От прямой Симсона до теоремы Дроз-Фарни

Д.ШВЕЦОВ

Элементарная геометрия буквально усыпана красивыми жемчужинами, которые доставляют огромное удовольствие тем, кто ими любуется. Тем поразительнее, что и сами по себе эти факты могут выступать в качестве вспомогательных утверждений для доказательства других теорем.

Прямая Уоллеса–Симсона

Начнем мы наш тур с *прямой Симсона* [1].

Основания перпендикуляров, опущенных из точки S описанной окружности треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой (рис. 1).

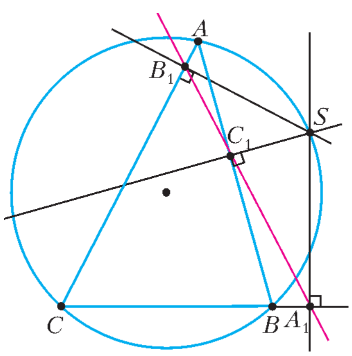

Рис. 1

Доказательство. Если мы покажем, что $\angle B_1C_1A = \angle BC_1A_1$, то наше утверждение будет доказано. В доказательстве во всей красе показывает себя метод "вспомогательной окружности". Что это значит?

Краткости ради введем обозначения: $\angle B_1C_1A = \alpha$ и $\angle BC_1A_1 = \beta$ (рис.2). Точки B_1, C_1, A и S лежат на одной окружности с диаметром AS (почему?).

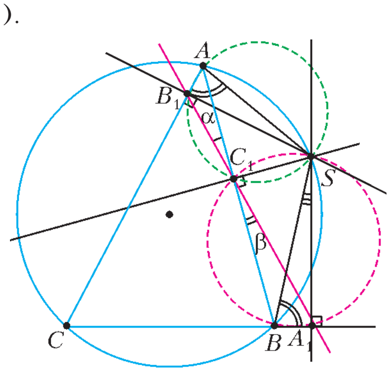

Рис. 2

Следовательно, $\angle B_1C_1A = \angle B_1SA = \alpha$ (так как оба этих угла "смотрят" на дугу B_1A). Тогда из треугольника B_1SA заметим, что $\angle B_1AS = 90° - \alpha$. Четырехугольник $CASB$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle CAS + \angle CBS = 180° \Rightarrow \angle SBC = 90° + \alpha \Rightarrow \angle SBA_1 = 90° - \alpha.$$

Как и выше, из прямоугольного треугольника SBA_1 находим, что $\angle BSA_1 = \alpha$. Осталось лишь заметить, что точки C_1, B, A_1 и S лежат на одной окружности с диаметром BS. Откуда следует равенство углов $\angle BSA_1 = \angle A_1C_1B$ (оба "смотрят" на дугу BA_1). Таким образом получили, что $\alpha = \beta$.

Нам удалось доказать теорему!

Упражнение 1. Две окружности пересекаются в точках M и N. Через точки M и N проводятся прямые, пересекающие окружности в точках A и B, C и D соответственно. Докажите, что $AC \parallel BD$.

Оказывается, что верно и обратное утверждение.

Если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки S на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка S лежит на описанной окружности треугольника.

Упражнение 2. Докажите это.

Прямая Симсона обладает многими свойствами, некоторые из них сформулированы в виде задач в конце статьи.

Оказывается, существует *обобщение прямой Симсона.*

Проекции точки P описанной окружности четырехугольника ABCD на прямые Симсона треугольников BCD, CDA, DAB и BAC лежат на одной прямой (прямая Симсона вписанного четырехугольника).

