Учим математике

Из опыта работы кружка по геометрии[1]

Дмитрий Викторович ПРОКОПЕНКО
учитель математики физико-математической
школы № 2007 г. Москвы
prokop@biochip.ru

Введение

В последние годы в российской школе наблюдается падение интереса к геометрии. Не обошла эта напасть и нашу школу. Как лечить эту болезнь? Конечно, прежде всего, на уроках. Но не только. «Застарелые случаи» (особенно в старших классах) лучше лечить на кружке. При такой форме занятий учащийся может заниматься в своём темпе (чего практически невозможно добиться на уроках), есть время для ликвидации пробелов. В статье рассказано об организации такого кружка «по ликвидации пробелов».

Это не совсем кружок в привычном понимании этого слова, скорее практикум по решению задач. В школу дети приходят с разной подготовкой, которой не всегда хватает для успешного продолжения обучения. Например, 10-классники изучают стереометрию, а базы в решении элементарных задач планиметрии нет. Поэтому иногда (а на самом деле довольно часто) приходится заниматься ликвидацией пробелов. Чем в таком случае кружковая работа отличается от работы на обычных уроках? Первое: каждый участник кружка обязан проговорить решение задачи. Второе: показать преподавателю нормальный чертёж! Третье: не реже чем один раз в 1–2 занятия на кружке должна быть решена классическая задача или задача уровня Московской математической олимпиады и выше.

[1] Автор благодарен П.В. Чулкову и А.Д. Блинкову за ценную критику статьи, Ю.А. Блинкову за предоставленные материалы для проведения нескольких занятий кружка.

Кружок предназначен для учащихся 9–11-х классов. На занятиях используется так называемая «система листков». Каждому учащемуся выдаётся листок с 7–10 задачами по определённой теме, задачи расположены по возрастанию трудности. В листок желательно включать яркие задачи, с короткими и красивыми решениями, имеющими интересные «продолжения» в других задачах. Задачи первых нескольких листков связаны с темой «Окружность». На эту тему легко подобрать красивые задачи практически любой степени трудности.

Основное время на занятии учащиеся решают задачи и рассказывают их решения преподавателю. После того как решены все задачи листка (быть может, кроме некоторых, обозначенных звёздочкой), учащиеся переходят к следующему листку и т.д.

Первое, что обнаружилось в ходе занятий, – неумение учащихся делать грамотный чертёж, который *действительно* помогает решить задачу. Поэтому вначале приходилось долго обсуждать, как правильно построить чертёж.

Вот типичная ситуация. Учащийся читает условие: «Вокруг треугольника описана окружность...», затем рисует треугольник, и только потом пытается нарисовать окружность, описанную около этого треугольника. Если при этом он пользуется циркулем, на построение чертежа уходит много времени. Гораздо проще сделать наоборот: нарисовать окружность и вписать в неё треугольник.

Или, например, в условии этой же задачи говорится о биссектрисе внутреннего угла. Можно делить угол пополам на глазок, но гораздо точнее соединить вершину и середину противолежащей дуги. И таких ситуаций довольно много.

Через некоторое время, после того как были «открыты» эти удобные правила, качество чертежей заметно улучшилось. Более того, стало возможным принимать решения некоторых задач без подробной записи – при условии, что на чертеже отображён весь ход решения, отмечены равные углы, стороны и т.д.

В начале каждого занятия обычно 10–20 минут мы обсуждаем решение наиболее трудных задач прошлого занятия. Это полезно не только для тех, кто их не решил. При обсуждении я либо показываю применение изучаемого метода, либо обращаю внимание на то, что задача состоит из двух-трёх подзадач, каждую из которых мы уже решили. Демонстрирую (что очень важно) связи между задачами, или что можно, сделав еще один шаг, получить совсем другую задачу.

Если в решении задач прошлого занятия необходимости нет, можно доказывать разными способами теоремы школьного курса или красивые и простые геометрические факты, на подробный разбор которых на уроке учителю времени не хватает. Поскольку задачи простые, в их решении принимают активное участие практически все учащиеся. Различные методы доказательства позволяют связать данную теорему с другими, указать её место в курсе геометрии и даже установить новые для учащихся факты. Бывает и наоборот: в новой конструкции можно разглядеть знакомые очертания, тогда это становится поводом для повторения и очередной тренировкой навыка видеть чертёж. Также полезно в качестве разминки решить одну-две простые олимпиадные задачи с коротким и наглядным решением.

