Выход в пространство-2

В.ПРОТАСОВ

Колпаки и шары

Теорему о трех центрах гомотетии, или «о трех колпаках», приписывают знаменитому французскому математику Гаспару Монжу (Gaspard Monge, 1746–1818). Мы сформулируем ее в виде задачи.

Задача 4 (о трех колпаках). *На плоскости даны три круга различных радиусов, ни один круг не содержит другой. К каждой паре кругов провели две внешние касательные и отметили их точки пересечения. Докажите, что три отмеченные точки лежат на одной прямой.*

Стандартное решение этой задачи привлекает теорему Менелая. Но есть у нее и эффектное геометрическое решение с помощью выхода в пространство. Правда, как мы увидим сейчас, с этим решением не все так просто.

Мы будем называть *вершиной* пары кругов разных радиусов точку пересечения их внешних касательных. Таким образом, надо доказать, что для любой тройки кругов три вершины всегда лежат на одной прямой (рис.8). Вершина есть и у пары шаров: это точка, через которую проходят все внешние касательные плоскости к этим шарам. Если провести любую плоскость через центры шаров, то в сечении образуются два круга. Их вершина будет совпадать с вершиной шаров. Можно представить, что на пару шаров надели конус («колпак»), тогда вершина этого конуса является вершиной пары шаров. Заметим, что если доказать теорему о трех колпаках для шаров, то из нее будет следовать утверждение для кругов. В самом деле, построим на каждом круге по шару с тем же центром и радиусом, тогда вершины кругов станут вершинами шаров. Ну а для шаров задача решается просто и наглядно.

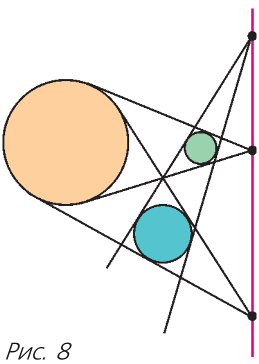

Рис. 8

Решение. Положим на три шара плоскость (рис.9). Она будет касаться всех трех шаров. Значит, она будет содержать все три вершины, поскольку каждая плоскость, касающаяся внешним образом любой пары шаров, содержит их вершины. На те же шары можно положить вторую плоскость, симметричную первой относительно плоскости, проведенной через центры шаров. Поэтому три вершины лежат на одной прямой, по которой эти плоскости пересекаются.

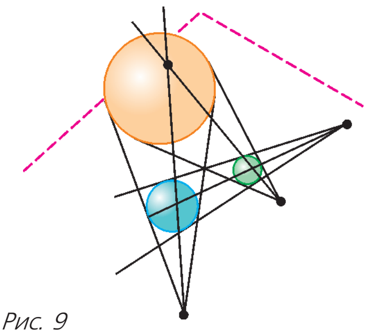

Рис. 9

Задача решена? Не совсем. Вы не заметили подвоха? Дело в том, что не на каждые три шара можно положить плоскость. Пусть, например, есть два больших шара, а третий – очень маленький и расположен между двумя большими. Тогда любая плоскость, касающаяся внешним образом больших шаров, не имеет общих точек с маленьким. Чтобы спасти наше доказательство, поступим так. Во-первых, считаем, что центры шаров не лежат на одной прямой (если

Продолжение. Начало – в «Кванте» №12 за 2017 год.

лежат, то утверждение очевидно). Во вторых, если одновременно уменьшить радиусы шаров в N раз, оставив на месте их центры, положение вершин не изменится. В самом деле, если O_1, O_2 – центры шаров, а r_1, r_2 – их радиусы, то вершина V – это единственная точка на прямой O_1O_2, для которой $MO_1/MO_2 = r_1/r_2$ (как и раньше, отрезки – направленные). Поэтому, раз точки O_1, O_2 и отношение радиусов r_1/r_2 не изменились, то и вершина V осталась на прежнем месте.[1] Тогда уменьшим все радиусы в N раз, чтобы они стали настолько маленькими, что каждый колпак не будет пересекать оставшегося шара. В этом случае на шары можно положить плоскость, и, следовательно, три вершины лежат на прямой.

Из теоремы о трех колпаках (теперь ее можно назвать теоремой, ведь мы ее доказали) проистекает множество следствий о касании кругов и шаров. Мы выделим лишь три из них, еще несколько сформулируем в упражнениях 5–9.

Начнем с того, что если для двух из трех пар кругов внешние касательные заменить на внутренние, то теорема останется верна. В доказательстве ничего не изменится. Только плоскость теперь будет касаться двух шаров с одной стороны, а третьего – с другой. Соответствующие точки назовем внутренними вершинами. Итак, *внешняя и две внутренние вершины трех кругов (или трех шаров) лежат на одной прямой*. Если два шара касаются, то внутренняя вершина превратится в точку касания. Этот предельный случай дает такое следствие.

Следствие 1. *Два шара касаются внешним образом третьего. Тогда вершина двух шаров лежит на прямой, соединяющей две точки касания.*

То же верно, конечно, и для кругов на плоскости. Из этого следует такой замечательный факт, который мы для простоты сформулируем для круга на плоскости (хотя он верен и для шара в пространстве).

Следствие 2. *На отрезке AB даны точки C и D. Через C и D проведена произвольная окружность, к которой из A и B проведены касательные, при этом точки касания лежат по одну сторону от прямой AB. Тогда прямая, соединяющая точки касания, проходит через фиксированную точку прямой AB, не зависящую от проведенной окружности.*

Доказательство. Обозначим точки касания через A' и B', а точку пересечения касательных через M. Заметим, что квадрат касательной AA' равен $AD \cdot AC$, а значит, не зависит от окружности. То же с касательной BB'. Проведем окружности с центрами A и B и радиусами, равными этим касательным. Обозначим через V вершину данных окружностей. Эта точка постоянна. Теперь проведем окружность с центром M и радиусом $MA' = MB'$. Она касается нашей пары окружностей в точках A' и B'. Значит, согласно следствию 1, прямая $A'B'$ проходит через V. Значит, V – искомая точка.