Доказательство. Обозначим через B_1, C_1 и D_1 проекции точки P на прямые AB, AC и AD (рис.3). Опять же замечаем,

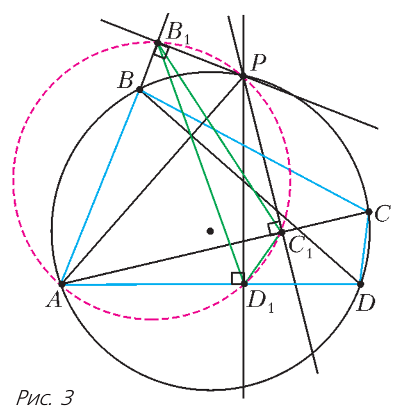

Рис. 3

что точки A, B_1, P, C_1 и D_1 лежат на одной окружности с диаметром AP. С другой стороны, вспомнив определение прямой Симсона для треугольника, получим, что прямые B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 являются прямыми Симсона точки P относительно треугольников ABC, ACD и ADB соответственно. Теперь последнее усилие.

Заметим, что проекции точки P на прямые Симсона этих треугольников лежат на одной прямой – прямой Симсона треугольника $B_1C_1D_1$. Точно так же можно показать, что на одной прямой лежит любая тройка рассматриваемых точек, следовательно, и все они лежат на одной прямой.

Любовь к обобщениям привела исследователей к следующему результату:

По индукции можно определить прямую Симсона вписанного n-угольника как прямую, содержащую проекции точки

[1] Открытие этой прямой долго приписывалось Роберту Симсону (1687–1768), но в действительности она была открыта лишь в 1797 г. Вильямом Уоллесом (1768–1843). Поэтому справедливее называть ее *прямой Уоллеса*, хотя наиболее популярным является название *прямая Симсона.*

P на прямые Симсона всех $(n-1)$-угольников, полученных выбрасыванием одной из вершин n-угольника.

Так, например, только что мы разобрались с прямой Симсона для четырехугольника. Теперь для примера разберем прямую Симсона для пятиугольника. Итак, пусть есть пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Сначала "выбрасываем" вершину A_1, тогда останется четырехугольник $A_2A_3A_4A_5$, а для него прямая Симсона уже определена. Аналогично возникают еще пять прямых Симсона (по очереди выбрасываем вершины A_2, A_3, A_4, A_5). Так вот, проекции произвольной точки P описанной окружности на эти пять прямых лежат на одной прямой. Аналогичное утверждение верно и для произвольного n-угольника.

Упражнение 3. Докажите это утверждение для пятиугольника.

С прямой Симсона естественным образом связана другая прямая – *прямая Штейнера*.

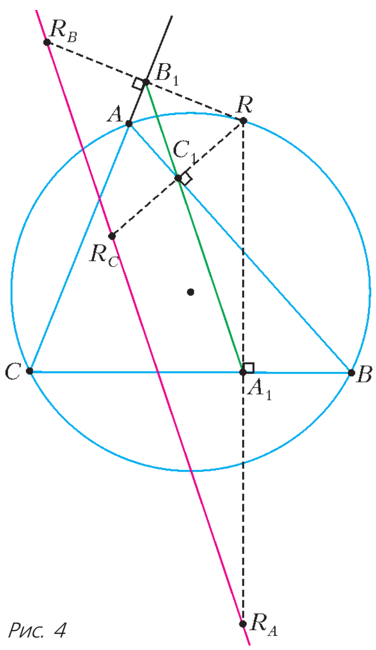

Рис. 4

Точку R описанной окружности треугольника ABC отразили симметрично относительно сторон треугольника. Полученные таким образом три точки будут лежать на одной прямой, которая называется прямой Штейнера точки R относительно треугольника ABC.

Для начала поймем, почему же эти точки будут лежать на одной прямой (рис.4). Точки B_1, C_1, A_1 лежат на одной прямой, ибо это прямая Симсона. Точки же R_B, R_C, R_A находятся от точки R в два раза дальше, чем точки B_1, C_1, A_1, поэтому они тоже лежат на одной прямой, причем она параллельна прямой Симсона.

Чем же интересна прямая Штейнера?

Прямая Штейнера проходит через ортоцентр (точку пересечения высот) треугольника.