Дополнительные построения часто выглядят для школьников как фокус, поэтому целесообразно уделять им больше внимания. Особенно эффективно работать с ними в простых задачах. С этой целью можно рекомендовать книгу И.А. Кушнира «Альтернативные способы решения задач (геометрия)», изданную в Киеве (в Москве её, к сожалению, не купишь).

Рассмотрим в качестве примера два занятия по теме «Степень точки относительно окружности». В ходе изучения темы при решении задач вводится и используется понятие радикальной оси (радикальной точки) двух (трёх) пересекающихся окружностей как множества точек, степени которых относительно окружностей равны. В итоге мы получаем мощный инструмент для доказательства того, что три точки лежат на одной прямой, три прямые проходят через одну точку и ещё один признак вписанного четырехугольника.

На первом занятии учащимся предлагаются задачи попроще, решение которых, как правило, не требует много времени. На втором занятии даются более трудные задачи.

Первое занятие

Сначала целесообразно повторить теорему о произведении отрезков секущей к окружности и теоремы о пропорциональных отрезках в круге (прямую и обратную).

Пусть M – некоторая точка плоскости, не лежащая на окружности ω, AB – секущая, проходящая через точку M (см. рис. 1*а*, 1*б*). Введём для удобства обозначение: $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB$.

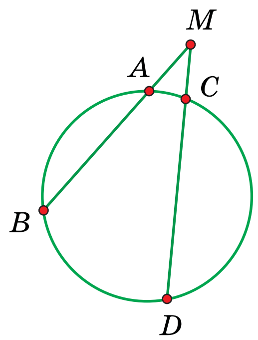

Рис. 1а.

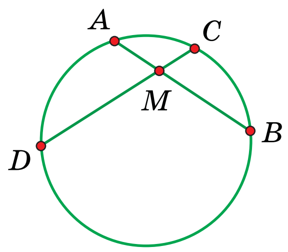

Рис. 1б.

Теорема 1. *Величина* $\sigma(M, \omega) = MA \cdot MB$ *постоянна для любых секущих, проведенных из точки M к* ω *(для любых хорд, проходящих через точку M, если точка M лежит внутри окружности).*

Очень важной является обратная теорема о секущих, поскольку она даёт нам ещё один признак вписанного четырехугольника.

Теорема 2. *Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке M. Если выполняется равенство* $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, *то точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Доказательство проводим устно на доске.

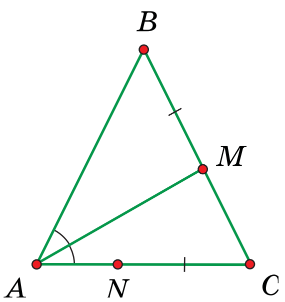

Рис. 2.

Рассмотрим пример (Киевский Международный математический фестиваль, 2008 г.). В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса AM. На луче CA отложен отрезок CN, равный BM (см. рис. 2). Докажите, что точки A, B, M и N лежат на одной окружности.

Доказательство. По свойству биссектрисы: $\dfrac{CM}{BM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AC}{BC}$. Следовательно, $CM \cdot BC = AC \cdot BM = AC \cdot CN$. Тогда по обратной теореме о секущих (по признаку вписанного четырехугольника) точки A, N, M и B лежат на одной окружности.

Рассмотрим теперь более внимательно постоянную величину $\sigma(M,\omega)$ (произведение отрезков секущих). Как её вычислить, какой в ней геометрический смысл? Полезно рассмотреть частные случаи. Выберем наиболее удобные для подсчета положения секущей. Какие это положения?

Первое – это предельное положение, когда секущая переходит в касательную. Начнем поворачивать прямую AB вокруг точки M (см. рис. 3). С некоторого момента точки A и B (A_i и B_i) начнут сближаться, и когда они совпадут, секущая AB перейдёт в касательную AT. В этот момент $MA = MB = MT$. Величина же $\sigma(M,\omega) = MA \cdot MB$ остаётся постоянной, поэтому $\sigma(M,\omega) = MT^2$. Следовательно, $\sigma(M,\omega)$ равна квадрату касательной к окружности.