Как мы упоминали, у следствия 2 есть «пространственная» версия, когда через точки C и D проводят шар и на него из точек A и B опускают касательные, лежащие в одной плоскости. Тогда прямая, соединяющая точки касания, проходит через фиксированную точку прямой AB. Доказательство остается прежним!

А вот еще один любопытный факт, проистекающий из теоремы о трех колпаках. Его естественно будет назвать «теоремой о клюве».

Следствие 3 (теорема о клюве). *Если стороны пространственного четырехугольника касаются шара, то четыре точки касания лежат на одной окружности.*

Доказательство. Обозначим данный четырехугольник через $ABCD$, а точки касания – через K, L, M, N (рис.10). Касательные AK и AN равны, поэтому мы можем провести сферу с центром A, проходящую через точки N и K. Также мы можем провести сферу с центром C через точки L и M. Этих двух сфер каса-

[1] По сути, здесь мы пользуемся тем, что V – это центр гомотетии, переводящей один шар в другой; этим и объясняется еще одно название теоремы: «теорема о трех центрах гомотетии».

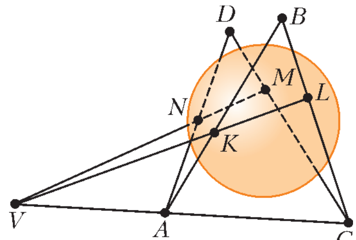

Рис. 10

ется третья – с центром B, проведенная через точки K и L. Значит, можно воспользоваться следствием 1 и заключить, что прямая KL проходит через вершину V двух сфер (с центрами A и C). Также этой пары сфер касается и сфера с центром D, проведенная через точки M и N. Значит, прямая MN проходит через ту же вершину. Итак, прямые KL и MN пересекаются, значит, лежат в одной плоскости, следовательно, все четыре точки касания лежат на окружности – сечении сферы этой плоскостью.

У пространственного четырехугольника тот же критерий для существования вписанного шара, что и у плоского: шар можно вписать тогда и только тогда, когда суммы противоположных сторон равны. Если фиксировать точки A и C, то треугольники ABC и ADC можно разводить и сводить, «птица» будет раскрывать и сжимать «клюв», при этом все время держа в клюве шарик (шарик при этом будет скользить по клюву). Согласно следствию 3, прямые KL и MN, соединяющие точки касания этого шарика с клювом, будут всегда проходить через одну и ту же точку – точку V.

И это – далеко не все, что получается из теоремы о трех колпаках, которую мы доказали выходом в пространство. Еще несколько следствий попробуйте доказать сами.

Упражнения

5. Четыре шара касаются друг друга «по цепочке»: первый – второго, ..., четвертый – первого. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности.

6. Докажите, что в описанном четырехугольнике две диагонали, а также два отрезка, соединяющие точки касания вписанной окружности с противоположными сторонами, пересекаются в одной точке.

7. В пространстве даны сфера и две точки K и L вне нее, причем прямая KL пересекает сферу. Из точки K проводится произвольная касательная KP к сфере (P – точка касания), а прямая LP повторно пересекает сферу в точке Q. Докажите, что всевозможные точки Q пробегают окружность.

8. Докажите, что для любой точки L, лежащей вне заданной сферы, на сфере найдутся две окружности, расположенные в непараллельных плоскостях, которые переходят друг в друга при центральной проекции относительно точки L (т.е. прямые, проведенные через L в точки первой окружности, проходят через точки второй окружности).

Указание. Воспользуйтесь упражнением 7. Рассмотрите окружности, пробегаемые точками P и Q.

9. Докажите, что центр окружности нельзя найти при помощи одной линейки, без циркуля.

Указание. Если такое построение возможно, примените его к одной из окружностей из упражнения 8 в ее плоскости. Так как центральная проекция относительно точки L переводит прямые в прямые, она переведет это построение в такое же построение для второй окружности.

В следующем упражнении получите другое доказательство теоремы о трех колпаках, также с помощью выхода в пространство. Его подсказал автору В.Н.Дубровский. Оно хорошо тем, что проходит для любой тройки кругов, в нем нет «плохих» случаев.

Упражнение 10. В каждом из центров трех заданных кругов восставим перпендикуляр к плоскости. Длина перпендикуляра равна радиусу круга, все перпендикуляры лежат по одну сторону от плоскости. Докажите, что прямая, соединяющая концы двух перпендикуляров, проходит через вершину соответствующей пары кругов. Проведем теперь плоскость через концы трех перпендикуляров. Она пересекает исходную плоскость по прямой. Докажите, что все три вершины лежат на этой прямой. Как изменится это рассуждение, если для двух пар кругов взять внутренние вершины?

Теорема Брианшона

Теорема, которую в 1810 году доказал французский математик Шарль Жюльен Брианшон (1783–1864), теперь по праву считается одним из столпов проективной геометрии.

Теорема (C.J.Brianchon, 1810 г.). *Три диагонали шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке (рис.11).*

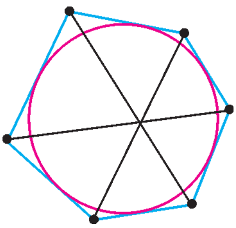

Рис. 11

Доказательство этой теоремы – один из блестящих примеров выхода в пространство. Его приводил и И.Ф.Шарыгин в упомянутой нами статье. Оно вошло во многие задачники по геометрии, и его можно было бы считать самым простым и коротким доказательством теоремы Брианшона, если бы в 1957 году Александр Степанович Смогоржевский (1896–1969) не нашел еще более элегантного рассуждения, с применением радикальных осей (см. книгу А.С.Смогоржевского «Линейка в геометрических построениях», Гостехиздат, 1957 г.). А мы не откажем себе в удовольствии повторить доказательство с выходом в пространство, несколько его изменив. Сначала – два простых вспомогательных факта.