Доказательство. Здесь уже совсем просто не получится, нужны некоторые "хитрости". Итак, пусть прямая Штейнера точки R относительно треугольника ABC пересекает высоту CC' в точке H (рис.5). Наша цель – показать, что точка H есть ортоцентр. Как это сделать, сразу не разглядеть. Но оказывается, что ортоцентр обладает следующим свойством-признаком.

Если ортоцентр треугольника отразить симметрично относительно сторон треугольника, то полученные точки лежат на описанной окружности треугольника (рис.6).

Доказательство. Нам достаточно показать, что $\angle ACB + \angle AQB = 180°$[2]. Но $\angle CB'H + \angle CA'H = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \angle B'CA' + \angle A'HB' = 180° \Rightarrow \angle B'CA' + \angle AHB = 180°$. А вот точку Q мы получали в результате симметричного отражения точки H, следовательно, $\angle AHB = \angle AQB$, а поэтому $\angle ACB + \angle AQB = 180°$.

[2] Здесь мы воспользуемся таким утверждением: *вокруг четырехугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма величин его противоположных углов равна* $180°$.

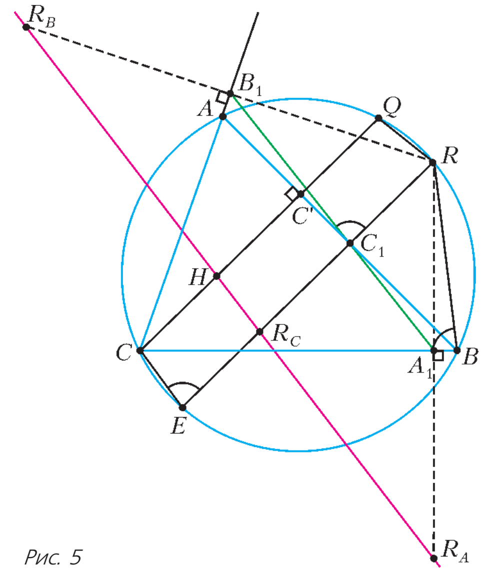

Рис. 5

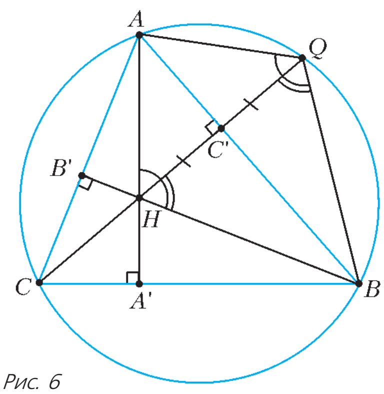

Рис. 6

Упражнение 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Этот факт сыграет ключевую роль в нашем доказательстве.

Вспомним, что при доказательстве теоремы Симсона (самой первой теоремы) было показано, что четырехугольник RC_1A_1B вписанный, т.е. $\angle A_1BR + \angle A_1C_1R = 180°$, но $\angle A_1C_1R + \angle B_1C_1R = 180°$ (смежные углы) $\Rightarrow \angle B_1C_1R = \angle A_1BR$. Продлим RC_1 до пересечения с исходной окружностью в точке E. Теперь видим, что $\angle CER = \angle CBR$, ибо оба угла опираются на дугу CR. Откуда получаем равенство углов $\angle CER = \angle B_1C_1R$, что, в свою очередь, говорит о параллельности прямых CE и B_1C_1. Однако, прямые Штейнера и Симсона параллельны, т.е. $HR_C \parallel B_1C_1$.

