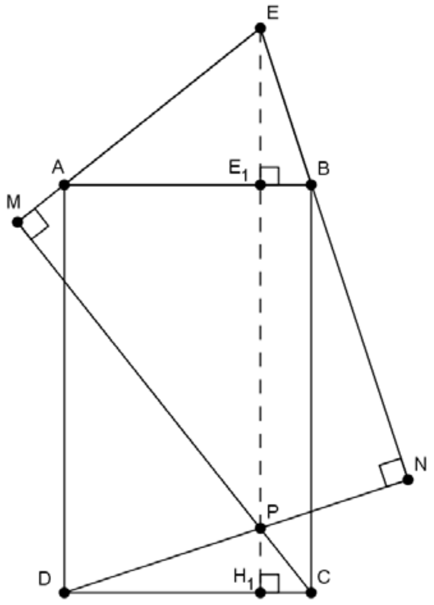
Ортологичные треугольники

Д. Прокопенко, школа 2007, Москва.

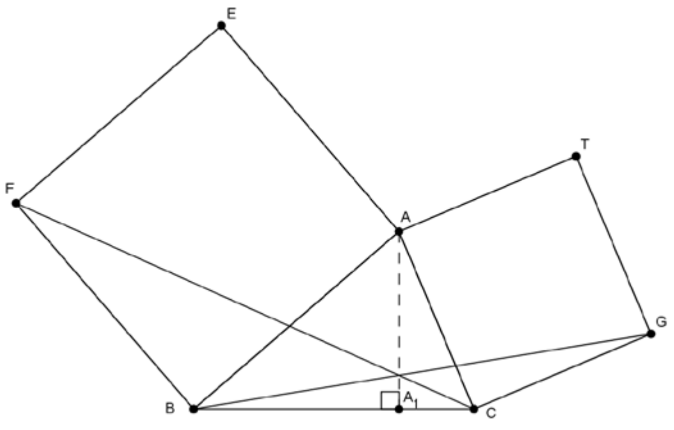
Часть 1. Вводные задачи.

Идея решения: высоты пересекаются в одной точке.

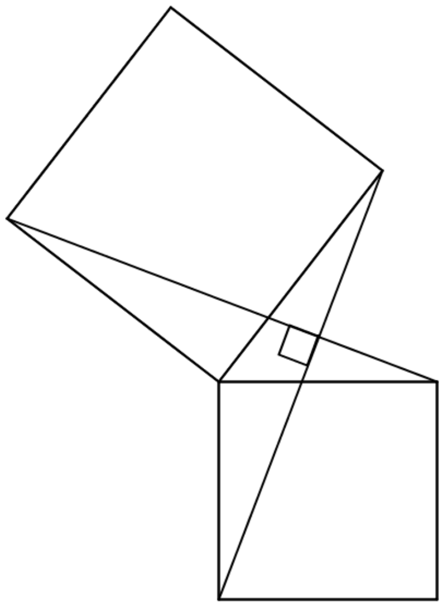
Задача 1. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ вне его построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены перпендикуляры CM и DN соответственно к прямым AE и BE. Доказать, что точка P пересечения прямых CM и DN принадлежит прямой, содержащей высоту треугольника ABE.



Задача 2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1.



Вспомогательный факт. Два квадрата с общей вершиной.

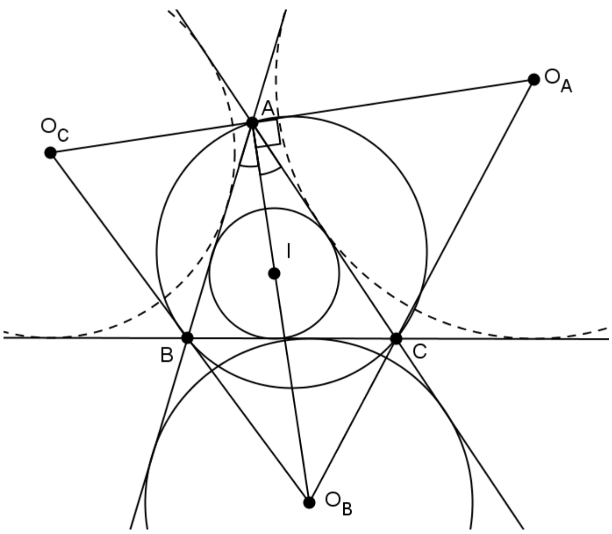


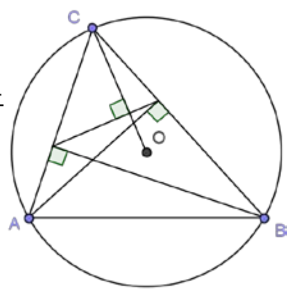
Задача 3. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке.

Вспомогательные факты.

Определение. Основания высот треугольника являются вершинами **ортотреугольника**.