Факт 1. *Две прямые, симметричные друг другу относительно некоторой плоскости, лежат в одной плоскости.*

Факт 2. *Даны три прямые. Если каждые две из них лежат в одной плоскости, то либо все три лежат в одной плоскости, либо все три имеют общую точку, либо все три параллельны.*

Теперь можем приступить к доказательству.

Доказательство теоремы Брианшона. Обозначим наш шестиугольник через $A_1 \ldots A_6$, а точку касания стороны A_1A_2 со вписанной окружностью – через M (рис.12). В вершине A_1 восставим перпендикуляр A_1B_1 к плоскости, в которой лежит шестиугольник, равный по длине касательной

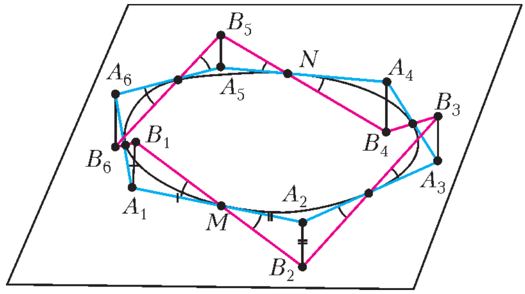

Рис. 12

A_1M. Теперь в вершине A_2 восставим перпендикуляр A_2B_2 к той же плоскости, но лежащий по другую сторону от нее, длина которого равна касательной A_2M. Далее восставим такие же перпендикуляры в остальных вершинах: длина каждого перпендикуляра A_iB_i равна длине касательной к вписанной окружности из вершины A_i, а направления этих перпендикуляров чередуются. Заметим, что каждый из отрезков B_iB_{i+1} составляет угол в 45° со стороной шестиугольника A_iA_{i+1} и пересекает ее в точке касания. Обозначим через N точку касания, лежащую на стороне A_4A_5, и проведем через середину отрезка MN плоскость, перпендикулярную ему

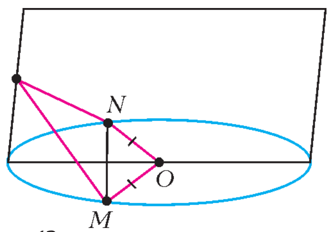

Рис. 13

(рис.13). Радиусы окружности OM и ON симметричны относительно этой плоскости, поэтому симметричны и прямые B_1B_2 и B_4B_5, поскольку они перпендикулярны этим радиусам и составляют равные углы с плоскостью шестиугольника. Значит (факт 1), прямые B_1B_2 и B_4B_5 лежат в одной плоскости. Следовательно, отрезки B_1B_4 и B_2B_5 также лежат в одной плоскости. Повторив то же рассуждение с двумя другими парами сторон нашего шестиугольника, мы видим, что из трех отрезков B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 каждые два лежат в одной плоскости. Применяем факт 2. Эти три отрезка не могут лежать в одной плоскости, иначе в этой же плоскости оказались бы все шесть точек касания, а значит, она совпала бы с плоскостью шестиугольника, что исключено, потому что все точки B_i в ней не лежат. Следовательно, прямые B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6 либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Значит, тем же свойством обладают и их проекции на плоскость шестиугольника – диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6. Так как диагонали не параллельны, то они пересекаются в одной точке.

Вывод. Чем здесь помог выход в пространство? Почему нельзя было провести то же доказательства, не покидая плоскости? Дело в том, что если три прямые, *не лежащие в одной плоскости*, попарно пересекаются, то все три пересекаются в одной точке (факт 2). А если они лежат в одной плоскости, то это неверно! Пример: прямые, содержащие стороны любого треугольника. Поэтому из того, что диагонали шестиугольника пересекаются попарно, не следовало бы, что они пересекаются в одной точке. В этом смысле, в пространстве меньше возможностей, чем в плоскости. Мы вышли в пространство и «подняли» диагонали A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 до отрезков B_1B_4, B_2B_5, B_3B_6. Доказав, что эти отрезки попарно пересекаются, мы, тем самым, доказываем их пересечение в одной точке.

Конфигурации точек и прямых

Проективная геометрия изучает факты и свойства фигур, не меняющиеся при центральных проекциях, т.е. проекциях из фиксированной точки. Многие проективные задачи решаются с помощью выхода в пространство. Тому есть причины, которые мы не будем здесь обсуждать, это увело бы нас слишком далеко в основания проективной геометрии. Скажем только, что весьма трудные планиметрические задачи о конфигурациях точек и прямых превращаются подчас в совсем простые «пространственные» утверждения.

Задача 5 (поляра относительно угла). *Дан угол и точка A, отличная от его вершины (рис.14). Через A проводятся две произвольные прямые, пересекающие стороны угла в точках M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых M_1N_2 и M_2N_1 лежит на фиксированной прямой, проходящей через вершину угла.*

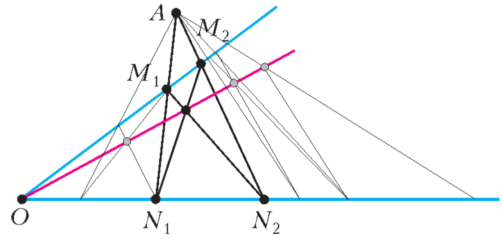

Рис. 14

Если вместо угла взять окружность, то утверждение остается верным, в этом случае эта фиксированная прямая называется *полярой* точки A относительно окружности. У поляры масса интересных свойств, на которых основано важнейшее геометрическое понятие *двойственности* (см., например, книгу Г.С.М.Коксетера и С.П.Грейтцера «Новые встречи с геометрией»). Теорема о поляре имеет несколько доказательств, в том числе вполне геометрических и изящных. Задача 5 утверждает, что поляра бывает не только относительно окружности, но и относительно угла (т.е. относительно пары прямых).[1] Удивительно, что этот факт совсем непросто доказать. Хотя, по идее, с парой прямых все должно быть проще, чем с окружностью. И нам снова поможет выход в пространство.