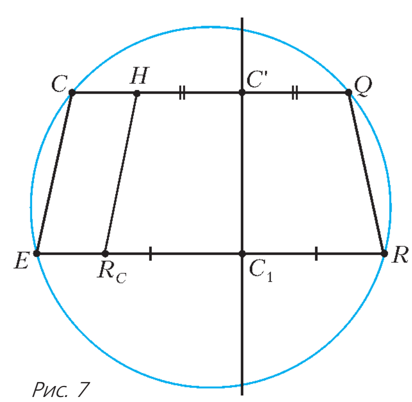

Рис. 7

Теперь посмотрим на

четырехугольник $CERQ$ (рис.7), где Q – точка пересечения продолжения высота CC_1 с окружностью. Во-первых, этот четырехугольник является трапецией, ибо $CC' \perp C'C_1$, $ER \perp C'C_1$. Во-вторых, раз эта трапеция вписана в окружность, то трапеция равнобокая, т.е. $CE = QR$. Сейчас же видим, что четырехугольник HR_CEC является параллелограммом, так как $CH \parallel ER_C$, $CE \parallel HR_C$, следовательно, $CE = HR_C$, поэтому четырехугольник HR_CRQ – равнобокая трапеция. Вспомнив же, что C_1 – середина отрезка R_CR (так мы определяли точку R_C) и $C'C_1 \perp RR_C$, несложно понять, что $HC' = C'Q$. Наконец, используя "свойство-признак" для ортоцентра, получим что точка H является ортоцентром треугольника ABC.

Отметим некоторые следствия из приведенного рассуждения.

Следствие 1. Пусть точка R лежит на описанной окружности треугольника ABC, H – ортоцентр треугольника ABC. Прямая Симсона точки R делит отрезок RH пополам.

Доказательство. В предыдущем доказательстве мы показали, что прямая Симсона точки R (C_1K на рис.8) параллельна прямой HR_C. Стало быть, глядя на треугольник R_CHR, по теореме о средней линии получим, что $HK = KR$.

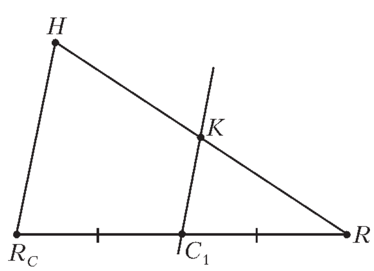

Рис. 8

Следствие 2. Три прямые, симметричные прямой Штейнера точки R относительно сторон треугольника, пересекаются в точке R.

Упражнение 6. Докажите этот факт.

Из второго следствия вытекает, что если через ортоцентр треугольника провести произвольную прямую, то прямые, ей симметричные относительно сторон треугольника, будут пересекаться в одной точке, лежащей на описанной окружности треугольника.

Точка Микеля

В первой части мы могли убедиться, что вписанные углы порой приносят огромную пользу. Также весьма полезны они в следующем сюжете. Итак, пусть даны четыре прямые общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку). При пересечении любых трех из них образуется треугольник.

Описанные окружности четырех получившихся треугольников имеют общую точку, которую называют точкой Микеля данных четырех прямых (рис.9).

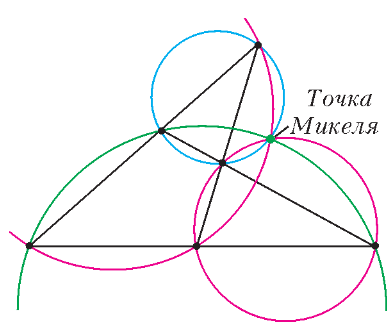

Рис. 9

Доказательство. Пусть описанные окружности треугольников BEC и CDF пересекаются в точке M (рис.10). Покажем, что эта же точка M лежит на описанной окружности треугольника AED, т.е. что четырехугольник $AEMD$ является вписанным. Для этого опять достаточно показать, что $\angle EAD + \angle EMD = 180°$. Из вписанности четырехугольника $BEMC$ заключаем, что

$\angle EMC + \angle EBC = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = \angle EMC$ (ведь $\angle EBC + \angle ABC = 180°$).
Посмотрев же на вписанный четырехугольник $MCDF$, видим, что $\angle CMD = \angle CFD$ (опираются на дугу CD). Значит, справедлива следующая цепочка равенств:

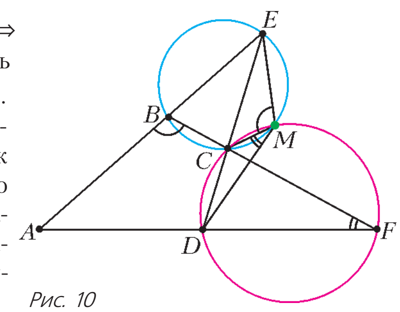

Рис. 10

$$\angle EAD + \angle EMD = \angle BAF + \angle EMC + \angle CMD =$$
$$= \angle BAF + \angle ABF + \angle AFB = 180°,$$

так как это углы треугольника ABF. Аналогично можно показать, что и описанная окружность треугольника ABF проходит через точку M. Доказательство завершено.