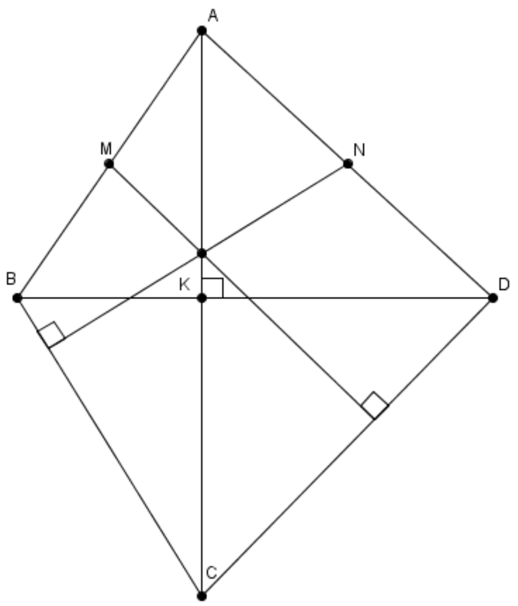
Центры вневписанных окружностей. Биссектрисы треугольника ABC лежат на высотах треугольника $O_AO_BO_C$.





Свойство ортотреугольника. Радиусы описанной окружности, проведенные к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.

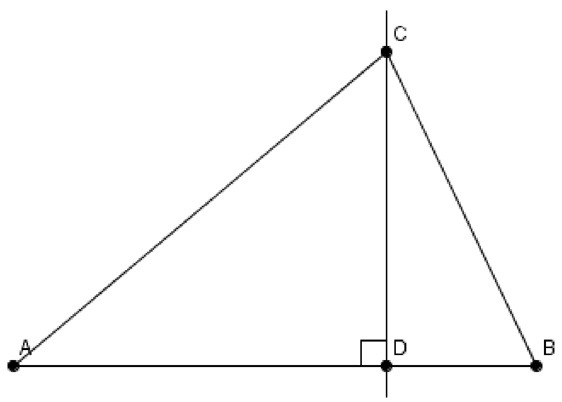
Задача 4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Доказать, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.



ГМТ разность квадратов.

Геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до концов отрезка постоянна, есть прямая, перпендикулярная данному отрезку.

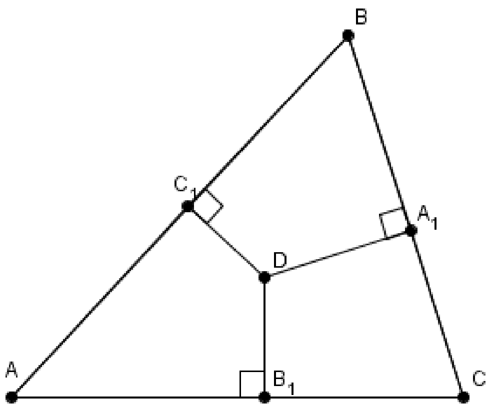
$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$



Теорема Карно

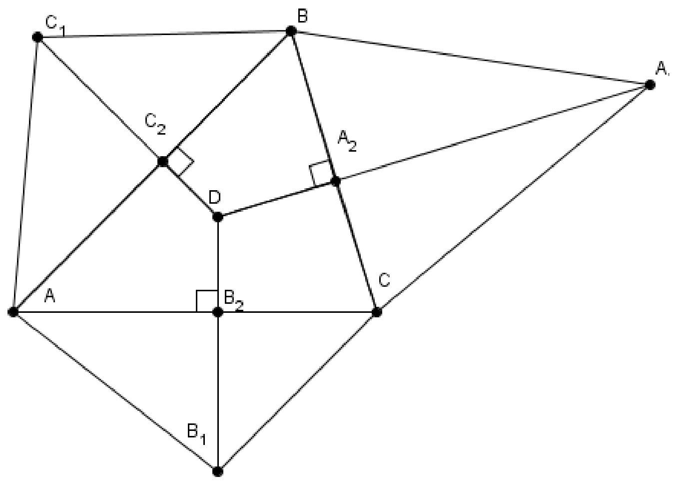
Для того, чтобы перпендикуляры, восстановленные из произвольных точек A_1, B_1 и C_1 соответственно сторон BC, AC и AB треугольника ABC, пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:

$$C_1A^2 + A_1B^2 + B_1C^2 = C_1B^2 + B_1A^2 + A_1C^2.$$



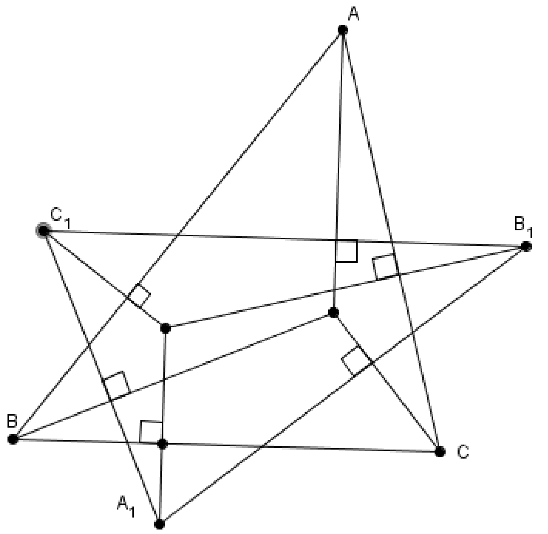
Обобщение теоремы Карно

Перпендикуляры, опущенные из произвольных точек плоскости A', B' и C' на прямые BC, CA и AB соответственно, лежащие в этой же плоскости, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство $C_1A^2 + A_1B^2 + B_1C^2 = C_1B^2 + B_1A^2 + A_1C^2$.



Теорема Штейнера

На плоскости даны шесть точек A, B, C, A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если перпендикуляры, опущенные из точек A_1, B_1 и C_1 на прямые BC, AC и AB соответственно, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из точек A, B и C на прямые соответственно B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1, также пересекаются в одной точке.

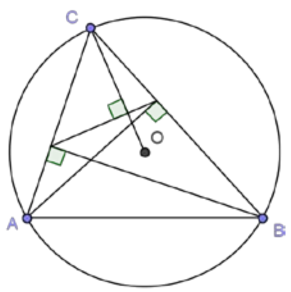


Ортологичные треугольники

Если перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника ABC на соответствующие стороны треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ на соответствующие стороны треугольника ABC, пересекаются в одной точке. Такие треугольники называются *ортологичными* (Коротко записывают $ABC \perp A_1B_1C_1$). Это утверждение вытекает из уже доказанной теоремы Штейнера.

Примеры ортологичных треугольников.

1) **Ортотреугольник.** По свойству ортотреугольника радиусы описанной окружности, проведенные к вершинам треугольника, перпендикулярны соответствующим сторонам ортотреугольника.

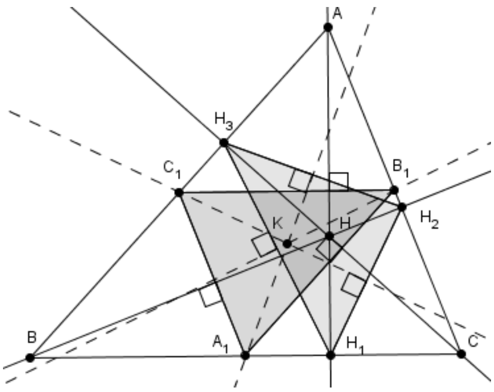


Поэтому перпендикуляры из вершин треугольника *ABC* на стороны ортотреугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности треугольника *ABC*.

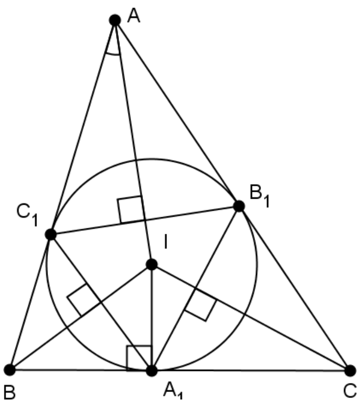
И наоборот, перпендикуляры из вершин ортотреугольника на стороны треугольника *ABC* пересекаются в одной точке – точке пересечения высот треугольника *ABC*.

Вывод: треугольник и его ортотреугольник ортологичны с центрами ортологии в центре описанной окружности и ортоцентре.

2) **Ортотреугольник и серединный треугольники.** В треугольнике ABC ортологичны ортотреугольник $H_1H_2H_3$ и серединный треугольник $A_1B_1C_1$, центры ортологии – ортоцентр треугольника ABC и точка K на рисунке:

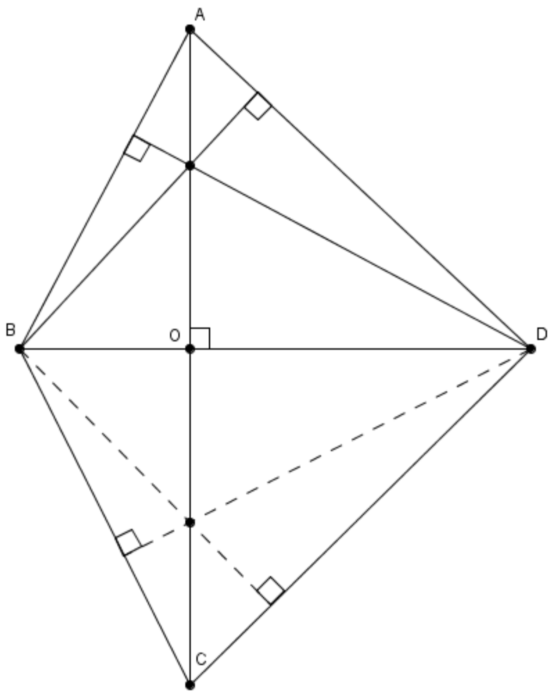


3) Треугольник ABC и треугольник $A_1B_1C_1$, образованный точками касания вписанной окружности со сторонами треугольника. Центры ортологии совпадают – это центр I вписанной окружности.