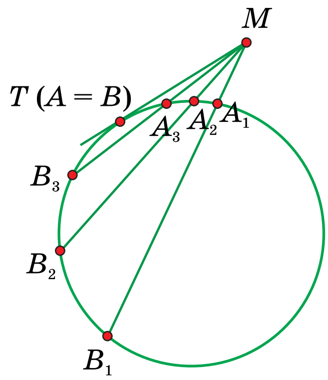

Рис. 3.

Мы доказали теорему о касательной и секущей. Надо сказать, что подобные рассуждения непривычны для школьников, поскольку здесь нет ни равенства, ни подобия треугольников. Из-за своей непривычности они вызывают повышенный интерес. Особенно учащихся впечатляет фраза «касательная – это предельное положение секущей». Проведенные рассуждения позволяют по-новому взглянуть и на такое привычное понятие, как касательная к окружности.

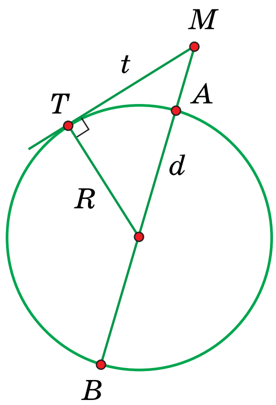

Рис. 4.

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда секущая проходит через точку M и центр окружности. Пусть d – расстояние от точки M до центра окружности, R – её радиус (см. рис. 4). Тогда $\sigma(M,\omega) = MA \cdot MB = (d-R)(d+R) = d^2 - R^2$.

Мы подсчитали величину $\sigma(M,\omega)$ двумя способами и получили разный ответ. Нет ли здесь противоречия? Проверим. Из прямоугольного треугольника MOT (рис. 4) получаем, что $d^2 - R^2 = t^2$. Величина $d^2 - R^2$ называется степенью точки относительно окружности. Для удобства будем так называть и произведение отрезков секущих.

Здесь уместно сделать небольшое отступление и рассказать, что впервые это понятие ввёл выдающийся геометр Якоб Штейнер, коротко описать его жизнь и занятия. Полезно показать школьникам, что математикой занимались живые люди, и хорошим поводом для этого являются именные теоремы и формулы.

Заметим, что если точка M лежит внутри окружности, то величина $d^2 - R^2$ становится отрицательной, поэтому в данном случае при решении задач удобнее рассматривать величину $\sigma(M,\omega) = MA \cdot MB = R^2 - d^2$.

Выражение $d^2 - R^2$ настолько важно и так часто применяется, что выделим утверждение о нем в теорему.

Теорема 3. *Произведение отрезков секущей к окружности равно $d^2 - R^2$, где d – расстояние от точки M до центра окружности, R – её радиус.*

Теперь переходим непосредственно к листку.

Задача 1. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Точка X лежит на прямой AB вне окружностей. Докажите, что длины всех касательных, проведенных из точки X к окружностям, равны.*

Решение. Обозначим точки касания буквами P и Q (см. рис. 5). По теореме о касательной и секущей $XP^2 = XA \cdot XB = XQ^2$. Следовательно, $XP = XQ$ для любой точки прямой AB. Значит, *степени точек прямой AB относительно этих окружностей равны*. Верно и обратное утверждение: *если степени точки X относительно пересекающихся в точках A и B окружностей равны, то она лежит на прямой AB.* Запомним это. Справедлива и более общая теорема.

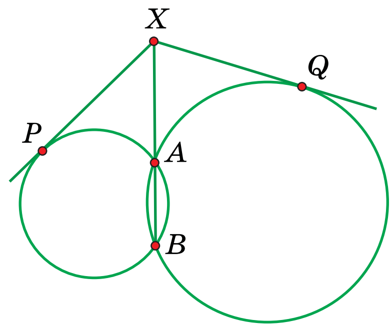

Рис. 5.