Как и прямая Симсона, точка Микеля обладает интересными свойствами, некоторые из них представлены в конце статьи в качестве задач.

Родственную задачу для геометрии треугольника можно сформулировать следующим образом.

Лемма. *Если на каждой стороне треугольника отметить по одной точке и через каждую вершину треугольника и отмеченные точки на смежных сторонах провести окружность, то три эти окружности пересекутся в одной точке* (рис.11).

Доказательство похоже на то, которое мы видели только что: нужно совершить "круиз по углам". Пусть описанные окружности треугольников AKF и BKL пересекаются в точке P. Как и выше, покажем, что окружность, описанная вокруг треугольника FCL, проходит через точку P, для чего достаточно показать равенство $\angle PFC + \angle PLC = 180°$. Из вписанности четырехугольников и свойств смежных углов получаем цепочку равенств: $\angle AKP + \angle AFP = 180° \Rightarrow \angle AKP = \angle PFC$. Аналогично, $\angle BKP + \angle BLP = 180° \Rightarrow \angle BKP = \angle PLC$, но $\angle AKP + \angle BKP = 180°$, а значит, и равные им углы также дают в сумме $180°$.

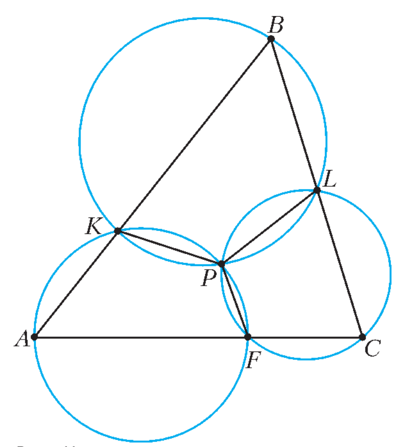

Рис. 11

Теорема Дроз-Фарни

В 1899 году Арнольд Дроз-Фарни опубликовал без доказательства следующую теорему.

Теорема. *Пусть две взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через ортоцентр треугольника, высекают на прямых, содержащих стороны треугольника, три отрезка. Середины этих трех отрезков лежат на одной прямой* (рис.12).

Оказывается, факты, изложенные выше, причудливым образом переплетаются при доказательстве этой жемчужины геометрии.

Доказательство. Отразим ортоцентр H относительно сторон треугольника, полученные точки обозначим H_a, H_b и H_c (на рисунке 13 точка H_c не изображена). Далее,

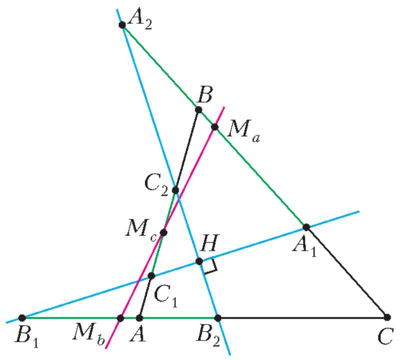

Рис. 12

построим на отрезках A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, как на диаметрах, окружности. Назовем их Ω_A, Ω_B, Ω_C. Отметим, что точка H попадает на все эти три окружности (почему так?). Точки же M_a, M_b и M_c являются центрами этих окружностей, так как они середины диаметров. К тому же точки H_a, H_b и H_c лежат на окружности, описанной вокруг треугольника ABC ("свойство-признак" для ортоцентра). Согласно следствию 2 из сюжета о прямой Штейнера (смотрите чуть выше)

