$. Как мы доказали ранее, $a = B'C' = PA \cdot \sin \angle A$. Аналогично, соответствующая сторона педального треугольника точки M равна $MA \cdot \sin \angle A > a$, что и требовалось.

Ответ. Педальный треугольник внутренней точки Аполлония.

Примечание. Точка Торричелли обозначается буквой T, точка Лемуана – буквой L; точку Аполлония было бы естественно обозначить буквой A, но она уже использована для вершины треугольника. Поэтому мы назвали ее буквой P, поскольку полное имя древнегреческого математика – Аполлоний Пергский (262–190 до н.э.). Он – один из трех (наряду с Евклидом и Архимедом) великих геометров античности, автор ряда глубоких теорем о свойствах окружности и других кривых, родоначальник координатного метода (за 18 веков до Декарта!). Именно Аполлоний придумал слова «парабола», «гипербола», «абсцисса», «ордината» и многие другие. Его главное достижение – фундаментальный труд «Коники», который на многие века стал настольной книгой геометров, астрономов и механиков. Одна из 387 теорем, доказанных в этом сочинении, посвящена определению окружности как геометрического места точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек равно заданному числу $\kappa \neq 1$ (окружность Аполлония, см. упражнение 26).

Задача 6 была предложена А.А.Заславским на заочном туре геометрической олимпиады имени И.Ф.Шарыгина в 2011 году. Условие и авторское решение можно найти на сайте www.geometry.ru.

Упражнение 26. Дан неравнобедренный треугольник ABC. Геометрическое место точек M, для которых $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$ есть окружность (окружность Аполлония треугольника ABC). Отрезок между основаниями биссектрис внешнего и внутреннего углов при вершине C является ее диаметром.

Указание. Точки D и E – основания биссектрис внешнего и внутреннего углов при вершине M треугольника AMB, не зависят от точки M. Точка M лежит на окружности с диаметром DE.

Если $AC = BC$, то окружность Аполлония вырождается в прямую – серединный перпендикуляр к стороне AB. Эту прямую также будем считать окружностью Аполлония. Таким образом, у любого треугольника есть три окружности Аполлония.

Упражнения

27. Каждая из окружностей Аполлония ортогональна описанной окружности треугольника (окружности называются ортогональными, если их радиусы, проведенные в точку пересечения, перпендикулярны).

28. Три окружности Аполлония треугольника пересекаются в двух точках (точки Аполлония). Расстояния от точки Аполлония до вершин треугольника обратно пропорциональны противолежащим сторонам.

29. Возьмем четыре точки: вершины треугольника и его точку Аполлония (любую из двух). Каждая из этих точек является точкой Аполлония для треугольника с вершинами в трех оставшихся точках. Такую четверку точек будем называть *четверкой Аполлония*.

30. Четыре шара лежат на плоскости и попарно касаются друг друга. Тогда точки их касания с плоскостью образуют четверку Аполлония.

31. Общие хорды окружностей Аполлония треугольника с его описанной окружностью являются симедианами.

32. Прямая, соединяющая две точки Аполлония треугольника, проходит через точку Лемуана.

Заключение

Мы разобрали две геометрические задачи на минимум: о точке, ближайшей к вершинам треугольника, и о вписанном треугольнике с наименьшими сторонами. Вопрос о том, в каком смысле понимать минимум сразу трех величин (трех расстояний до вершин треугольника или, соответственно, трех сторон вписанного треугольника), был решен с помощью L_p-нормы. Для математика это наиболее естественная и разумная формулировка. Выбирая различные значения p, мы получаем совершенно разные задачи. Они не только имеют разные ответы, но и, как мы видели, по-разному решаются. Хорошо знакомые нам замечательные точки теперь выступают в новом качестве: точка пересечения медиан – это точка минимума L_2-нормы расстояний до вершин треугольника, центр описанной окружности – точка минимума L_∞-нормы. Выбрав $p = 1$, 2 и ∞ в задаче о вписанном треугольнике, мы пришли, соответственно, к ортоцентру, точке Лемуана и точке Аполлония. Каждая из этих точек имеет свою особую историю и свои интересные свойства. Теперь оказалось, что на самом деле они происходят из одной и той же задачи, только при разных p. Попробуйте самостоятельно поставить новые геометрические задачи на минимум с помощью L_p-нормы. Интересно, к каким еще открытиям это приведет?

Вместо послесловия

Разобранные нами задачи имеют схожие формулировки, но совершенно различные решения. Профессиональный математик часто сталкивается с задачами на максимум и минимум. И придумывать для каждой из них новую идею решения – непозволительная роскошь. На это просто не хватит времени. Существует ли для подобных задач какой-либо единый метод? Да, и он вам знаком! По крайней мере, тем, кто закончил 10 класс. Все они решаются с помощью производной. Правда, решения получаются больше аналитические, чем геометрические. И уже, как правило, не столь красивые и интересные. Рассмотрим, например, задачу о кратчайшем пути между двумя точками с заходом на прямую линию.

На плоскости Oxy точку A поместим в точку на оси Oy с координатами $(0; a)$, $a > 0$, а точку B – в точку с координатами $(c; b)$, c, $b > 0$. Тогда для любой точки $M(x; 0)$ оси Ox длина ломаной AMB равна $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (x - c)^2}$. Теперь для того чтобы найти минимум функции $f(x)$, нужно воспользоваться тремя фактами математического анализа: минимум функции достигается в некоторой точке x, производная функции f в этой точке равна нулю, и как вычисляется эта производная. Из уравнения $f'(x) = 0$ получаем $\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{b^2 + (x - c)^2}}$. Это значит, что $\frac{x}{AM} = \frac{c - x}{BM}$, т.е. косинусы углов, которые образуют отрезки AM и BM с осью Ox, равны. Следовательно, эти углы равны.

Получилось вполне коротко, хотя, согласитесь, уже не так изящно и наглядно, как геометрическое решение с применением симметрии. Перенести это рассуждение на наши задачи с первой попытки не получится. В задаче 1 о точке, ближайшей к вершинам треугольника, в качестве переменной выступает уже не число x, а точка на плоскости. В задаче 2 у нас уже и вовсе три переменные – точки на сторонах треугольника. Поэтому здесь понадобится находить производные функций нескольких переменных. Это можно сделать и увидеть, что, действительно, все наши задачи могут быть решены единообразно, стандартным методом. Более того, с высоты нового знания в этом методе откроются и своя наглядность, и своя красота. Но это уже отдельная тема.