Теорема 4. *Множество точек, для которых степени относительно двух неконцентрических окружностей равны, является прямой, перпендикулярной линии их центров.*

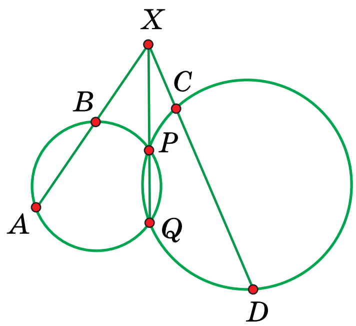

Рис. 6.

Эта прямая называется *радикальной осью* данных окружностей. Мы рассмотрели только частный случай, когда окружности пересекаются.

Здесь нужно обратить внимание учащихся, что по задаче 1 касательные, проведенные из точки X прямой AB к любой (!) окружности, проходящей через точки A и B равны. Все точки касания лежат на одной окружности.

Задача 2. *Две окружности пересекаются в точках P и Q. Точка X лежит на прямой PQ, но не на отрезке PQ (см. рис. 6). Пусть точки A и D лежат на разных окружностях. Прямые XA и XD пересекают окружности второй раз в точках B и C соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.*

Решение. По теореме о секущих выполняется равенство $XA \cdot XB = XQ \cdot XP = XD \cdot XC$. Следовательно, по признаку вписанного четырёхугольника, точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

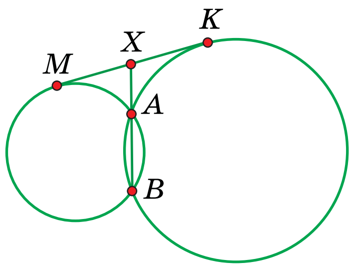

Рис. 7.

Задача 3. *Две окружности пересекаются в точках A и B; MK – общая касательная к ним (см. рис. 7). Докажите, что прямая AB делит отрезок MK пополам.*

Решение. По задаче 1 $XM = XK$.

Задача 4. *Дана окружность* ω *и точки P и K вне её. Через точку P проведена секущая к окружности* ω, *пересекающая её в точках A и B. Докажите, что положение второй точки пересечения прямой PK с окружностью* γ, *проходящей через точки K, A, B, не зависит от выбора секущей AB.*

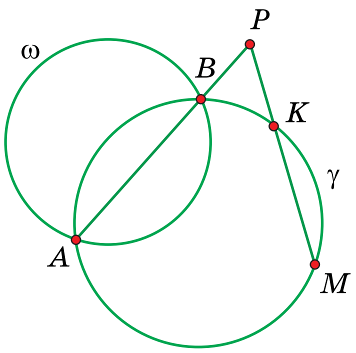

Рис. 8.

Решение. Проведём через точку P секущую PB и пусть M – вторая точка пересечения прямой PK с окружностью γ, проходящей через точки K, A, B (см. рис. 8). Тогда по теореме о секущих $PK \cdot PM = PB \cdot PA$. Последнее произведение есть степень точки P относительно окружности ω и не зависит от выбора секущей PB. Следовательно, величина $PK \cdot PM$ постоянна для любых секущих PA, проведённых к окружности ω. Поскольку точки P и K фиксированы, то и длина отрезка PM не меняется, т.е. точка M тоже фиксирована.

Задача 5. *Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.*

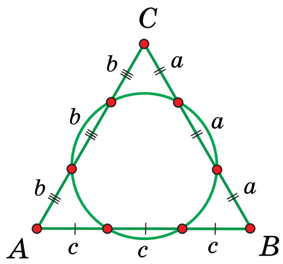

Рис. 9.

Решение. Пусть длины отрезков, высекаемых окружностью на сторонах AB, BC и AC будут c, a и b соответственно (см. рис. 9). Рассмотрим секущие к окружности, проходящие через точку A. Тогда $b \cdot 2b = c \cdot 2c$. Следовательно, $b = c$. Аналогично можно доказать, что $a = c$. Поскольку $a = b = c$, то треугольник правильный.

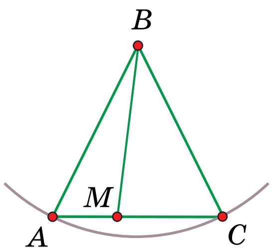

Рис. 10.