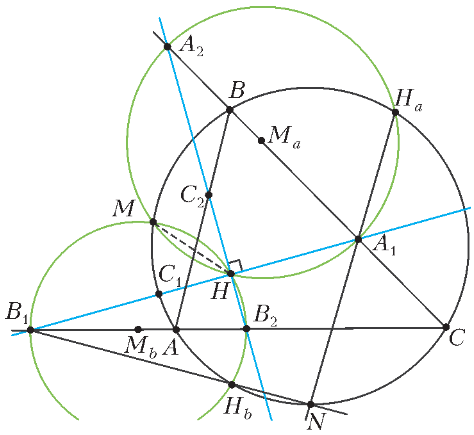

Рис. 13

получаем, что прямые B_1H_b и A_1H_a пересекаются на описанной окружности треугольника ABC, обозначим точку пересечения через N.

Осталось последнее усилие, рассмотрим треугольник B_1NA_1 и точки H_b, H, H_a, которые лежат на его сторонах (или их продолжениях). Применив для него лемму из предыдущей части, получаем, что описанная окружность треугольника ABC и окружности Ω_A, Ω_B пересекаются в одной точке M. Аналогично получим, что и окружность Ω_C проходит через ту же самую точку M! Суммируя все, получим, что три окружности Ω_A, Ω_B, Ω_C пересекаются в двух общих точках M и H (рис.14). Но центр каждой окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде MH. Тем самым, все три точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

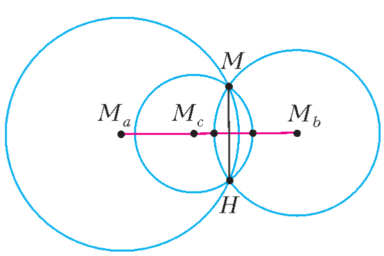

Рис. 14

Заключение

Элементарная геометрия *никогда* не стоит на месте. Не так давно румынский математик Космин Похоата и болгарский математик Николай Белухов разными путями доказали следующее обобщение теоремы Дроз-Фарни.[3]

Дан треугольник ABC, точка P и проходящая через нее прямая d. Прямая, симметричная AP относительно d, пересекает BC в точке A'. Точки B', C' определены аналогично. Тогда A', B', C' лежат на одной прямой (рис.15).

Известные доказательства не совсем элементарны в том смысле, что используют *геометриию коник*[4] и *проективные преобразования*[5]. Поэтому здесь мы не будем приводить доказательства. Если в качестве P взять ортоцентр треугольника и в качестве d взять биссектрису между перпендикулярными прямыми, то получим обычную теорему Дроз-Фарни. Действительно, в прямоугольном треугольнике B_1HB_2 (см. рис.12) биссектриса угла B_1HB_2 также делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины H. Поэтому после симметрии относительно биссектрисы угла B_1HB_2 прямая перейдет в прямую HM_b. Аналогично, для двух других прямых. Осталось использовать вышеуказанное обобщение теоремы Дроз-Фарни.

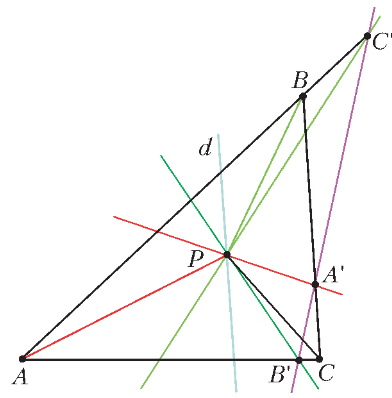

Рис. 15

Другое обобщение теоремы Дроз-Фарни можно найти в задаче 15.

Задачи

В заключение нашего повествования предлагаем задачи о прямой Симсона и точке Микеля, некоторые из них считаются классикой, другие менее известны.