Сначала мы перейдем к более общему, трехмерному утверждению.

Задача 5′ (поляра относительно двугранного угла). *В пространстве даны двугранный угол и точка A, не лежащая на его ребре. Через A проводится две произвольные прямые, пересекающие грани угла в точках M_1, M_2 и N_1, N_2 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых M_1N_2 и M_2N_1 лежит на*

[1] Для знатоков этот факт не вызовет удивления: поляра есть не только относительно окружности, но и относительно любой коники, а пара прямых – тоже коника, только вырожденная.

фиксированной плоскости, проходящей через ребро угла.

Ясно, что из этого утверждения сразу следует задача 5: достаточно представить наш угол как сечение некоторого двугранного угла. А докажется оно проще, что нас уже не удивляет. («Доказать больше иногда проще»!)

Доказательство (рис.15). Надо показать, что точка K пересечения прямых

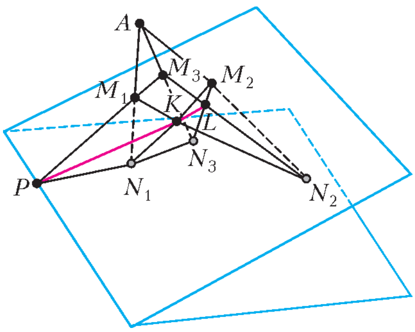

Рис. 15

M_1N_2 и M_2N_1 лежит на фиксированной плоскости. Проведем через точку A еще и третью прямую, пересекающую грани угла в точках M_3 и N_3, обозначим через L точку пересечения прямых M_2N_3 и M_3N_2. Зафиксируем положение прямых AM_2 и AM_3 (тем самым, и точки N_2, N_3 и L), а точку M_1 будем выбирать на грани угла произвольно. Тогда пересечение плоскостей $M_1N_2M_3$ и $N_1M_2N_3$ будет содержать точки K, L и P – точку пересечения плоскости AM_1M_3 с ребром угла. Значит, эти три точки лежат на одной прямой. Следовательно, при любом выборе точки M_1 точка K всегда будет лежать в фиксированной плоскости, проведенной через ребро угла и через точку L. Значит, и при любом выборе точки M_2 она будет лежать на той же плоскости.

У задачи 5 есть еще одно решение – без выхода в пространство, но с применением одного мощного средства – теоремы Дезарга. Однако и сама теорема Дезарга тоже доказывается с помощью выхода в пространство! Но – все по порядку. В 1636 году французский геометр Жерар Дезарг (1591–1661) в своем «Трактате о перспективе» впервые сформулировал и привел доказательство теоремы о двух треугольниках. Вот она.

Теорема (G.Desargues, 1636 г.) *На плоскости даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Если прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения соответствующих сторон треугольников (или их продолжений) лежат на одной прямой (рис.16).*

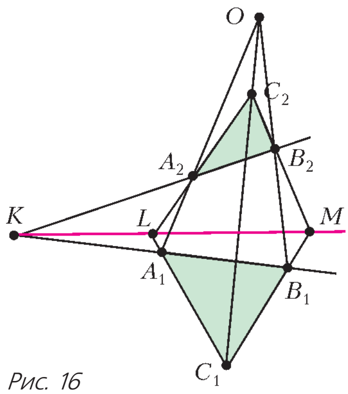

Рис. 16

Этот замечательный факт, видимо, был известен и до Дезарга. Живописцы эпохи Возрождения должны были быть с ним знакомы, поскольку знали основы перспективы и применяли их. Дезарг, однако, впервые его сформулировал в виде теоремы и, что важнее всего, доказал. Причем идея его доказательства практически в неизменном виде используется до сих пор!

Посмотрите на рисунок 16. А теперь представьте, что это не плоский, а пространственный чертеж и заштрихованные треугольники лежат на самом деле в разных плоскостях. Тогда утверждение теоремы очевидно: плоскости заштрихованных треугольников пересекаются по прямой, причем точки K, L, M принадлежат обеим этим плоскостям, а значит, лежат на прямой пересечения. Все, доказательство по существу закончено. Остается аккуратно перейти от пространства к плоскости. Это можно сделать с помощью проекции, а можно с помощью предельного перехода.

Пойдем по второму пути. Закрепляем точки A_1, A_2, B_1, B_2, а точку C_1 немного «поднимем» над плоскостью. Теперь выберем на прямой OC_1 новую точку C_2, рядом с ее первоначальным положением. Получаем, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вылезли из плоскости, значит, к ним можно применить доказанное утверждение: точки K, L, M лежат на одной прямой. Теперь устремим точку C_1 к ее первоначальному положению, а вместе с ней и точку C_2. В пределе получим, что точки K, L, M лежат на одной прямой. Так приемом, называемым *предельный переход*, мы завершаем доказательство.

Упражнения

11. Решите задачу 5 с помощью теоремы Дезарга.

