Прямая Эйлера

1. Вспомните, почему ортоцентр H, точка пересечения медиан M, центр описанной окружности O лежат на одной прямой.

2. Постройте треугольник ABC по центру описанной окружности O, точке пересечения медиан M и основанию H высоты CH.

3. M – центроид треугольника ABC, в котором $\angle ABC = 60°$; известно, что $\angle AMC = 60°$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

4. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$. Докажите, что прямая Эйлера отсекает от $\triangle ABC$ равносторонний треугольник.

5. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC параллельна стороне $BC \Leftrightarrow \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 3$.

6. Let ABC be a triangle such that $AB \neq AC$. We denote its orthocentre by H, its circumcentre by O and the midpoint of BC by D. The extensions of HD and AO meet in P. Prove that triangles AHP and ABC have the same centroid.

7. Прямая Эйлера треугольника параллельна одной из его биссектрис. Докажите, что либо треугольник равнобедренный, либо один из его углов равен $120°$.

8 (real jem!). В треугольнике ABC угол $\angle A = 120°$. Докажите, что $OH = AB + AC$.

9. T — точка Торричелли $\triangle ABC$.
а) прямая Эйлера треугольника ATB параллельна прямой CT;
б) прямые Эйлера треугольников ATC, BTC, ATB, ABC конкурентны.

10. Докажите, что три окружности, каждая из которых проходит через вершину треугольника, основание его высоты, опущенной из этой вершины, и касается радиуса описанной окружности, проведенного к данной вершине, пересекаются в двух точках, расположенных на прямой Эйлера треугольника.

11. а) Вписанная окружность касается сторон треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что прямая Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

б) В вершинах треугольника проведены касательные к его описанной окружности. Докажите, что центр описанной окружности треугольника, образованного этими тремя касательными, лежит на прямой Эйлера исходного треугольника.

12. Капитан нашёл Остров Сокровищ, имеющий форму круга. На его берегу растут шесть пальм. Капитан знает, что клад закопан в середине отрезка, соединяющего ортоцентры (точки пересечения высот) треугольников ABC и DEF, где A, B, C, D, E, F – эти шесть пальм, но он не знает, какой буквой обозначена каждая пальма. Докажите, что тем не менее он может найти клад с первой же попытки.

13 (В. Тебо). AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Докажите, что прямые Эйлера треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1, пересекаются в одной точке.

`Замечание.` Продолжение этого сюжета можно найти в такой статье. [1]

14. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке $P (\angle APB \neq 60°)$. Докажите, что прямые Эйлера треугольников APB, BPC, CPD, DPA пересекаются в одной точке.

`Замечание.` Подробное обсуждение этой задачи смотрите этой статье. [2]

---

[1] Статья: http://geometry.ru/persons/kulanin/Thebault-feuerbach2.pdf
[2] Статья: http://jcgeometry.org/Articles/Volume1/JCG2012V1pp32-39.pdf