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой, точка P – вне этой прямой. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABP, BCP, ACP и точка P лежат на одной окружности.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и из точки D опущены перпендикуляры DB_1 и DC_1 на прямые AC и AB; точка M лежит на прямой B_1C_1, причем $DM \perp BC$. Докажите, что точка M лежит на медиане AA_1.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность; l_a – прямая Симсона точки A относительно треугольника BCD, прямые l_b, l_c и l_d определяются аналогично. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

4. Точка P движется по описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что при этом прямая Симсона точки P относительно треугольника ABC поворачивается на угол, равный половине угловой величины дуги, пройденной точкой P.

5. Докажите, что прямые Симсона двух диаметрально противоположных точек описанной окружности треугольни-

[3] О существовании этой теоремы автор узнал от А.А.Заславского.

[4] О геометрии коник можно прочитать в интересной книге А.В.Акопяна, А.А.Заславского "Геометрические свойства кривых второго порядка". Электронная версия доступна по адресу: http://math.ru/lib/book/pdf/geometry/Zaslavky-Akopyan.pdf .

[5] Для изучения проективных преобразования рекомендуем книгу Яглома И.А. "Геометрические преобразования", том 2. Электронная версия книги доступна по адресу: http://math.ru/lib/book/djvu/yaglom/tom2.djvu.

ка ABC перпендикулярны, а их точка пересечения лежит на окружности девяти точек.[6]

6. Докажите, что существуют ровно три точки на описанной окружности, для которых прямая Симсона касается окружности Эйлера, и при этом эти точки образуют равносторонний треугольник.

7. Докажите, что прямая Симсона точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABC, перпендикулярна прямым, симметричным прямым PA, PB, PC относительно биссектрис углов A, B, C треугольника ABC соответственно.

8. (А.Акопян, LXIX Московская математическая олимпиада). Дан треугольник ABC и точки P и Q, лежащие на его описанной окружности. Точку P отразили относительно прямой BC и получили точку P_a. Точку пересечения прямых QP_a и BC обозначим A_1. Точки B_1 и C_1 строятся аналогично. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

9. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности, проходящей через точку Микеля данных прямых.

10. Прямая пересекает стороны AB, BC и CA треугольника (или их продолжения) в точках C_1, B_1 и A_1; O, O_a, O_b и O_c – центры описанных окружностей треугольников ABC, AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C; H, H_a, H_b и H_c – ортоцентры этих треугольников. Докажите, что:

а) треугольники $O_aO_bO_c$ и ABC подобны;

б) серединные перпендикуляры к отрезкам OH, O_aH_a, O_bH_b и O_cH_c пересекаются в одной точке.

11. Четырехугольник $ABCD$ вписанный. Докажите, что точка Микеля для прямых, содержащих его стороны, лежит на отрезке, соединяющем точки пересечения продолжений сторон.[7]

12. Точки A, B, C и D лежат на окружности с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а описанные окружности треугольников AEC и BED пересекаются в точках E и P. Докажите, что:

а) точки A, D, P и O лежат на одной окружности;

б) $\angle EPO = 90°$.

13. Даны четыре прямые. Докажите, что проекции точки Микеля на эти прямые лежат на одной прямой.

14. В тексте мы говорили об обобщении прямой Симсона. Придумайте обобщение точки Микеля.

15 (обобщение теоремы Дроз–Фарни). В условия теоремы Дроз–Фарни (рис.12) возьмем точки M_a, M_b, M_c на отрезках A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 так, чтобы

$$\frac{A_1M_a}{A_2M_a} = \frac{B_1M_b}{B_2M_b} = \frac{C_1M_c}{C_2M_c}.$$

Тогда точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой.

Список литературы

1. Jean-Louis Ayme. *A purely synthetic proof of the Droz-Farny line theorem.* – *Fotum Geom.*, 4(2004)219-224.

2. Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии.* – М.: Физматгиз, 1963

3. Яглом И.Я. *Комплексные числа и их применение в геометрии.* – М.: Физматгиз, 1963.

[6] *Окружностью девяти точек* называю окружность, проходящую через середины сторон треугольника. При этом она проходит через основания высот, а также через середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с ортоцентром, итого 9 точек.

[7] Сравните эту задачу с леммой из текста.