12. Верна ли теорема Дезарга для четырехугольников: если для двух четырехугольников $A_1 \ldots A_4$ и $B_1 \ldots B_4$ на плоскости четыре прямые $A_1B_1, \ldots, A_4B_4$ пересекаются в одной точке, то четыре точки пересечения соответствующих сторон (или их продолжений) лежат на одной прямой?

13 (теорема о бабочке для угла). На сторонах угла взяты точки A и B. Через середину M отрезка AB проходят две прямые, одна из которых пересекает стороны угла в точках A_1, B_1, а другая – в точках A_2, B_2. Прямые A_1B_2 и A_2B_1 пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $MP = MQ$.

Четырехмерное пространство

Если задачи на плоскости можно решать выходом в трехмерное пространство, значит, некоторые задачи стереометрии можно решать выходом в четырехмерное? Да, конечно. Мы дадим такие задачи в виде упражнений в конце статьи, но сначала разберемся, что такое четырехмерное пространство. На помощь приходит декартова система координат. Плоскость – это множество пар чисел. Каждая пара чисел – точка; множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению, – прямая. Расстояния вычисляются с помощью теоремы Пифагора, углы – с помощью скалярного произведения. Пространство – это множество троек чисел. Значит, четырехмерное пространство – множество четверок чисел. Обозначается оно символом $\mathbb{R}^4$. Каждая точка $\boldsymbol{x}$ имеет четыре координаты: $\boldsymbol{x} = (x_1; x_2; x_3; x_4)$ (договоримся точки, в отличие от чисел, обозначать жирным шрифтом). Плоскость (трехмерная!) – это множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению $a_1x_1 + \ldots + a_4x_4 + b = 0$. В $\mathbb{R}^4$ есть и двумерные плоскости, которые являются пересечениями двух трехмерных, т.е. решениями систем из двух линейных уравнений. И конечно, прямые. Их можно определить либо как множество решений системы из трех уравнений (громоздко както), либо параметрически: прямая – это множество точек $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{b}$, где t пробегает все действительные числа. Здесь $\boldsymbol{x}_0$ – произвольная точка прямой, а $\boldsymbol{b}$ – любой вектор, параллельный прямой. Длина вектора $\boldsymbol{b} = (b_1; b_2; b_3; b_4)$ – это $\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$, а расстояние между двумя точками – это длина вектора-отрезка, их соединяющего. Угол между векторами определяется с помощью скалярного произведения, которое, конечно же, равно $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + y_4x_4$. Теперь можно определять четырехмерные фигуры. Например, сфера с центром $\boldsymbol{a}$ и радиусом r – это множество точек $\boldsymbol{x}$, для которых $(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_4 - a_4)^2 = r^2$.

Собственно, и все. Четырехмерное пространство существует, ничего мистического в нем нет. Не очень понятно, присутствует ли оно физически в нашем мире, но в качестве математического объекта мы можем им пользоваться. Многие свойства четырехмерных фигур можно вывести по аналогии с трехмерными. Например, любые пять точек в $\mathbb{R}^4$ являются вершинами четырехмерной пирамиды – *симплекса*.

(Продолжение следует)

Выход в пространство-2

В.ПРОТАСОВ

Симплекс. Каждые четыре вершины симплекса образуют трехмерную грань, имеющую форму тетраэдра. Всего трехмерных граней, таким образом, пять – сколько есть четверок из пяти вершин. Любые две вершины связаны ребром. Почему? Потому что две вершины лежат в трехмерной грани – тетраэдре (достаточно добавить к ним еще две вершины, и получим трехмерную грань), а у тетраэдра, как мы знаем, каждые две вершины образуют ребро. Таким образом, ребер всего 10 – количество пар, взятых из пяти вершин. Существует и правильный тетраэдр, у которого все ребра равны. Чтобы его построить, разместим в трехмерной плоскости из трех первых координат (т.е. плоскости, задаваемой уравнением $x_4 = 0$) правильный тетраэдр с единичным ребром и центром в начале координат – точке O. Таких тетраэдров бесконечно много – берем любой. Расстояние от центра правильного тетраэдра до вершины равно r – это радиус его описанной сферы. Он равен $\frac{\sqrt{6}}{4}$, но это даже не важно. Теперь мы добавляем к тетраэдру пятую вершину $M\left(0;0;0;\sqrt{1-r^2}\right)$ и получаем правильный симплекс. В самом деле, возьмем любую из четырех вершин тетраэдра $A=\left(x_1;x_2;x_3;0\right)$ (рис. 17). Как мы знаем, длина отрезка OA равна r, т.е. $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=r$. Тогда вектор MA имеет координаты $\left(x_1;x_2;x_3;-\sqrt{1-r^2}\right)$, поэтому длина ребра MA равна $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1-r^2=1$. И так – со всеми остальными ребрами. Попутно мы нашли высоту симплекса $h=\sqrt{1-r^2}=\frac{\sqrt{10}}{4}$, а значит, можем найти его (четырехмерный!) объем – он равен одной четверти произведения трехмерного объема основания (единичного правильного тетраэдра) на высоту h.

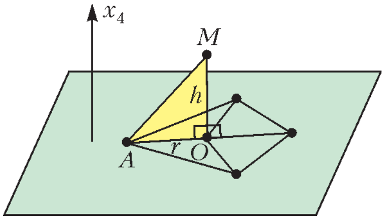

Рис. 17

Окончание. Начало – в «Кванте» №12 за 2017 год, продолжение – в предыдущем номере журнала.

Как мы видим, в рассуждениях с четырехмерным пространством чрезвычайно сложно опираться на картинку, а интуиция часто подводит. Поэтому все рассуждения надо проводить предельно строго и формально. В частности, нам придется формально определить понятия вершины и ребра многогранника, чтобы с ними можно было работать, опираясь на определения, а не только на интуицию. Сделаем это так.

