

Умножаем вектора

Будем через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ обозначать *скалярное произведение* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определим его равенством

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

0 (!). Прочитайте параграфы из учебника, посвящённые скалярному произведению векторов.

1. Докажите, следующие свойства скалярного произведения:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

б) $k\vec{a} \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

г) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

д) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$.

е) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}((\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2)$.

2. Пусть в декартовой системе координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты соответственно $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Докажите, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.$$

3. С помощью скалярного произведения докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

4. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

5. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AMNB$ и $CKLA$. Докажите с помощью скалярного произведения векторов, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML .

7. Точка K – середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC , причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90^\circ$.

8. Пусть A, B, C, D – произвольные точки. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

9. Пусть O – центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D – середина стороны AB , а E – точка пересечения медиан треугольника ACD . Докажите, что $OE \perp CD$.