Задача 6. *Доказать, что, если на основании AC равнобедренного треугольника ABC взять произвольную точку M, то $BC^2 - BM^2 = AM \cdot CM$.*

Решение. Рассмотрим окружность с центром в точке B и радиусом BC (см. рис. 10). Тогда по теореме 3 степень точки M равна $AM \cdot CM = BC^2 - BM^2$.

Заметим, что здесь мы использовали ещё один характерный приём, а именно построили вспомогательную окружность, которая довольно часто выручает в задачах на равнобедренный треугольник.

Задача 7. *В угол вписаны две окружности. Одна из них касается сторон угла в точках A и B, а другая в точках C и D (см. рис. 11). Докажите, что прямая AD высекает на этих окружностях равные хорды.*

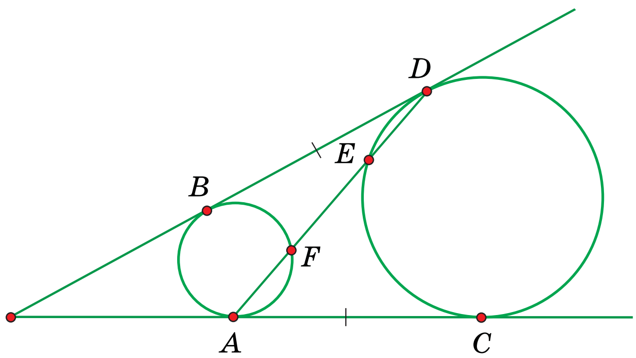

Рис. 11.

Решение. Степень точки A относительно второй окружности равна $AE \cdot AD = AC^2$. Аналогично для точки D: $DF \cdot DA = BD^2$. Поскольку $AC = BD$ (почему?), то $AE = DF$. Следовательно, $AF = DE$.

Задача 8. *Доказать, что все окружности, проходящие через данную точку A и пересекающие данную окружность в диаметрально противоположных точках, проходят одновременно через некоторую точку P, отличную от A.*

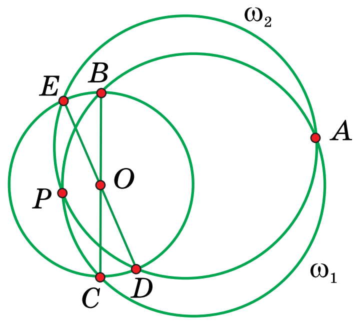

Рис. 12.

Решение. Рассмотрим две таких окружности ω_1 и ω_2, которые пересекают данную окружность в точках B, C, D и E соответственно (см. рис. 12). Пусть они второй раз пересекаются в точке P. Степень точки O относительно первой и второй окружности равна R^2. Следовательно, $O \in AP$ (по замечанию к задаче 1), при этом $OP \cdot OA = R^2$. Поскольку OA и R постоянны, то и точка P на прямой AO фиксирована.

Второе занятие

Перед вторым занятием можно доказать формулу длины биссектрисы:

$$CL^2 = a \cdot b - a' \cdot b', \text{ где } AC = a,\ BC = b,\ AL = a',\ BL = b'.$$

Во-первых, эту формулу полезно знать, во-вторых, её доказательство – лишняя демонстрация метода. Наконец, главное в том, что одна из целей кружка – научить решать задачи. Часто после разбора сложной задачи у школьников остаётся впечатление, что лектор (учитель) – это фокусник, который умело извлекает «из рукава» нужные формулы и теоремы. Решение они поняли, но от учащихся осталось скрытым, как можно самому догадаться до такого решения. Проблема в том, что учащимся почти всегда показывают наиболее короткое и рациональное решение, не объясняя причин, по которым нужно выполнять те или иные действия. Например, в самом начале приведённого ниже доказательства говорится: «Построим точки K и N, симметричные...» Почему их надо строить? Да ещё симметричные чему-то?

Вернёмся к задаче. С чего начать? Выражение ab в формуле должно наводить на мысль (точнее, на вопрос): «Где такое выражение встречается?» Наверное, оно связано с площадью. А квадрат высоты в прямоугольном треугольнике равен произведению проекций катетов. Не очень понятно, где здесь прямоугольные треугольники с нужными сторонами. Что ещё? – Степень точки. Хорошо, попробуем. Но у нас отрезки лежат на разных прямых, и окружности нет. Это даёт план на два ближайших хода.