Определение 1. *Выпуклым многогранником называется ограниченное множество, являющееся пересечением нескольких полупространств, или, что то же, являющееся множеством решений системы из нескольких линейных неравенств.*

В дальнейшем будем рассматривать только выпуклые многогранники, поэтому всегда можем пользоваться определением 1.

Определение 2. *Точка, принадлежащая многограннику, называется его* ***вершиной****, если через нее можно провести плоскость, которая не имеет других общих точек с многогранником. Отрезок, принадлежащий многограннику, является его* ***ребром****, если через него можно провести плоскость, которая не имеет других общих точек с многогранником.*

Можно использовать и более привычное нам определение ребра – это отрезок, соединяющий две вершины и лежащий на границе многогранника. Попробуйте доказать сами, что определение 2 равносильно ему.

Например, куб (обычный) можно определить как множество точек, удовлетворяющих системе линейных неравенств $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3$. Неравенств, таким образом, шесть – ровно столько, сколько граней у куба. А вершин восемь – это точки $(a_1; a_2; a_3)$, где каждая координата a_i равна либо 0, либо 1. Скажем, $(1; 1; 0)$ – вершина куба. На картинке это видно и так, но это можно доказать строго, согласно определению 2. Почему? Плоскость $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ не имеет с кубом других общих точек, кроме этой вершины. В самом деле, для всех остальных вершин либо $x_1 + x_2 < 2$, либо $x_3 > 0$, поэтому $x_1 + x_2 - x_3 < 2$. Значит, все остальные вершины, а с ними и все остальные точки куба, лежат по одну сторону от этой плоскости, в открытом полупространстве $x_1 + x_2 - x_3 < 2$. Далее, вершины $(1; 1; 0)$ и $(1; 0; 0)$ соединены ребром (рис.18). Мы видим это на картинке, но

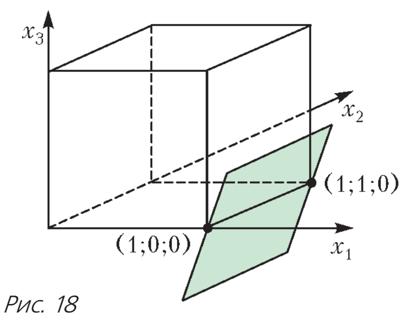

Рис. 18

мы и формально можем это проверить, по определению 2. Плоскость $x_1 - x_3 = 1$ содержит эти вершины, а для всех остальных вершин $x_1 - x_3 < 1$ (поскольку для них либо $x_1 < 1$, либо $x_3 > 0$). Значит, отрезок, соединяющий эти вершины, лежит в плоскости, а остальные вершины, и вместе с ними – все остальные точки куба, лежат в открытом полупространстве $x_1 - x_3 < 1$.

Теперь не составляет труда определить аналог куба в четырехмерном пространстве.

Четырехмерный куб. Это множество точек $\mathbb{R}^4$, удовлетворяющих системе линейных неравенств $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. И все? Тройку переправили на четверку? Да. Граней (трехмерных) у него восемь – ровно столько, сколько неравенств. Каждая из них является единичным трехмерным кубом. А вершин шестнадцать – это точки $(a_1; a_2; a_3; a_4)$, где каждая координата a_i равна либо 0, либо 1. Например, $(1; 1; 0; 0)$ – вершина. Ни на какой картинке мы этого уже не увидим, но по определению 2 можем доказать. Плоскость $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2$ не имеет с кубом других общих точек, кроме этой вершины. Докажите сами, это совсем просто! На рисунке 19 показана проекция

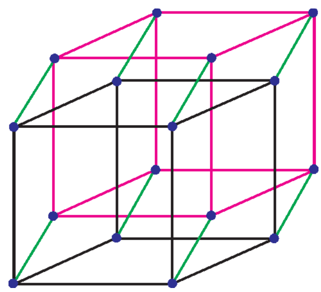

Рис. 19

четырехмерного куба на двумерную плоскость.

Также можно построить четырехмерный октаэдр (*кросс-политоп*), цилиндр, конус и другие фигуры. Однако есть в $\mathbb{R}^4$ и совсем неожиданные вещи, не имеющие аналогов в трехмерном пространстве. Зададим, например, такой вопрос.

Вопрос. *Для каких n в пространстве существует выпуклый многогранник с n вершинами, у которого каждые две вершины соединены ребром?*

На плоскости, т.е. в двумерном пространстве, ответ, конечно, $n = 3$. Это треугольник, и других примеров нет. В трехмерном пространстве тоже есть только один такой многогранник – тетраэдр, значит, $n = 4$. Для четырехмерного пространства напрашивается ответ $n = 5$ – симплекс. Как мы знаем, симплекс действительно этим свойством обладает. Но, оказывается, не только он! В четырехмерном пространстве такой многогранник существует с любым числом вершин n. Вот пример.

Многогранник моментов. Возьмем n различных положительных чисел $t_1, \ldots, t_n$ (считаем, что $n \geq 5$). Каждому числу t_k поставим в соответствие точку четырехмерного пространства $A_k = \left(t_k; t_k^2; t_k^3; t_k^4\right)$. Обозначим через P *выпуклую оболочку* множества точек $A_1, \ldots, A_n$, т.е. четырехмерный многогранник, для которого часть этих точек (возможно – все) являются вершинами, а остальные ему принадлежат, причем других вершин многогранник не имеет. Такой многогранник существует для любого конечного множества точек, доказывать этого мы не будем. Оказывается, что P имеет ровно n вершин и любые две из них соединены ребром! Не пугайтесь, мы не собирается рисовать этот многогранник, мы даже не в состоянии вообразить, как он выглядит. Но доказать, что любые две вершины в нем образуют ребро, мы сможем легко.