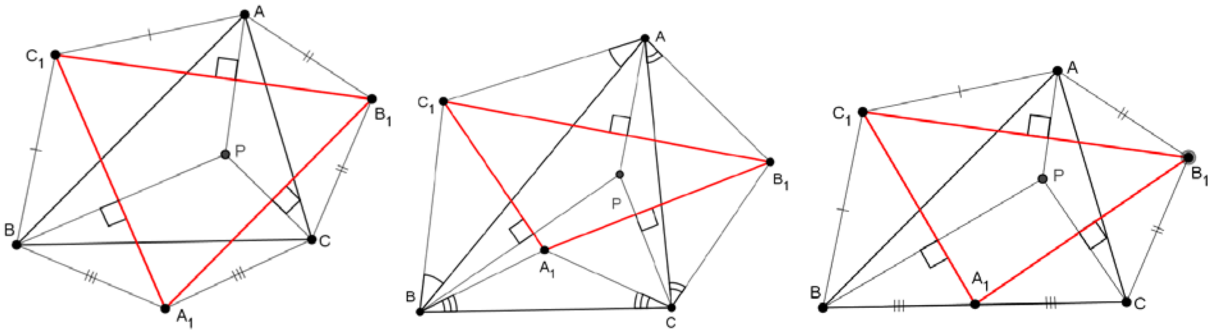


4) **Прямоугольник с перпендикулярными диагоналями**. В прямоугольнике с перпендикулярными диагоналями, пересекающимися в точке O, ортологичны пары

треугольников ABC и ADC, ABD и CBD с центрами в ортоцентрах этих треугольников:



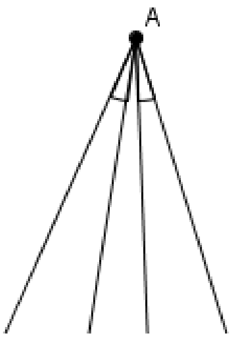
Задачи из книги А. Акопяна «Геометрия в картинках»



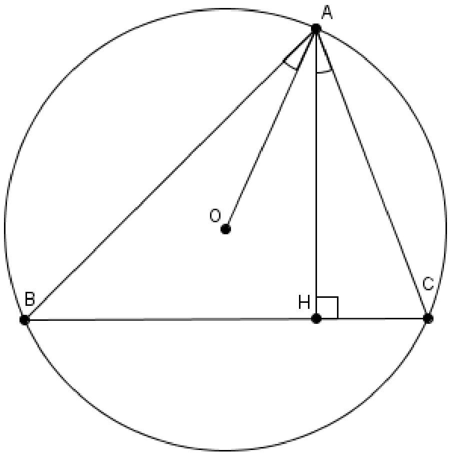
Центры ортологии – точка P и центр описанной окружности треугольника ABC.

Изогональное сопряжение.

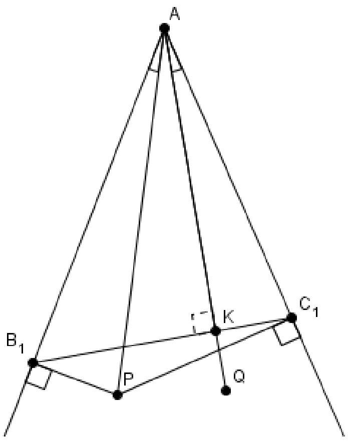
Изогоналями называют прямые, выходящие из вершины угла и симметричные относительно биссектрисы этого угла.



Пример изогоналей: в треугольнике ABC изогоналями являются высота AH_1 и радиус описанной окружности AO.

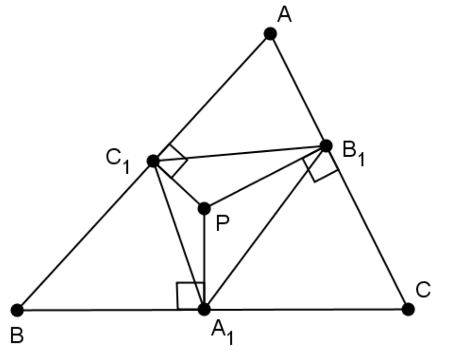


Свойство изогоналей. Пусть точки B_1 и C_1 – проекции точки P на стороны угла BAC. Тогда прямая B_1C_1 перпендикулярна прямой AQ, изогональной AP.