Заметим, чтобы получить произведение секущих ab, отрезки надо отложить на одну прямую. Это ещё одна идея – спрямление (в данном случае – симметрия относительно биссектрисы), которая учащимся уже должна быть знакома. Найдём эту окружность. Проведем её через концы полученных отрезков. Заметим, что таких окружностей много. Можно выбрать ту, которая нам больше подходит – это мы уже обсуждали в решении задачи 1. Далее, поскольку в формуле есть ещё произведение $a'b'$, то нужна еще одна окружность. Нельзя ли эти окружности совместить? Далее посмотрим, что получится.

Вот такой примерно план рассуждений и набор вопросов. Поэтому логично сначала дать школьникам возможность пообсуждать эту задачу, задать им вопросы, а потом уже перейти к доказательству.

Доказательство. Пусть для определённости $BC > AC$. Построим точки K и N, симметричные точке A относительно биссектрисы CL и точки L соответственно (см. рис. 13). Тогда $CK = a$ и $LN = a'$. Обозначим окружность, описанную около треугольника KNB через ω, степени точек C и L относительно окружности ω, через s и s'.

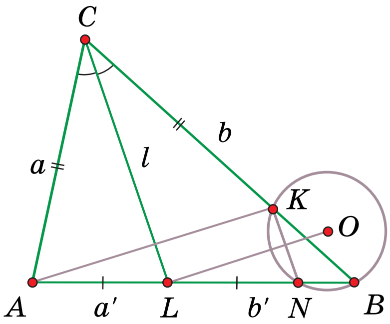

Рис. 13.

Тогда по известной формуле: $s = ab = CO^2 - R^2$ и $s' = a'b' = LO^2 - R^2$, где O – центр, а R – радиус окружности ω. Найдём разность $s - s'$: $ab - a'b' = CO^2 - LO^2$.

Докажем, что угол CLO – прямой. Длины отрезков AL, LK, и LN равны, следовательно, $AK \perp KN$. Окружность с центром в точке L и радиусом LN и окружность ω имеют общую хорду KN. Следовательно, $LO \perp KN$. Тогда LO параллельно AK и $AK \perp CL$. Значит, $LO \perp CL$. По теореме Пифагора $l^2 = CO^2 - LO^2 = ab - a'b'$.

Приведём задачи второго листка.

1. *Доказать, что радикальные оси трёх неконцентрических окружностей пересекаются в одной точке или параллельны.*

2. *Две окружности касаются в точке K внешним образом. Через эту точку проведена прямая, которая, пересекаясь с окружностями, высекает хорды KP и KQ. Из точек P и Q проведены к окружностям касательные PT_1 и QT_2, где T_1 и T_2 – точки касания. Докажите, что $PT_1^2 + QT_2^2 = PQ^2$.*

3. *Вершина C прямого угла треугольника ABC лежит внутри окружности с центром O и радиусом R, проходящей через концы гипотенузы AB. CH – высота треугольника ABC. На прямой AB взята точка K так, что $KH = OH$. Найдите CK.*

4. *В треугольнике ABC угол B – тупой. Постройте на AC точку D такую, что $AB^2 = AD \cdot AC$.*

5. *Постройте на данной прямой точку, из которой данный отрезок виден под наибольшим углом.*

6. *Вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся сторон BA и BC отразили относительно середин этих сторон. Докажите, что общая хорда получившихся окружностей проходит через точку B.*

7. *В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AB и AC, AH – высота. Окружности, описанные вокруг треугольников BHN и CHM пересекаются вторично в точке P. Докажите, что отрезок PH проходит через середину MN.*

Задачи №№ 6 и 7 взяты из Всероссийских олимпиад 2005 (10 класс) и 2007 годов (9 класс) соответственно.

Что в результате?

Использование набора средств, ключевых задач и небольшой теории, развитой при изучении темы «Степень точки относительно окружности» позволяет участникам кружка решать задачи и на олимпиадах разного уровня. В качестве примера рассмотрим задачу из Турнира городов (2008 г., 11 класс).