Возьмем любые две точки A_k, A_m и докажем, что они являются вершинами многогранника P, а отрезок $\left[A_k; A_m\right]$ – его ребром. Для этого рассмотрим многочлен $p(t) = \left(\dfrac{t}{t_k} - 1\right)^2 \left(\dfrac{t}{t_m} - 1\right)^2$. Это – многочлен четвертой степени, он неотрицательный при любом t, и только в двух точках он обращается в ноль: при $t = t_k$ и $t = t_m$. Раскроем скобки и запишем многочлен в виде $p(t) = a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t + 1$. Коэффициенты $a_1, \ldots, a_4$ можно выразить через числа t_k, t_m, но нам это не нужно. Так как $p(t_k) = p(t_m) = 0$ и $p(t) > 0$ при всех остальных t, то плоскость $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 1$ содержит точки A_k, A_m, а все остальные вершины P лежат по одну сторону от этой плоскости, в полупространстве $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 > 1$. Следовательно, плоскость пересекает P по отрезку $\left[A_k; A_m\right]$, значит, этот отрезок – ребро, а его концы – вершины. Итак, любая пара вершин соединена ребром!

Множество точек $\left(t; t^2; t^3; t^4\right)$ для всех действительных t является непрерывной кривой, носящей название *кривая моментов*. Она важна не только в геометрии, но и в теории функций, теории вероятностей и т.д. В каждом пространстве есть своя кривая моментов: на рисунке 20 показана

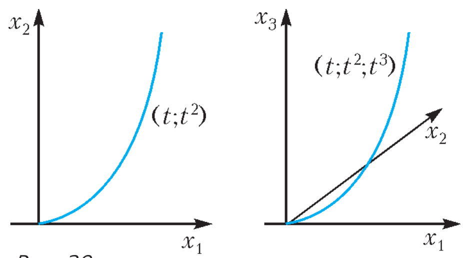

Рис. 20

двумерная кривая (это обычная парабола) и трехмерная кривая моментов. Любые n точек на ней являются вершинами *многогранника моментов*. Мы доказали, что в четырехмерном пространстве любой многогранник моментов обладает замечательным свойством: любая пара вершин соединена ребром. Но вот трехмерный многогранник моментов этим свойством не обладает. Попробуйте объяснить, почему.

«Нульсторонний профессор»

Основная сложность в рассуждениях с четырехмерным пространством состоит в том, что человек пытается полностью перенести свой «трехмерный» опыт на $\mathbb{R}^4$. Получается это не всегда. Четырехмерное пространство имеет свои законы, часто трудно понимаемые, как в примере с многогранником моментов. Представим, что на плоскости живут двумерные существа, которые видят только эту плоскость. Тогда если им показать двумерную «коробку» в виде контура квадрата, то они увидят не всю коробку, а лишь участок ее границы, видимый их глазу (рис.21). Более того, внутренность коробки для них полностью невидима, поскольку любой луч света, исходящий из внутренней точки, столкнется с границей и до их глаза не дойдет. Только если проделать дырку в стороне квадрата, они смогут разглядеть внутренность через это отверстие. Для нас же, наблюдающих эту картину из пространства, виден сразу весь квадрат! То же произойдет, если смотреть на наш трех-

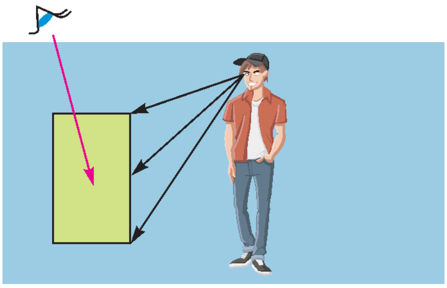

Рис. 21

мерный мир из любой точки четырехмерного пространства. Назовем эту точку Q. Из этой точки мы увидим все внутренности любого объекта, даже внутренние органы человека! В самом деле, прямая, соединяющая точку Q с любой точкой M нашего трехмерного пространства, не будет иметь с ним других общих точек (поскольку прямая, на лежащая в трехмерной плоскости, пересекает ее не более чем в одной точке). Следовательно, QM не пересечет никаких границ, а значит, M будет видна из точки Q.

Вернемся к двумерным существам, которые смотрят на квадратную коробку. Если мы чуть согнем эту коробку, сделав ее неплоской, то для двумерного наблюдателя она исчезнет! В рассказе американского ученого и фантаста Мартина Гарднера «Нульсторонний профессор» человек показывал фокус, складывая определенным образом лист бумаги так, что в один момент лист исчезал. Секрет был в том, что сложенная поверхность была «нульсторонней», что невозможно в трехмерном пространстве, поэтому она уходила в другие измерения. Нульсторонних поверхностей не существует, но фокус с исчезновением теоретически возможен, если согнуть лист так, что он перестанет лежать в трехмерном пространстве, подобно тому, что мы сделали с нашей двумерной коробкой.

В рассказе так потом сложили одного нехорошего профессора, и он исчез.

Упражнения

14. У четырехмерного симплекса – пять вершин. Две из них покрасили в белый цвет, остальные три – в красный. Докажите, что середины всех отрезков с разноцветными концами лежат в одной трехмерной плоскости. Какой трехмерный многогранник получается в сечении?

15. Докажите, что диагональ четырехмерного куба образует с каждым его ребром угол 30°. (Диагональ соединяет противоположные вершины куба.)

16. Какие углы могут образовывать между собой диагонали четырехмерного куба?

17. Как известно, в сечении правильного тетраэдра плоскостью можно получить квадрат (что это, кстати, за сечение?). А можно ли в сечении симплекса трехмерной плоскостью получить куб?

Указание. Постарайтесь определить, сколько вершин может быть у сечения симплекса.