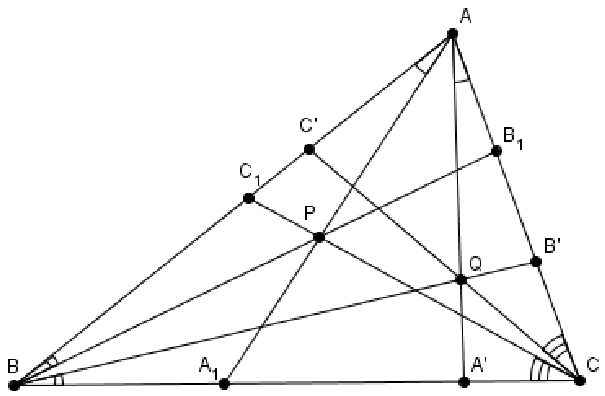


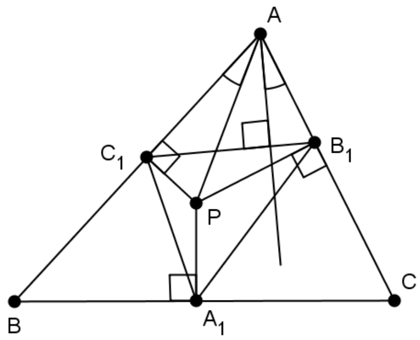
Изогональное сопряжение.

Определение. Пусть A_1, B_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямые BC, CA и AB. Треугольник $A_1B_1C_1$ называют педальным (или подерным) треугольником точки P относительно треугольника ABC.



Теорема. Если в треугольнике ABC чевианы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в некоторой точке P, то изогональные им чевианы AA', BB' и CC' также пересекаются в одной точке Q. Точки P и Q называют **изогонально сопряженными**.



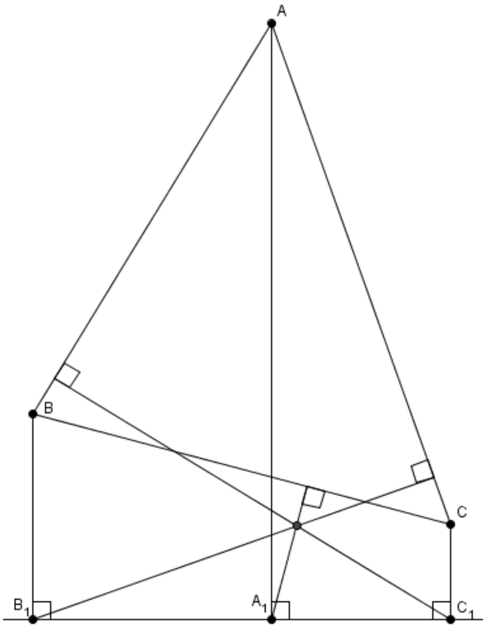


Геометрический смысл центров ортологии для педальных треугольников

Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ – педальные треугольники точек P и Q относительно треугольника ABC. Точки P и Q изогонально сопряженные. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ – ортологичны с центрами ортологии P и Q.

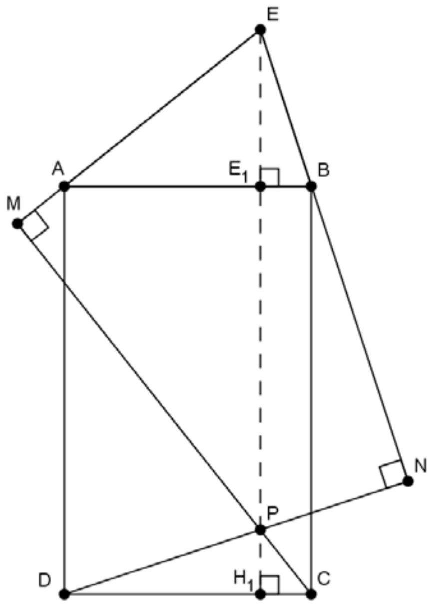
Ортопол

Опустим из вершин A, B и C треугольника ABC соответственно перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 на произвольную прямую l. Тогда перпендикуляр из точки A_1 на прямую BC, перпендикуляр из точки B_1 на прямую AC и перпендикуляр из точки C_1 на прямую AB пересекаются в одной точке P, называемой **ортополом** прямой l относительно треугольника ABC.