Дана неравнобокая трапеция $ABCD$. Точка A_1 – это точка пересечения описанной окружности треугольника BCD с прямой AC, отличная от C. Аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – тоже трапеция.

Решение получено активной участницей кружка Стекловой Лидией.

Пусть P – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ (см. рис. 14). Заметим, что точки A_1, B, C, D лежат на одной окружности, поэтому $A_1P\cdot PC = BP\cdot PD$[2]. Для остальных четвёрок точек записываем аналогичные равенства:

$$C_1P\cdot PA = BP\cdot PD,\ B_1P\cdot PD = AP\cdot PC,\ D_1P\cdot PB = AP\cdot PC.$$

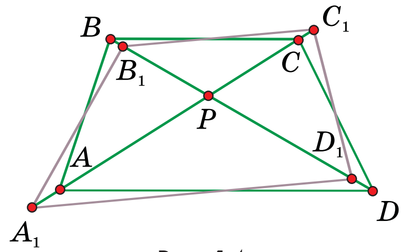

Рис. 14.

Разделив первое равенство на второе, а третье на четвёртое, получим: $\dfrac{A_1P\cdot PC}{C_1P\cdot PA}=1$, $\dfrac{B_1P\cdot PD}{D_1P\cdot PB}=1$. Отсюда следует, что $\dfrac{A_1P}{C_1P}=\dfrac{AP}{CP}$ и $\dfrac{B_1P}{D_1P}=\dfrac{BP}{DP}$. Из подобия треугольников APD и CPB следует равенство: $\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{DP}{BP}$.

Следовательно, $\dfrac{A_1P}{C_1P}=\dfrac{D_1P}{B_1P}$. А так как $\angle B_1PC_1=\angle A_1PD_1$, то треугольники B_1PC_1 и A_1PD_1 подобны. Получается, что прямые A_1D_1 и B_1C_1 параллельны. Докажем, что прямые A_1B_1 и C_1D_1 не параллельны. Предположим, что они параллельны. Тогда четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм. Следовательно, P – середина A_1C_1 и B_1D_1. Получается, что P – середина AC и BD. Следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, что противоречит условию. Значит, прямые A_1B_1 и C_1D_1 не параллельны. То есть $A_1B_1C_1D_1$ – трапеция, что и требовалось доказать.

Задачи листков обычно связаны между собой. Рассмотрим заключительные задачи листка «Свойства ортоцентра».

7. *Доказать, что произведение длин отрезков, на которые ортоцентр разбивает высоты треугольника, одинаково для всех высот.*

8. *Если две окружности построены на двух чевианах как на диаметрах, то их точки пересечения и ортоцентр лежат на одной прямой* (*см. рис.* 15).

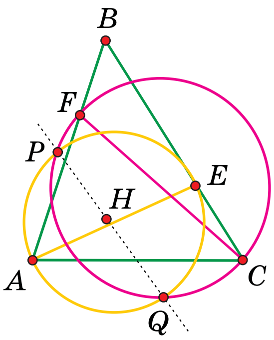

Рис. 15.

В доказательстве задачи 7 используется задача 1 того же листка: «Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, принадлежит описанной окружности», а также факт, что искомое произведение в два раза меньше, чем степень ортоцентра относительно описанной окружности.

В задаче 8 (с помощью задачи 7) надо доказать, что степени ортоцентра относительно этих окружностей равны. Решение многих подобных задач начинается со слов «Рассмотрим степень точки M относительно окружности ω». Часто именно в этом и состоит основная сложность – увидеть эту точку и окружности. А это и есть тема предыдущего листка.

Тем, кто решил эти задачи, предлагается подумать, что будет в случае трёх окружностей. Результат они должны сформулировать самостоятельно. На учеников производит сильное впечатление противоречие между сложностью задачи и тем, что они решили её за несколько минут. Ученики при этом забывают, что сначала они решили целый листок на степень точки, а потом все задачи о свойствах ортоцентра. Мы надеемся, что такая эмоциональная составляющая занятий способствует повышению интереса к геометрии.

Вернуться к содержанию

[2] Это и есть степень точки P относительно окружности. Важно то, что ученица знала, что искать. Нарисовать полный чертёж, и по нему решить задачу, по-моему, просто невозможно.