18. Сколько кругов диаметра 1 поместится без пересечений в квадрате со стороной 2? Конечно, четыре! Нужно разбить квадрат на четыре единичных квадрата и в каждый вписать по кругу. А сколько шаров радиуса 1 поместится в куб со стороной 2? Восемь. Разбиваем куб на восемь единичных кубов и в каждый вписываем по шару. А каков ответ для четырехмерного куба со стороной 2? Шестнадцать? Оказывается, нет – семнадцать! Где расположится дополнительный шар?

Выходим в четвертое измерение

Теперь мы можем решить задачи 1 и 2, поставленные в самом начале статьи. Ответ в каждой – «да, но с выходом в четырехмерное пространство».

Решение задачи 1. Вы, конечно, уже поняли, как решать. У четырехмерного симплекса 10 ребер и 10 двумерных граней-треугольников, значит, надо составить симплекс из 10 спичек. Сначала составляем из 6 спичек тетраэдр, а затем выходим в четырехмерное пространство, где берем точку, удаленную от всех вершин нашего тетраэдра на расстояние, равное спичке (см. построение симплекса в предыдущем разделе). Соединив ее спичками со всеми четырьмя вершинами тетраэдра, получаем симплекс.

Обратимся к рисунку 1,*в*, где мы составили две пирамиды, после чего у нас оставалась одна спичка, которой нужно было соединить вершины A и C. Сделать этого нельзя, поскольку расстояние AC больше длины спички. А в четырехмерном пространстве длину отрезка AC можно менять, сделав равной длине спички. Фигура из двух пирамид не является жесткой в $\mathbb{R}^4$, подобно тому как фигура из двух треугольников на рисунке 1,*б*, будучи жесткой на плоскости, становится подвижной в пространстве.

Решение задачи 2. Прямоугольный лист бумаги можно свернуть в тор, если выйти в четырехмерное пространство (в трехмерном нельзя). Для того чтобы это сделать, рассмотрим сначала отображение отрезка $[0;\ 2\pi]$ на единичную окружность: каждой точке x отрезка ставим в соответствие точку $M(x)$ плоскости с координатами $(\cos x;\ \sin x)$ (рис.22). Когда x пробегает

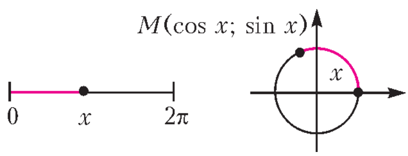

Рис. 22

отрезок, $M(x)$ пробегает окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Это – изометрия: любой промежуток, являющийся частью отрезка $[0;\ 2\pi]$, переходит в дугу окружности той же длины.

Поднимемся на размерность выше и свернем квадратный лист в цилиндр с помощью отображения $(x;\ y) \mapsto (\cos x;\ \sin x, y)$. Каждой точке квадрата $[0;\ 2\pi]\times[0;\ 2\pi]$ ставится в соответствие точка пространства с координатами $(\cos x;\ \sin x, y)$. Она пробегает цилиндр когда точка $(x;\ y)$ пробегает квадрат (рис.23).

А теперь поднимемся еще на размерность выше и свернем квадратный лист в тор с помощью отображения

$$(x;\ y) \mapsto (\cos x;\ \sin x;\ \cos y;\ \sin y).$$

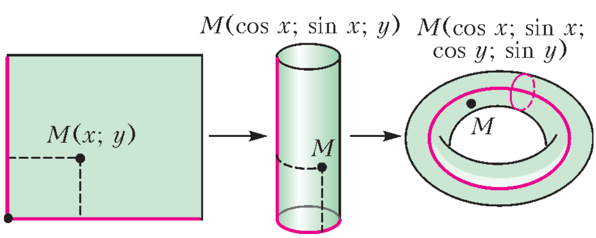

Рис. 23

Это отображение каждую образующую цилиндра (отрезок $[0;\ 2\pi]$ для переменной y) свернуло в единичную окружность. Таким образом, весь цилиндр свернулся в тор, причем изометрично! Если бы мы проделали такое построение, то наш цилиндр исчез бы подобно «нульстороннему» профессору. Точнее, перестал бы быть нам виден, поскольку вышел бы из трехмерного пространства.

Упражнение 19. В пространстве даны два сцепленных круглых кольца. Расцепите их с помощью выхода в четырехмерное пространство.

Для каждого из следующих упражнений найдите как решение с выходом в четырехмерное пространство, так и обычное «трехмерное» решение.

Упражнения

20. У двух тетраэдров $A_1\ldots A_4$ и $B_1\ldots B_4$ четыре прямые $A_1B_1,\ldots,A_4B_4$ пересекаются в одной точке. Докажите, что шесть точек пересечения соответствующих сторон и две точки пересечения соответствующих диагоналей или их продолжений лежат в одной плоскости (предполагается, что среди этих прямых нет параллельных).

21. В пространстве даны четыре различных непересекающихся шара. Докажите, что если у каждой пары шаров отметить вершину, то все шесть вершин лежат в одной плоскости.

22. В пространстве даны два непересекающихся шара, а также дано число $k > 0$. Найдите геометрическое место точек, отношение длин касательных из которых к этим шарам равно k.

23. Три плоскости в пространстве пересекаются по одной прямой. Три трехгранных угла расположены так, что их вершины лежат на этой прямой, а ребра лежат в данных плоскостях. Докажите, что три точки пересечения соответствующих граней этих углов лежат на одной прямой.

Комментарий. Эта задача – одно из возможных обобщений теоремы Дезарга на трехмерное пространство. Ее решение с помощью выхода в четвертое измерение придумал И.Ф.Шарыгин. Ее можно также решить и не покидая трехмерного пространства.