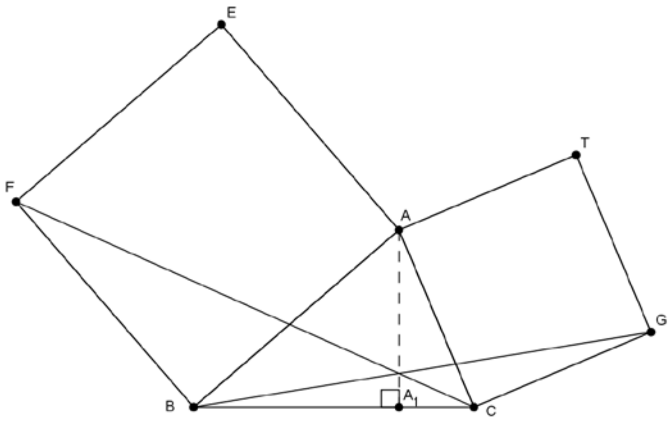
Решение задач из части 1.

Задача 1. На стороне AB прямоугольника $ABCD$ вне его построен треугольник ABE. Через точки C и D проведены перпендикуляры CM и DN соответственно к прямым AE и BE. Доказать, что точка P пересечения прямых CM и DN принадлежит прямой, содержащей высоту треугольника ABE.

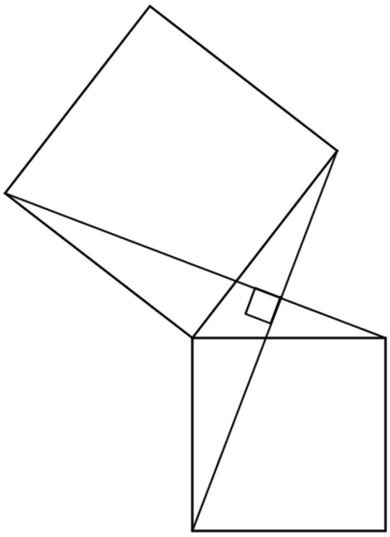


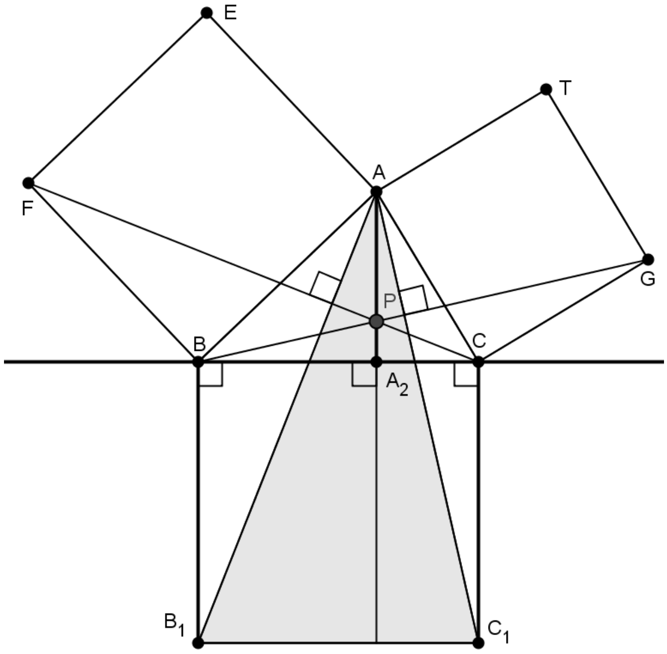
Решение: точка *P* – ортопол прямой *CD* относительно треугольника *ABE*.

Задача 2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC внешним образом построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1.



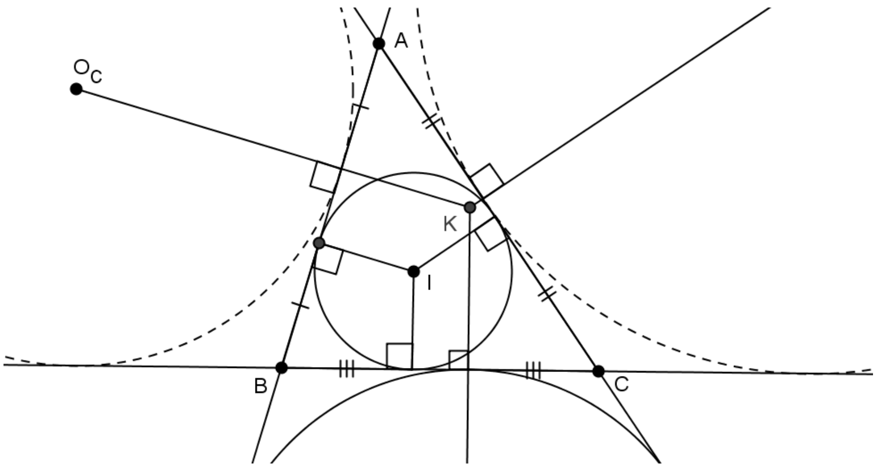
Идея решения:



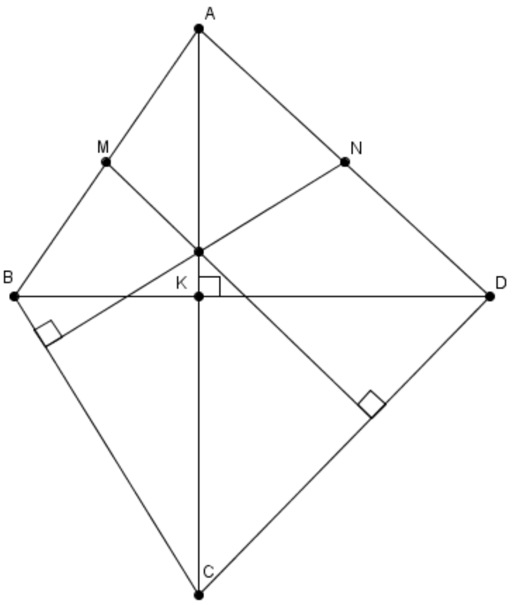


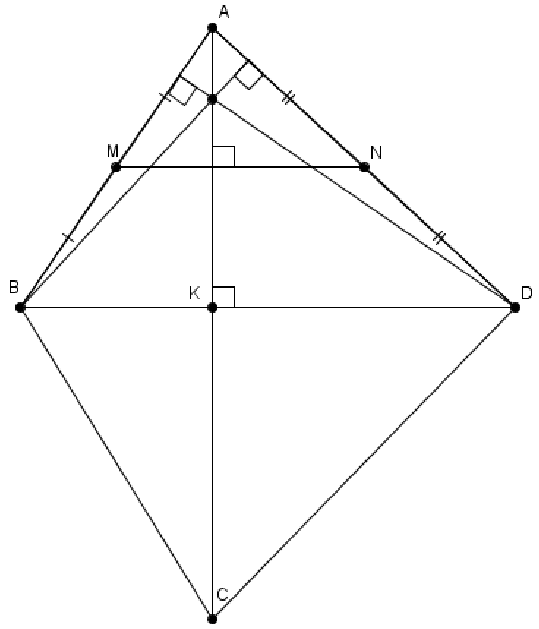
Точки B, C и A_2 – проекции вершин треугольника AB_1C_1 на прямую BC. Тогда точка P – ортопол прямой BC относительно треугольника AB_1C_1.

Задача 3. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из центров вневписанных окружностей треугольника на его стороны, пересекаются в одной точке.



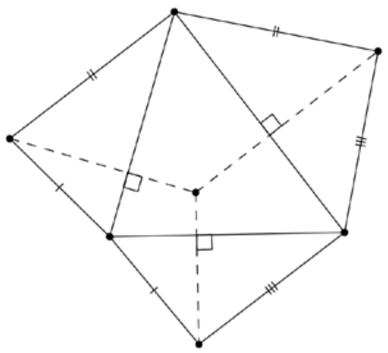
Задача 4. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, перпендикулярные противоположным сторонам CD и CB соответственно. Доказать, что эти прямые и прямая AC имеют общую точку.



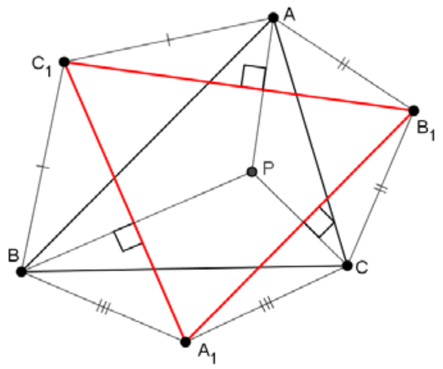


Несколько задач

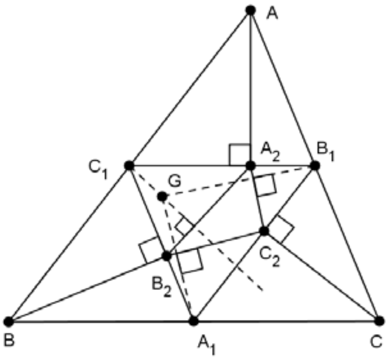
Задача про разверктку. Точки A_1, B_1, C_1 таковы, что $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точки A_1, B_1, C_1 на прямые BC, CA, AB пересекаются в одной точке.



Сравните с задачей:



Задача. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. B_2 – основание перпендикуляра из точки B на A_1C_1. Аналогично определены A_2 и C_2. Докажите, что перпендикуляры из точек A_1, B_1, C_1 на прямые B_2C_2, A_2C_2 и A_2B_2 соответственно, пересекаются в одной точке.



Немного теории

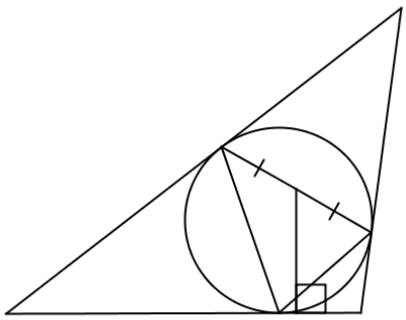
Теорема 1. Треугольники с параллельными сторонами. Если треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ортологичны, а стороны треугольников $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ параллельны, то треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ также ортологичны.

Теорема 2. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ провели высоты C_1H_1 и C_2H_2. Пусть прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны и $A_1H_1 : H_1B_1 = A_2H_2 : H_2B_2$. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ортологичны.

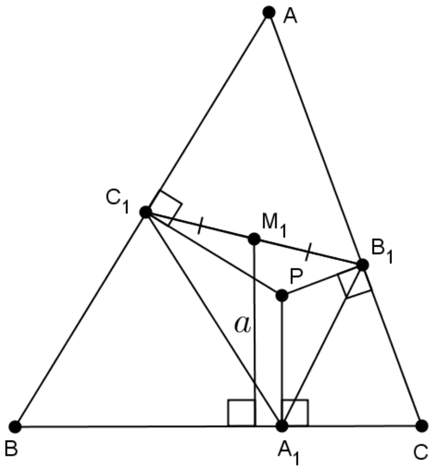
Теорема 3. Вершины педальных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ симметричны относительно середин сторон треугольника ABC, на которых они лежат. Тогда треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ортологичны.

Задачи

Задача. В треугольник ABC вписана окружность. Из середины каждого отрезка, соединяющего две точки касания, проводится перпендикуляр к противолежащей стороне. Докажите, что эти перпендикуляры пересекаются в одной точке.

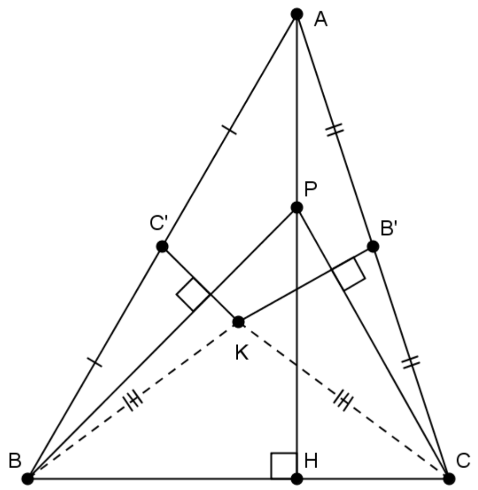


Обобщение. Рассмотрим точку P и ее педальный треугольник $A_1B_1C_1$ относительно треугольника ABC. Через середину стороны B_1C_1 проводится прямая a, перпендикулярно стороне BC. Аналогично определяются прямые b и c. Доказать, что a, b и c пересекаются в одной точке.



Задача. Около треугольника ABC описали окружность. A_1 — точка пересечения ее с прямой, параллельной BC и проходящей через вершину A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1 и C_1 опустили перпендикуляры на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке. (*А.Г. Мякишев, Д.П.Мавло*).

Задача. В остроугольном треугольнике ABC на высоте AH выбрана произвольная точка P. Точки B' и C' – середины сторон AC и AB соответственно. Перпендикуляр, опущенный из B' на CP, пересекается с перпендикуляром, опущенным из C' на BP, в точке K. Докажите, что точка K равноудалена от точек B и C.



В треугольнике *ABC O* – центр описанной окружности. Прямая *a* проходит через середину высоты треугольника, опущенной из вершины *A*, и параллельна *OA*. Аналогично определяются прямые *b* и *c*. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке. (*А.Г. Мякишев*)

Связь с афинными преобразованиями

Теорема Ридо, 2006 г.

Пусть треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ ортологичны с центрами ортологии P и Q соответственно. F – аффинное преобразование, отображающее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Тогда $F(P)=Q$.

Определение. 1) *Симедиана* – прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы, выходящей из той же вершины. 2) *Точка Лемуана* – это точка пересечения симедиан.

Геометрический смысл точки Лемуана.

Точка пересечения медиан и точка Лемуана изогонально сопряжены.

Теорема Лемуана. Точка Лемуана треугольника *ABC* треугольника является центром тяжести её педального треугольника.

Задачи.

Задача. Пусть М – точка пересечения медиан треугольника *ABC*. На перпендикулярах, опущенных из *M* на стороны *BC*, *AC* и *AB*, взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно, причем $A_1B_1 \perp MC$ и $A_1C_1 \perp MB$. Докажите, что M является точкой пересечения медиан и в треугольнике $A_1B_1C_1$.

Задача. В неравнобедренном треугольнике *ABC* точки *H* и *M* — точки пересечения высот и медиан соответственно. Через вершины *A*, *B* и *C* проведены прямые, перпендикулярные прямым *AM*, *BM*, *CM* соответственно. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника, образованного проведенными прямыми, лежит на прямой *MH*.